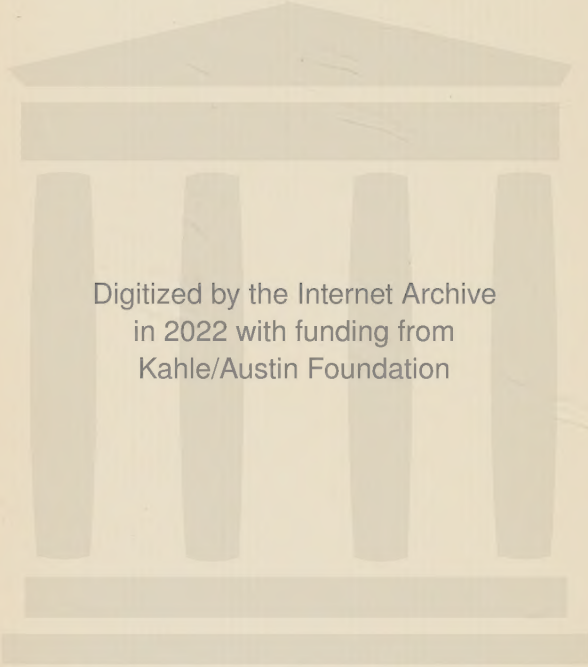




mk. 19.80/14.0





Digitized by the Internet Archive  
in 2022 with funding from  
Kahle/Austin Foundation





E. PASCAL

O. PROFESSOR AN DER KGL. UNIVERSITÄT ZU NEAPEL

---

REPERTORIUM  
DER HÖHEREN MATHEMATIK

ZWEITE, VÖLLIG UMGEARBEITETE AUFLAGE DER DEUTSCHEN  
AUSGABE, UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER MATHEMATIKER

HERAUSGEGEBEN VON

E. SALKOWSKI UND H. E. TIMERDING

IN BERLIN

IN BRAUNSCHWEIG

ERSTER BAND

ANALYSIS



1929

LEIPZIG UND BERLIN

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

# REPERTORIUM DER HÖHEREN ANALYSIS

UNTER MITWIRKUNG DER HERREN

E. BESSEL-HAGEN IN BONN . H. HAHN IN WIEN . E. HILB IN WÜRZBURG  
G. HOHEISEL IN HAMBURG . E. KAMKE IN TÜBINGEN . J. LENSE IN MÜNCHEN  
L. LICHTENSTEIN IN LEIPZIG . A. PLESSNER IN GIESSEN . W. STERNBERG  
IN Breslau . A. WALTHER IN Darmstadt

HERAUSGEGEBEN VON

E. SALKOWSKI

PROFESSOR AN DER TECHN. HOCHSCHULE BERLIN

ZWEITE AUFLAGE

DRITTER TEILBAND



1929

LEIPZIG UND BERLIN

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER



V.1-pt.3

## Vorwort.

Die Neubearbeitung von Pascals Repertorium, die nunmehr abgeschlossen vorliegt, hatte sich zwei Ziele gesetzt: in erster Linie war sie dazu bestimmt, „dem angehenden Mathematiker einen systematischen, auf wirklichem Verständniss beruhenden Überblick über die Gesamtheit der Wissenschaft“ zu vermitteln, zugleich aber wollte sie „dem wissenschaftlich arbeitenden Mathematiker in knappen Umrissen ein Bild von dem heutigen Stand der Forschung geben und so dazu beitragen, die einzelnen Gebiete der Wissenschaft in lebendige Wechselwirkung zu bringen“.

Wenn man jetzt, nach Abschluß des Ganzen, die Reihe der Beiträge daraufhin ansieht, wie weit diese im Vorwort des ersten Teilbandes gesteckten Ziele erreicht sind, so könnte man zunächst vielleicht meinen, daß der Hauptzweck, den Studierenden mit den mathematischen Forschungsmitteln und -ergebnissen bekannt zu machen, stark in den Hintergrund getreten wäre. In der Tat wird kein Anfänger durch das Repertorium allein einen Gesamtüberblick über die Wissenschaft gewinnen können. Das aber vermöchte überhaupt keine irgendwie gestaltete Darstellung. Es liegt eben im Wesen des mathematischen Denkens, daß ein wirkliches Verständniss nur durch ernsthafte Vertiefung in die Einzelheiten gewonnen wird, und eine solche können kurze, zusammenfassende Artikel niemals geben. Wenn diese Aufgabe, die die Herausgeber dem Repertorium gestellt hatten, überhaupt einen Sinn haben soll, so kann es nur der sein, dem Anfänger in knappen Sätzen die grundlegenden Begriffsbildungen und wesentlichsten Ergebnisse darzubieten, ihn aber zugleich auf diejenigen eingehenderen Darstellungen in Lehrbüchern, Monographien und der Originalliteratur hinzuweisen, in denen er weitere Belehrung am besten findet. Der angehende Mathematiker wird also das Buch nicht in einem Zuge durcharbeiten können, um dann den gewünschten Gesamtüberblick erreicht zu haben, es wird ihm vielmehr während seines ganzen Studiums als getreuer und zuverlässiger Ratgeber zur Seite stehen, wenn



er über eine ihm noch unbekannte Fragestellung die erste Belehrung sucht. Damit treffen aber seine Interessen zusammen mit denen des Spezialforschers, der ebenfalls für solche Gebiete, die seinem Forschungsbereiche ferner liegen, gern eine kurze Orientierung zu Rate zieht, wobei er auf eine sichere Führung durch die für den Außenstehenden unübersehbare Literatur besonderes Gewicht legen wird.

In diesem Sinne haben alle Herren, die durch ihre Mitarbeit den Abschluß des Werkes ermöglichten, und denen auch an dieser Stelle der herzlichste Dank ausgesprochen sei, ihre Aufgabe aufgefaßt und so trotz aller Selbständigkeit im einzelnen ein einheitliches Ganzes geschaffen. Eine gewisse Schwierigkeit lag darin, die gesamte Analysis so aufzuteilen, daß kein wesentliches Gebiet unberücksichtigt blieb, aber auch Wiederholungen vermieden wurden. Ganz ließ sich das letztere, namentlich in dem vorliegenden Teilbände, nicht vermeiden, da verständlicherweise jeder Autor seinen Beitrag zu einem in sich geschlossenen Ganzen abzurunden bestrebt war. Immerhin sind die Überlagerungsflächen auf ein Mindestmaß beschränkt worden, indem jeder der Herren Mitarbeiter in der Lage war, die seinem Thema naheliegenden Kapitel noch vor der endgültigen Drucklegung kennen zu lernen. Wo auch jetzt noch eine doppelte Darstellung desselben Gegenstandes erfolgt, war sie der Natur der Sache nach nicht zu vermeiden, ja sogar erwünscht, da so ein wichtiger Sachverhalt von verschiedenen Standpunkten aus beleuchtet und damit um so klarer zu überschauen ist.

Mein Dank gilt auch der Verlagsbuchhandlung, die trotz mannigfacher Schwierigkeiten sich nicht abschrecken ließ, das einmal begonnene Werk zum glücklichen Ende zu führen.

Neubabelsberg, März 1929.

**E. Salkowski.**

# Inhaltsverzeichnis.

## Kapitel XX.

### Neuere Theorie der reellen Funktionen.

Von *Erich Kamke* in Tübingen.

	Seite
§ 1. Grundlagen aus der Mengenlehre . . . . .	1025
§ 2. Der Inhalt von Punktmengen . . . . .	1032
§ 3. Überdeckungssätze . . . . .	1036
§ 4. Das Maß von Punktmengen . . . . .	1038
§ 5. Der Begriff der reellen Funktion und des Limes . . . . .	1046
§ 6. Stetige Funktionen, monotone Funktionen, Funktionen von beschränkter Schwankung . . . . .	1050
§ 7. Die analytisch darstellbaren Funktionen. Die Baireschen Funktionenklassen . . . . .	1058
§ 8. Die meßbaren Funktionen . . . . .	1062
§ 9. Die Derivierten . . . . .	1065
§ 10. Allgemeines über den Integralbegriff. Das Riemannsche Integral . . . . .	1071
§ 11. Das Lebesguesche Integral beschränkter Funktionen . . . . .	1077
§ 12. Das Lebesguesche Integral nicht-beschränkter Funktionen . . . . .	1086
§ 13. Die Integrale von Denjoy und Perron . . . . .	1089
Literaturverzeichnis . . . . .	1094

## Kapitel XXI.

### Neuere Entwicklungen zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von *Guido Hoheisel* in Breslau.

§ 1. Existenzsätze. Singuläre Lösung. Gestalt der Integralkurven. Integrationsproblem . . . . .	1096
§ 2. Lineare Differentialgleichungen . . . . .	1100
§ 3. Verhalten der Integrale im komplexen Gebiet. . . . .	1102
§ 4. Randwertaufgaben . . . . .	1105
Literaturverzeichnis . . . . .	1106

## Kapitel XXII.

### Die Theorie der Randwertaufgaben im Gebiete der partiellen Differentialgleichungen.

Von *W. Sternberg* in Heidelberg.

Einleitung . . . . .	1107
§ 1. Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen . . . . .	1109
§ 2. Elementare Sätze der Potentialtheorie . . . . .	1113

	Seite
§ 3. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie . . . . .	1121
A. Formulierung und Eindeigkeitsätze. . . . .	1121
B. Existenzsätze . . . . .	1123
§ 4. Die allgemeine lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. .	1133
§ 5. Lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Variablen . . . . .	1140
§ 6. Lineare elliptische Differentialgleichungen mit Parameter	1141
§ 7. Asymptotisches Verhalten der Eigenwerte. Asymptotische Darstellung der Lösungen von Differentialgleichungen.	1149
§ 8. Nichtlineare elliptische Differentialgleichungen . . . . .	1151
§ 9. Die Natur der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen	1155
§ 10. Hyperbolische Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen . . . . .	1157
§ 11. Hyperbolische Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Variablen . . . . .	1165
§ 12. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung . . . . .	1175
§ 13. Allgemeine Theorie der parabolischen Differentialgleichungen . . . . .	1185
§ 14. Die Natur der Lösungen parabolischer Differentialgleichungen . . . . .	1187

### Kapitel XXIII.

#### Differenzenrechnung.

Von *Alwin Walther* in Darmstadt.

§ 1. Steigungen und Differenzen . . . . .	1189
§ 2. Interpolation . . . . .	1194
§ 3. Numerische Differentiation . . . . .	1198
§ 4. Numerische Integration. . . . .	1200
A. Mittelwertmethoden . . . . .	1200
B. Methoden der Trapezverbesserung . . . . .	1205
§ 5. Interpolationsreihen . . . . .	1210
§ 6. Fakultätenreihen . . . . .	1214
§ 7. Bernoullische und Eulersche Polynome. . . . .	1217
§ 8. Das Summationsproblem . . . . .	1221
§ 9. Homogene lineare Differenzengleichungen . . . . .	1229
§ 10. Inhomogene lineare Differenzengleichungen. . . . .	1239
§ 11. Differenzengleichungen und unendliche Gleichungssysteme	1242

### Kapitel XXIV.

**Die Theorie der Integralgleichungen und Funktionen unendlichvieler Variablen und ihre Anwendung auf die Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.**

Von *Hans Hahn* in Wien, *Leon Lichtenstein* in Leipzig und *Josef Lense* in München.

§ 1. Die Fredholmsche Integralgleichung . . . . .	1250
§ 2. Die Gleichungen von Volterra . . . . .	1258
§ 3. Die orthogonale Integralgleichung. Eigenwerte eines reellen unsymmetrischen Kernes . . . . .	1263

§ 4.	Systeme orthogonaler Funktionen. Die polare Integralgleichung . . . . .	1269
§ 5.	Die Formen von unendlich vielen Veränderlichen . . . . .	1273
§ 6.	Die Formen von unendlich vielen Veränderlichen und lineare Integralgleichungen . . . . .	1282
§ 7.	Anwendungen der Integralgleichungen auf die Randwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	1285
§ 8.	Lineare Integralgleichungen und die Randwertaufgaben der Potentialtheorie . . . . .	1295
§ 9.	Anwendungen der Theorie der linearen Integralgleichungen auf die Randwertaufgaben bei linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus . . . . .	1302
§ 10.	Die zu dem ersten Randwertproblem gehörigen Entwicklungssätze . . . . .	1309
§ 11.	Analoge Randwertprobleme und Entwicklungssätze. Integral-Differentialgleichungen . . . . .	1312
§ 12.	Vertauschbare Funktionen . . . . .	1319

## Kapitel XXV.

### Trigonometrische Reihen.

Von *A. Plessner* in Gießen.

Einleitung . . . . .	1325
A. Grundbegriffe. Definitionen . . . . .	1325
B. Geschichtliches. Problemstellung . . . . .	1330
Literatur . . . . .	1333
I. Abschnitt. Konvergenz und Summierbarkeit der Fourierschen und der konjugierten Reihen.	
§ 1. Das Riemann-Lebesguesche Lemma und die Lokalisationsätze . . . . .	1334
§ 2. Die klassischen Grundbedingungen . . . . .	1336
A. Die Partialsummen. Konvergenzkriterien . . . . .	1336
B. Die Fejérschen Mittel . . . . .	1340
C. Verschärfung des Konvergenzbegriffes und die Gibbs'sche Erscheinung . . . . .	1342
§ 3. Verallgemeinerung der Grundbedingungen . . . . .	1344
A. Die Lebesguesche Verallgemeinerung . . . . .	1344
B. Die G. B. ( $P_1$ ) und ( $Q_1$ ). Die Klasse D.-P. . . . .	1346
§ 4. Weitere Summationsmethoden . . . . .	1348
A. Poisson . . . . .	1349
B. Weierstraß . . . . .	1350
C. Riemann . . . . .	1351
D. De la Vallée Poussin . . . . .	1351
§ 5. Die darstellenden oder singulären Integrale . . . . .	1351
§ 6. Die Konvergenz- und Divergenzerscheinungen bei den F. R. und K. R. . . . .	1354

A. $f(x)$ ist eine Funktion beschränkter Schwankung . . . . .	1354
B. $f(x)$ ist stetig oder besitzt allgemeiner nur gewöhnliche, reguläre Punkte . . . . .	1354
C. Die Klassen $L$ , $Y$ und $D. P.$ . . . . .	1356
§ 7. Die differenzierten Reihen . . . . .	1359
Literatur zum I. Abschnitt . . . . .	1363

## II. Abschnitt. Die Klassen Fourierscher Reihen.

§ 8. Die Funktionsklassen und die zugeordneten Reihenklassen . . . . .	1364
§ 9. Klassenkonvergenz . . . . .	1368
§ 10. Die Koeffizientensätze und die formalen Operationen bei F.R. . . . .	1371
A. Die Zentralklasse $\mathfrak{L}_2$ . . . . .	1371
B. Die Parsevalsche Formel und die formale Multiplikation der F.R. . . . .	1372
C. Die Integration der F.R. . . . .	1373
D. Die Klassen $\mathfrak{L}_p$ . . . . .	1374
§ 11. Die konjugierte Reihe . . . . .	1375
Literatur zum II. Abschnitt. . . . .	1376

## III. Abschnitt. Trigonometrische Reihen von endlichem Exponenten.

§ 12. Die Lokalisationssätze und die restringierten F.R. . . . .	1377
A. Lokalisationstheorie. . . . .	1377
B. Restringierte F.R. . . . .	1379
§ 13. Die $C$ -Summierbarkeit der Reihen $U$ und $V$ und das Verhalten der Funktionen $F_T(x)$ . . . . .	1380
§ 14. Konvergenz- und Divergenzerscheinungen bei T.R. . . . .	1383
A. Die Partialsummen . . . . .	1383
B. Die $(C, k)$ -Mittel . . . . .	1383
§ 15. Darstellbarkeit durch eine T.R. Eindeutigkeitssätze . . . . .	1384
Literatur zum III. Abschnitt . . . . .	1387

Anhang . . . . .	1388
------------------	------

A. Das Fouriersche Integral . . . . .	1388
B. Poissonsche Summationsformel . . . . .	1391
C. Fastperiodische Funktionen . . . . .	1392
D. Funktionen mehrerer Veränderlicher und mehrfache T.R. . . . .	1395
Literatur zum Anhang . . . . .	1395
Literatur zum Kapitel XXV . . . . .	1395

## Kapitel XXVI.

### Kugelfunktionen, Besselsche und verwandte Funktionen.

Von *Emil Hilb* in Würzburg.

#### I. Kugelfunktionen.

§ 1. Legendresche Polynome . . . . .	1398
§ 2. Eigenschaften der Legendreschen Polynome . . . . .	1399
§ 3. Ein zweites Integral der Differentialgleichung (13) . . . . .	1402



	Seite
§ 4. Integraldarstellungen für $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ . . . . .	1403
§ 5. Angenäherte Darstellung von $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ für große $n$ . . . . .	1404
§ 6. Entwicklungssätze . . . . .	1405
§ 7. Zugeordnete Funktionen . . . . .	1407
§ 8. Allgemeine Kugelfunktionen . . . . .	1408
§ 9. Oszillationstheoreme . . . . .	1410
§ 10. Kugelfunktionen höherer Ordnung . . . . .	1412
§ 11. Ringfunktionen und Kegelfunktionen . . . . .	1416
§ 12. Lamésche Polynome . . . . .	1417

## II. Besselsche Funktionen.

§ 1. Differentialgleichung der Besselschen Funktionen . . . . .	1420
§ 2. Rekursionsformeln . . . . .	1423
§ 3. Transformationen der Differentialgleichung (5) . . . . .	1424
§ 4. Integraldarstellungen der Besselschen Funktionen . . . . .	1425
§ 5. Asymptotische Darstellungen . . . . .	1432
§ 6. Nullstellen der Besselschen Funktionen . . . . .	1437
§ 7. Additionstheoreme . . . . .	1438
§ 8. Funktionen, welche in der Theorie der Besselschen Funktionen auftreten . . . . .	1440
§ 9. Entwicklungen nach Besselschen Funktionen . . . . .	1443
§ 10. Bestimmte Integrale mit Besselschen Funktionen . . . . .	1448

## III. Funktionen des elliptischen und parabolischen Zylinders. Orthogonale Polynome.

§ 1. Funktionen des elliptischen Zylinders . . . . .	1449
§ 2. Funktionen des parabolischen Zylinders als Spezialfall allgemeinerer Funktionen . . . . .	1450
§ 3. Darstellung verschiedener Funktionen durch $W_{x, \mu}(x)$ . . . . .	1455
§ 4. Orthogonale Polynome. . . . .	1456

## Kapitel XXVII.

### Zahlentheorie.

Von *Erich Bessel-Hagen* in Bonn.

§ 1. Historisches. Vorbemerkungen . . . . .	1458
§ 2. Der Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfaktoren . . . . .	1463
§ 3. Allgemeinere Grundbegriffe . . . . .	1467
§ 4. Kongruenzen . . . . .	1475
§ 5. Lineare Kongruenzen . . . . .	1483
§ 6. Höhere Kongruenzen (Allgemeines). . . . .	1487
§ 7. Spezielle höhere Kongruenzen. . . . .	1494
§ 8. Quadratische Reste . . . . .	1497
§ 9. Zahlentheoretische Funktionen. (Allgemeines über die Probleme und Methoden) . . . . .	1514
§ 10. Die Eulersche Funktion $\varphi(n)$ . . . . .	1517
§ 11. Die Möbiussche Funktion $\mu(n)$ . . . . .	1519
§ 12. Anzahl und Summe der Potenzen der Teiler einer natürlichen Zahl . . . . .	1520
§ 13. Theorie der Primzahlen . . . . .	1524

	Seite
§ 14. Aus Einheitswurzeln zusammengesetzte Ausdrücke, insbesondere Charaktere (mod. $m$ ) und Gaußsche Summen .	1529
§ 15. Die Funktion $[x]$ . . . . .	1537
§ 16. Additive Zahlentheorie (ausschließlich der Zerfällung in Quadrate). . . . .	1539
§ 17. Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Quadraten	1550
§ 18. Rekurrente Zahlenreihen . . . . .	1561
§ 19. Vollkommene und befreundete Zahlen . . . . .	1569
Literaturverzeichnis . . . . .	1572
Namen- und Sachregister. . . . .	1575

## Kapitel XX.

### Neuere Theorie der reellen Funktionen.<sup>1)</sup>

Von *Erich Kamke* in Tübingen.

Mit 8 Figuren.

---

#### § 1. Grundlagen aus der Mengenlehre.

Nach G. Cantor (*Math. Ann.* **46** (1895) 481), dem Schöpfer der Mengenlehre, sei hier als Menge  $\mathfrak{M}$  bezeichnet „eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von  $\mathfrak{M}$  genannt werden) zu einem Ganzen“. Die Elemente einer Menge werden insbesondere Zahlen, Punkte einer Geraden, Punkte einer Ebene usw. oder Intervalle, Flächenstücke usw. sein. Über die gegen diese Definition bestehenden Bedenken vgl. etwa<sup>2)</sup> Fraenkel (8), § 12.

Bezüglich der Einteilung von Mengen in endliche und unendliche, sowie der unendlichen Mengen in abzählbare und nichtabzählbare, sei auf *Rep.* **I**<sub>1</sub>, S. 18—20 verwiesen. Zu den endlichen und unendlichen Mengen wird hinzugefügt eine sog. „uneigentliche Menge“, die Menge „Null“, die kein Element enthält, d. h. „leer“ ist.

Für den Begriff der Teilmenge oder Untermenge einer Menge  $\mathfrak{M}$  vgl. *Rep.* **I**<sub>1</sub>, S. 17. Es sei  $\mathfrak{N}$  eine Untermenge der Menge  $\mathfrak{M}$ ; die Elemente von  $\mathfrak{M}$ , die nicht zu der Untermenge  $\mathfrak{N}$  gehören, bilden die zu  $\mathfrak{N}$  gehörige Restmenge  $\mathfrak{R}$  von  $\mathfrak{M}$

---

1) Bei dem Charakter dieses Kapitels als einer Fortführung der Kap. I, VII und VIII der vor nunmehr 17 Jahren erschienenen ersten Hälfte dieses Bandes haben sich sowohl Verweisungen (im Interesse der Kürze) auf jene Abschnitte wie auch Wiederholungen (im Interesse der Lesbarkeit) nicht immer vermeiden lassen.

2) Bei Zitaten von Schriften, die in Buchform erschienen sind, ist die Nummer hinter dem Autorennamen die Nummer des Literaturverzeichnisses auf S. 1094.

oder die zu  $\mathfrak{M}$  komplementäre Menge von  $\mathfrak{M}$ , in Zeichen:  $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}$ .

Unter der Vereinigungsmenge oder Summe  $\mathfrak{S}$  von endlich vielen oder unendlich vielen Mengen versteht man die Menge derjenigen Elemente, die *mindestens einer* der Mengen angehören. Die Vereinigungsmenge von höchstens abzählbar vielen Mengen  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$  schreibt man in der Gestalt

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{S} = \sum \mathfrak{M}_i$$

oder nach Carathéodory (5):  $\mathfrak{S} = \mathfrak{M}_1 \dot{+} \mathfrak{M}_2 \dot{+} \dots$ .

Unter dem Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  von endlich vielen oder unendlich vielen Mengen versteht man die Menge derjenigen Elemente, die *jeder* jener Mengen angehören. Den Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  von höchstens abzählbar vielen Mengen  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$  schreibt man in der Gestalt

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 \cdot \dots$$

Die Schreibweise des Durchschnitts als ein „Produkt“ bietet den Vorteil, daß sich dann für „Summe“ und „Produkt“ von Mengen ähnliche Rechenregeln ergeben wie für Summe und Produkt von Zahlen, z. B.  $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_1$ ,  $(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) \cdot \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3$ .

*Die Summe von höchstens abzählbar vielen Mengen, deren jede höchstens abzählbar ist, ist ebenfalls höchstens abzählbar.*

Für eine Orientierung über die allgemeine Mengenlehre vgl. *Rep. I*<sub>1</sub>, Kap. I, §§ 5—7. Ferner seien neben den sehr instruktiven Originalarbeiten von G. Cantor (*Math. Ann.* **15** (1879), **17** (1880), **20** (1882), **21** (1883), **23** (1884), **46** (1895), **49** (1897)) genannt die *Encykl.* (1) sowie die Schriften von Hausdorff (10), Schoenflies (18), Schoenflies-Hahn (19) und für eine erste Einführung vor allem Fraenkel (8).

Die Klassifizierung der Mengen in endliche, abzählbare und nichtabzählbare ist gewissermaßen eine Einteilung der Mengen nach der *Anzahl* ihrer Elemente (für weitere Unterteilungen insbesondere der nichtabzählbaren Mengen vgl. *Rep. I*<sub>1</sub>, Kap. I, §§ 5—7). Für die Theorie der Punktmengen, d. h. derjenigen Mengen, deren Elemente Punkte sind, sind von weit größerer Bedeutung Klassifizierungen, welche die *Lage* der Punkte berücksichtigen. Wir beschränken uns hier auf Mengen, deren Punkte entweder sämtlich auf einer Geraden oder in einer Ebene liegen (lineare bzw. ebene Mengen). Die im folgenden

für ebene Mengen angeführten Tatsachen gelten *mutatis mutandis* auch für Mengen höherer Dimensionen.

$P(x, y)$  soll den Punkt  $P$  bezeichnen, dessen rechtwinklige Koordinaten  $x, y$  sind;  $P(x)$  bezeichnet den durch die Abszisse  $x$  festgelegten Punkt der  $x$ -Achse. Nach G. Kowalewski (Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Leipzig und Berlin 1909) bezeichnet  $\langle a, b \rangle$  das abgeschlossene Intervall  $a \leq x \leq b$  und  $(a, b)$  das offene Intervall  $a < x < b$ . Entsprechend heißt ein Kreis oder Rechteck abgeschlossen bzw. offen, je nachdem *alle* Punkte bzw. *kein* Punkt des Randes mitgerechnet wird. Unter der Entfernung  $\overline{P_1 P_2}$  zweier Punkte  $P_1(x_1)$  und  $P_2(x_2)$  bzw.  $P_1(x_1, y_1)$  und  $P_2(x_2, y_2)$  versteht man  $|x_2 - x_1|$  bzw.  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ . Unter einer  $\varepsilon$ -Umgebung oder kurz einer Umgebung eines Punktes  $P_0(x_0)$  bzw.  $P_0(x_0, y_0)$  versteht man das offene Intervall  $|x - x_0| < \varepsilon$  bzw. den offenen Kreis  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$ .

Von zwei Mengen  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  sagt man, sie hätten die Entfernung oder den Abstand  $l$ , wenn jeder Punkt der Menge  $\mathfrak{M}$  von jedem Punkt der Menge  $\mathfrak{N}$  eine Entfernung  $\geq l$  hat und wenn es für jedes  $\delta > 0$  mindestens einen Punkt  $P$  von  $\mathfrak{M}$  und einen Punkt  $Q$  von  $\mathfrak{N}$  gibt, so daß  $\overline{PQ} < l + \delta$  ist.

Eine lineare (ebene) Menge heißt beschränkt, wenn es ein Intervall (einen Kreis) gibt, dem sie ganz angehört.

Ein Punkt  $P_0$  einer Menge  $\mathfrak{M}$  wird isoliert genannt, wenn er eine Umgebung besitzt, in der außer  $P_0$  kein Punkt von  $\mathfrak{M}$  liegt. Z. B. ist bei der Menge  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  (gemeint ist hiermit die Menge der Punkte der  $x$ -Achse, welche die Abszissen  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  besitzen) jeder Punkt  $\frac{1}{n}$  ein isolierter Punkt der Menge.

Ein Punkt  $P_0$  heißt Häufungspunkt einer Menge  $\mathfrak{M}$ , wenn in jeder Umgebung von  $P_0$  unendlich viele Punkte von  $\mathfrak{M}$  liegen oder, was dasselbe ist, wenn in jeder Umgebung von  $P_0$  mindestens ein nicht mit  $P_0$  zusammenfallender Punkt von  $\mathfrak{M}$  liegt. (Vgl. auch *Rep.* I<sub>1</sub>, S. 27; zu beachten ist jedoch, daß die Bezeichnung „Verdichtungspunkt“ nicht mehr als Synonym mit „Häufungspunkt“ gebraucht wird.) Über die Existenz von Häufungspunkten vgl. *Rep.* a. a. O. (Satz von Bolzano-Weierstraß).

Der Begriff des Häufungspunktes kann folgendermaßen verschärft werden: Ein Punkt  $P_0$  heißt nach E. Lindelöf (*C. R.*



**137** (1903) 699; *Acta Math.* **29** (1905) 184) Verdichtungspunkt oder Kondensationspunkt einer Menge  $\mathfrak{M}$ , wenn in jeder Umgebung von  $P_0$  nichtabzählbar viele Punkte von  $\mathfrak{M}$  liegen. *Jede nichtabzählbare Menge hat nichtabzählbar viele Verdichtungspunkte, auch wenn sie nicht beschränkt ist; der Menge selber gehören stets Verdichtungspunkte an.*

Für den Begriff der Ableitung einer Menge vgl. *Rep.* **I**<sub>1</sub>, S. 28f. Die Abzählbarkeit einer Menge läßt keinen Schluß auf die Abzählbarkeit ihrer Ableitung zu; aber umgekehrt *aus der Abzählbarkeit einer Ableitung  $\mathfrak{M}^{(v)}$  einer Menge  $\mathfrak{M}$  folgt, daß  $\mathfrak{M}$  selber abzählbar ist.*

Zwischen einer Menge  $\mathfrak{M}$  und ihrer Ableitung  $\mathfrak{M}'$  können u. a. folgende Beziehungen bestehen:

- a)  $\mathfrak{M}'$  ist eine Untermenge von  $\mathfrak{M}$ ;
- b)  $\mathfrak{M}$  ist eine Untermenge von  $\mathfrak{M}'$ .

Im ersten Fall heißt  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen, im zweiten Fall in sich dicht.  $\mathfrak{M}$  heißt perfekt, wenn  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$  und nicht Nullmenge ist. Jede endliche Menge ist hiernach abgeschlossen, aber nicht in sich dicht und daher auch nicht perfekt. Ob man die Nullmenge und eine ganze unbegrenzte Gerade abgeschlossen nennt, ist mehr oder minder Geschmackssache. Die singulären Punkte einer eindeutigen analytischen Funktion bilden z. B. eine abgeschlossene Menge.

Die Vereinigungsmenge einer Menge  $\mathfrak{M}$  und ihrer Häufungspunkte wird nach C. Carathéodory (5), S. 57 die abgeschlossene Hülle von  $\mathfrak{M}$  genannt. *Die abgeschlossene Hülle einer Punktmenge  $\mathfrak{M}$  ist die kleinste abgeschlossene Punktmenge, die  $\mathfrak{M}$  als Untermenge enthält.*

Eine lineare (ebene) Menge  $\mathfrak{M}$  heißt in einem Intervall (Kreis oder Rechteck) dicht oder überall dicht, wenn in jedem noch so kleinen Teil jenes Intervalls (Kreises oder Rechtecks) unendlich viele Punkte von  $\mathfrak{M}$  liegen; sie heißt in einem Intervall (Kreis, Rechteck) nirgends dicht, wenn sie in keinem noch so kleinen Teil jenes Bereiches dicht ist, d. h. wenn jeder noch so kleine Teil jenes Bereiches seinerseits einen Teil besitzt, in dem kein Punkt von  $\mathfrak{M}$  liegt. Eine nirgends dichte Menge wird z. B. gebildet von den nur mit den Ziffern 0 und 1 geschriebenen echten Dezimalbrüchen, ferner von den nur mit den Ziffern 0 und 2 geschriebenen triadischen Brüchen. *Jede in einem Intervall (Kreis, Rechteck) dichte Menge ist in sich dicht.*

Ein Punkt  $P$  heißt innerer Punkt einer Menge  $\mathfrak{M}$ , wenn er zu  $\mathfrak{M}$  gehört und eine Umgebung besitzt, die nur aus Punkten von  $\mathfrak{M}$  besteht.  $P$  heißt äußerer Punkt in bezug auf  $\mathfrak{M}$ , wenn er nicht zu  $\mathfrak{M}$  gehört und eine Umgebung besitzt, deren Punkte sämtlich nicht zu  $\mathfrak{M}$  gehören.  $P$  heißt Grenzpunkt oder Begrenzungspunkt oder Randpunkt von  $\mathfrak{M}$ , wenn in jeder Umgebung von  $P$  sowohl mindestens ein zu  $\mathfrak{M}$  gehörender wie ein nicht zu  $\mathfrak{M}$  gehörender Punkt von  $\mathfrak{M}$  liegt (darüber, ob  $P$  selber zu  $\mathfrak{M}$  gehört oder nicht, wird nichts ausgesagt). Für die Menge aller Punkte der Ebene mit rationalen Koordinaten ist z. B. jeder Punkt der Ebene Grenzpunkt. Der Begriff des inneren Punktes und des Grenzpunktes ist wesentlich von der Dimensionszahl des zugrunde gelegten Bereiches abhängig. Das Intervall  $a < x < b$  besteht z. B. im Bereiche der linearen Mengen nur aus inneren Punkten, im Bereiche der ebenen Mengen dagegen nur aus Grenzpunkten. *Für jede Menge ist die Menge ihrer Randpunkte abgeschlossen.*

Da die Häufungspunkte einer Menge nur innere Punkte oder Grenzpunkte sein können, kann man auch sagen, daß eine nicht-leere abgeschlossene Menge eine solche ist, die ihre Grenzpunkte enthält. Eine Menge, die keinen ihrer Grenzpunkte enthält, also nur aus inneren Punkten besteht, wird offen genannt. Während eine *abgeschlossene* lineare Menge, auch als ebene Menge betrachtet, abgeschlossen ist, ist eine *offene* lineare Menge, als ebene Menge betrachtet, nicht offen.

*Die Summe von beliebig vielen und der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen oder Nullmenge. Der Durchschnitt von beliebig vielen und die Summe von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen oder Nullmenge.*

*Ist  $\mathfrak{M}$  offen und  $\mathfrak{N}$  eine abgeschlossene Untermenge von  $\mathfrak{M}$ , so ist  $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$  offen. Ist  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen und  $\mathfrak{N}$  eine offene Untermenge von  $\mathfrak{M}$ , so ist  $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$  abgeschlossen.*

Die Begriffe der offenen, abgeschlossenen, dichten usw. Mengen sind noch verallgemeinert worden, indem die Mengen in ihrer Beziehung zu andern Mengen betrachtet werden. Es entstehen so Relativbegriffe und eine Relativtheorie. In systematischer Weise ist das von Hausdorff ((10), S. 240 ff.) durchgeführt. Vgl. auch de la Vallée Poussin ((21), S. 104 ff.) und Carathéodory ((5), S. 58 ff.). Als Beispiele erwähnen wir: Eine lineare Menge  $\mathfrak{U}$  heißt relativ dicht zu einer linearen Menge  $\mathfrak{M}$ , wenn in jeder Umgebung jedes Punktes von  $\mathfrak{M}$  mindestens ein

Punkt von  $\mathfrak{M}$  liegt, d. h. wenn jeder Punkt von  $\mathfrak{M}$  zugleich Punkt von  $\mathfrak{U}$  oder Häufungspunkt von  $\mathfrak{U}$  ist.  $\mathfrak{U}$  heißt zu  $\mathfrak{M}$  relativ nirgends dicht, wenn es ein Intervall  $i$ , so daß  $\mathfrak{U}$  zu dem in  $i$  liegenden Teil von  $\mathfrak{M}$  dicht ist, nicht gibt (Hausdorff a. a. O. S. 249 ff.).

Besondere Wichtigkeit kommt den offenen, abgeschlossenen und perfekten Punktmengen zu. Über ihre Struktur gelten die folgenden Tatsachen:

*Jede Ableitung einer Menge ist abgeschlossen; und jede abgeschlossene Menge kann als Ableitung einer Menge aufgefaßt werden.*

*Die Menge der Verdichtungsunkte jeder nichtabzählbaren Menge ist perfekt; und jede perfekte Menge ist nichtabzählbar und gleich der Menge ihrer Verdichtungsunkte.*

Satz von Cantor-Bendixson: *Es sei  $\mathfrak{M}$  eine abgeschlossene Menge. Ist  $\mathfrak{M}$  abzählbar, so gibt es eine Zahl  $\alpha$  der ersten oder zweiten Zahlklasse, d. h. eine endliche oder der Zahlklasse  $Z(\aleph_0)$  angehörende Zahl  $\alpha$ , so daß  $\mathfrak{M}^{(\alpha)}$  Nullmenge ist;  $\mathfrak{M}$  heißt dann reduzibel. Ist  $\mathfrak{M}$  nichtabzählbar, so gibt es eine Zahl  $\alpha$  der ersten oder zweiten Zahlklasse, so daß  $\mathfrak{M}^{(\alpha)}$  perfekt ist.  $\mathfrak{M}^{(\alpha)}$  heißt der perfekte Kern von  $\mathfrak{M}$ ; es ist weiter  $\mathfrak{R} = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}^{(\alpha)}$  abzählbar und  $\mathfrak{R}$  zu  $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$  elementenfremd (G. Cantor, *Math. Ann.* **21** (1883) 575 und **23** (1884) 459—469; I. Bendixson, *Acta Math.* **2** (1883) 415—429; vgl. auch Schoenflies-Hahn (19), S. 269 ff.). Für einen Teil dieses Satzes siehe auch *Rep. I*, S. 28 f.*

Bemerkenswert ist eine Verallgemeinerung des vorstehenden Satzes durch R. Baire (*Annali di Mat.* (3) **3** (1899) 51 f. und *Lit.-Verz.* **2**, S. 92 f. und 103 ff.): *Es sei jeder Zahl  $\alpha$  der ersten und zweiten Zahlklasse eine im Intervall  $\langle a, b \rangle$  gelegene abgeschlossene Menge  $\mathfrak{M}_\alpha$  zugeordnet, derart, daß für je zwei Zahlen  $\alpha < \beta$  die Menge  $\mathfrak{M}_\beta$  Untermenge von  $\mathfrak{M}_\alpha$  ist; dann gibt es eine Zahl  $\gamma$  der ersten oder zweiten Zahlklasse, so daß  $\mathfrak{M}_\gamma = \mathfrak{M}_{\gamma+1} = \dots$  ist. Kommt außerdem niemals ein isolierter Punkt einer Menge in der folgenden Menge vor, so ist  $\mathfrak{M}_\gamma$  Nullmenge oder perfekt.*

Die Frage nach der Struktur der offenen und abgeschlossenen Mengen läßt sich noch in anderer Weise beantworten, wobei lineare und ebene Mengen zu unterscheiden sind. Zwei Intervalle beliebiger Art mögen getrennt heißen, wenn sie höchstens einen Endpunkt gemeinsam haben. Zwei Rechtecke mögen getrennt heißen, wenn sie höchstens Punkte der Umrandung

gemeinsam haben. Offenbar ist im Bereiche der linearen Mengen jede Menge von endlich oder abzählbar vielen getrennten offenen Intervallen offen. Es gilt aber auch die Umkehrung: *Zu jeder linearen beschränkten offenen Menge  $\mathfrak{M}$  gibt es höchstens abzählbar viele getrennte offene Intervalle  $i_1, i_2, \dots$ , so daß  $\mathfrak{M} = i_1 + i_2 + \dots$  ist, d. h. daß  $\mathfrak{M}$  gerade durch die sämtlichen Punkte dieser Intervalle gebildet wird; die Darstellung ist, abgesehen von der Reihenfolge der Intervalle, eindeutig.* Die offenen linearen Mengen lassen sich jedoch auch mit Hilfe von abgeschlossenen Intervallen darstellen: *Zu jeder linearen beschränkten offenen Menge  $\mathfrak{M}$  gibt es abzählbar viele getrennte abgeschlossene Intervalle  $j_1, j_2, \dots$ , so daß  $\mathfrak{M} = j_1 + j_2 + \dots$  ist; hierbei kann die Eindeutigkeit der Darstellung nicht behauptet werden.*

Auf ebene Mengen läßt sich nur der zweite Satz übertragen: *Jede ebene beschränkte offene Menge  $\mathfrak{M}$  läßt sich als Summe von abzählbar vielen getrennten abgeschlossenen Rechtecken  $r_i$  darstellen:  $\mathfrak{M} = r_1 + r_2 + \dots$ ; die Orientierung kann dabei für alle  $r_i$  übereinstimmend gewählt und willkürlich vorgeschrieben werden.*

Die abgeschlossenen Mengen lassen sich zu den offenen Mengen in einfache Beziehungen bringen. Es gelten die Sätze: *Es sei  $\mathfrak{M}$  eine offene (abgeschlossene) Menge und, falls linear, im abgeschlossenen (offenen) Intervall  $\alpha$ , falls eben, im abgeschlossenen (offenen) Rechteck  $\tau$  gelegen. Dann ist  $\alpha - \mathfrak{M}$  bzw.  $\tau - \mathfrak{M}$  abgeschlossen (offen).* Hieraus folgt insbesondere für lineare Mengen: *Nimmt man aus einem abgeschlossenen Intervall höchstens abzählbar viele getrennte offene Intervalle heraus, so ist die Restmenge abgeschlossen. Jede lineare beschränkte abgeschlossene Menge kann dadurch erhalten werden, daß aus einem offenen Intervall höchstens abzählbar viele getrennte offene Intervalle herausgenommen werden.*

Für perfekte Mengen bestehen bei Beschränkung auf lineare Mengen die Tatsachen: *Nimmt man aus einem abgeschlossenen Intervall eine höchstens abzählbare Menge offener Intervalle heraus, die getrennt liegen und auch paarweise ohne gemeinsame Endpunkte sind, so ist die Restmenge perfekt. Jede lineare beschränkte perfekte Menge kann dadurch erhalten werden, daß aus einem offenen Intervall höchstens abzählbar viele getrennte offene Intervalle ohne gemeinsame Endpunkte herausgenommen werden.*

Die abgeschlossenen und perfekten Mengen können ein Verhalten zeigen, das komplizierter ist, als es nach den vorangehenden Sätzen als möglich erscheinen mag. Denn wenn aus



einem Intervall unendlich viele offene Teilintervalle herausgenommen werden, braucht die Restmenge durchaus nicht immer aus Intervallen zu bestehen. Vielmehr gibt es nirgends dichte perfekte Mengen und daher auch nirgends dichte abgeschlossene Mengen. Beispiele dafür sind die schon erwähnte Menge der nur mit den Ziffern 0 und 1 geschriebenen echten Dezimalbrüche sowie die von G. Cantor (*Math. Ann.* **21** (1883) 590) angegebene Menge der triadischen Brüche

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{a_v}{3^v} \quad \text{mit } a_v = 0 \text{ oder } 2.$$

Letztere Menge kann durch das angegebene Prinzip des Herausnehmens von Intervallen folgendermaßen erzeugt werden: Aus



Fig. 1.

dem abgeschlossenen Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$  wird zunächst (Fig. 1) das mittlere Drittel  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  herausgenommen; aus jedem der restlichen abgeschlossenen Intervalle wieder das mittlere Drittel; usf. Über die Struktur von Mengen dieser Art gilt der Satz: *Jede beschränkte lineare nirgends dichte und abgeschlossene (perfekte) Menge besteht aus den Endpunkten einer abzählbaren Menge getrennter Intervalle (ohne gemeinsame Endpunkte) und aus den Häufungspunkten der Endpunkte.* Da eine perfekte Menge nicht-abzählbar ist, ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, daß eine Menge, die aus den Endpunkten von abzählbar vielen Intervallen und deren Häufungspunkten besteht, nichtabzählbar sein kann. Für die Beweise der in diesem Abschnitt angeführten Tatsachen, die zum größten Teil bereits von G. Cantor (vgl. die auf S. 1026 genannten Abhandlungen) herrühren, und weitergehende Untersuchungen siehe Lit.-Verz. 4, 5, 8—11, 13, 17—22.

## § 2. Der Inhalt von Punktmengen.

Aus der Betrachtung von Punktmengen ergibt sich die Aufgabe, den Begriff der Länge eines Intervalls so zu erweitern, daß er auf eine möglichst umfangreiche Klasse von Punktmengen anwendbar ist. Man wird dabei verlangen, daß folgende drei Postulate erfüllt sind:



A. Der „Inhalt“ (die „Länge“, das „Maß“)  $m(\mathfrak{M})$  einer Menge  $\mathfrak{M}$  ist eine Zahl  $\geq 0$ .

B. Wenn die Menge  $\mathfrak{M}$  Untermenge einer Menge  $\mathfrak{N}$  ist und jede dieser Mengen einen „Inhalt“ („Länge“, „Maß“) besitzt, so ist  $m(\mathfrak{M}) \leq m(\mathfrak{N})$ .

C. Wenn die Mengen  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  keinen Punkt gemeinsam haben und die Mengen  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$  einen „Inhalt“ („Länge“, „Maß“) besitzen, ist

$$m(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) = m(\mathfrak{M}) + m(\mathfrak{N}).$$

Im Bereiche der linearen Mengen wird seit jeher dem abgeschlossenen Intervall  $\langle a, b \rangle$  die „Länge“ oder der „Inhalt“  $b - a$  zugeschrieben. Will man einem einzelnen Punkt und einem Intervall  $a$  mit den Endpunkten  $a$  und  $b$ , gleichgültig ob die Endpunkte zum Intervall gerechnet werden oder nicht, einen „Inhalt“ beilegen, so folgt aus den obigen Postulaten, daß der Punkt den Inhalt 0 und das Intervall den Inhalt  $b - a$  besitzen muß, unabhängig von der Festsetzung, die bezüglich des Mitrechnens der Endpunkte getroffen ist; diese Länge des Intervalls  $a$  wird mit  $|a|$  bezeichnet.

Für eine beliebige lineare beschränkte Menge wird nach G. Peano und C. Jordan der Inhalt so definiert: Man schließe

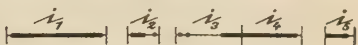


Fig. 2.

die Menge  $\mathfrak{M}$  in eine endliche Menge  $\mathfrak{J}$  von getrennten abgeschlossenen Intervallen  $i_1, \dots, i_h$  ein (Fig. 2); dann ist der äußere Inhalt  $\bar{I}(\mathfrak{M})$  der Menge  $\mathfrak{M}^1)$

$$\bar{I}(\mathfrak{M}) = \text{fin inf} \sum_{v=1}^h |i_v|,$$

wobei zur Konkurrenz alle möglichen Intervallmengen  $\mathfrak{J}$  der bezeichneten Art zugelassen sind.

Ferner sei  $\mathfrak{J}$  eine endliche Menge von getrennten abgeschlossenen



Fig. 3.

Intervallen  $j_1, \dots, j_k$  derart, daß jedes  $j_v$  nur Punkte von  $\mathfrak{M}$  enthält (Fig. 3); dann ist der innere Inhalt  $I(\mathfrak{M})$  von  $\mathfrak{M}$

$$I(\mathfrak{M}) = \text{fin sup} \sum_{v=1}^k |j_v|,$$

<sup>1)</sup> Für die untere bzw. obere Grenze (vgl. S. 34) wird abkürzend geschrieben „fin inf“ (finis inferior) bzw. „fin sup“ (finis superior).

wobei zur Konkurrenz alle Intervallmengen  $\mathfrak{J}$  der bezeichneten Art zugelassen sind. *Offenbar besitzt jede beschränkte Menge  $\mathfrak{M}$  sowohl einen äußeren wie einen inneren Inhalt, und es ist*

$$0 \leq \underline{I}(\mathfrak{M}) \leq \overline{I}(\mathfrak{M}).$$

Wenn der äußere und innere Inhalt einer Menge  $\mathfrak{M}$  übereinstimmen, wird dieser gemeinsame Wert der Menge als ihr Peano-Jordanscher Inhalt  $I(\mathfrak{M})$  zugeschrieben.

Die Definition des Inhalts einer Menge läßt sich auch mit Hilfe des oberen und unteren Integrals im Riemann-Darboux'schen Sinne (vgl. S. 1072f.) folgendermaßen formulieren:

*Es sei  $\mathfrak{M}$  eine beschränkte Menge, die dem Intervall  $\langle a, b \rangle$  angehören mag. Es werde die „Inhaltsfunktion“ oder „fonction caractéristique“ (de la Vallée Poussin (21), S. 7) eingeführt durch*

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{für jedes zu } \mathfrak{M} \text{ gehörige } s; \\ 0 & \text{für jedes nicht zu } \mathfrak{M} \text{ gehörige } s. \end{cases}$$

Dann ist

$$\overline{I}(\mathfrak{M}) = \int_a^b f(s) ds; \quad \underline{I}(\mathfrak{M}) = \int_a^b f(s) ds$$

und

$$I(\mathfrak{M}) = \int_a^b f(s) ds;$$

*der Inhalt schlechthin existiert genau dann, wenn das Riemannsche Integral existiert.*

Aus der Definition ergeben sich ohne weiteres die folgenden Tatsachen:

*Jedes Intervall  $\alpha$ , sei es abgeschlossen oder nicht, hat den Inhalt  $|\alpha|$ .*

*Wenn die beschränkten Mengen  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  einen Inhalt haben, haben auch ihr Durchschnitt  $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}$  sowie ihre Summe  $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$  einen Inhalt, und es ist*

$$I(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) + I(\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}) = I(\mathfrak{M}) + I(\mathfrak{N}),$$

*also, wenn die Mengen speziell ohne gemeinsame Elemente sind,*

$$I(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) = I(\mathfrak{M}) + I(\mathfrak{N}).$$

Wenn  $\mathfrak{N}$  eine Untermenge der beschränkten Menge  $\mathfrak{M}$  ist und beide Mengen einen Inhalt haben, hat auch  $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$  einen Inhalt, und zwar ist

$$I(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) = I(\mathfrak{M}) - I(\mathfrak{N}).$$

Die beiden letzten Sätze zeigen, daß die eingangs aufgestellten Postulate erfüllt sind.

Jede endliche Menge hat den Inhalt 0, ebenso jede unendliche Menge, von der irgendeine Ableitung nur endlich viele Punkte enthält. Eine beliebige abzählbare Menge braucht hingegen überhaupt keinen Inhalt zu besitzen; z. B. hat die Menge aller rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 offenbar den inneren Inhalt 0 und den äußeren Inhalt 1, also keinen Inhalt schlechthin. Wenn aber eine abzählbare Menge einen Inhalt hat, ergibt sich leicht, daß dieser 0 ist. Es gibt auch nichtabzählbare Mengen mit dem Inhalt 0; ein Beispiel für eine solche ist die Cantorsche nirgends dichte perfekte Menge.

Mit Rücksicht auf das später (§ 4) einzuführende „Maß“ einer Menge ist von Interesse, daß für eine Menge  $\mathfrak{M}$ , die einem Intervall  $\alpha$  angehört, stets

$$\underline{I}(\mathfrak{M}) = |\alpha| - \bar{I}(\alpha - \mathfrak{M})$$

ist. Der Inhalt einer Menge  $\mathfrak{M}$  läßt sich also auch in der Weise einführen, daß erst der äußere Inhalt  $\bar{I}$  wie ursprünglich definiert und dann der innere Inhalt  $\underline{I}$  durch obige Relation eingeführt wird. Die Existenz des Inhalts schlechthin besagt dann, daß

$$\bar{I}(\mathfrak{M}) + \bar{I}(\alpha - \mathfrak{M}) = |\alpha|$$

ist, d. h. daß für den äußeren Inhalt von  $\mathfrak{M}$  und ihrem Komplement  $\alpha - \mathfrak{M}$  das Postulat C gilt.

Ist  $\mathfrak{M} = i_1 + i_2 + \dots$  eine beschränkte offene Menge, dargestellt als Summe von höchstens abzählbar vielen getrennten Intervallen, so ist

$$\underline{I}(\mathfrak{M}) = |i_1| + |i_2| + \dots$$

Jede beschränkte Menge  $\mathfrak{M}$  hat denselben äußeren Inhalt wie ihre Ableitung.

Der Inhaltsbegriff kann ohne weiteres auf zwei- und mehrdimensionale Mengen übertragen werden. Die einschließenden Intervalle sind dabei durch Rechtecke bzw. Quader gleicher Orientierung zu ersetzen.

Die oben gegebene Inhaltsdefinition stammt in dieser Formulierung von G. Peano (*Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, Turin 1887, S. 154). Die von C. Jordan (*Journ. de Math.* (4) 8 (1892) 76–79; Lit.-Verz. 12, 2. Aufl., S. 28f.) gegebene Definition ist in der Formulierung ein wenig anders, tatsächlich aber dieselbe. Vor diesen sind Inhaltsdefinitionen bereits aufgestellt worden von O. Stolz (*Math. Ann.* 23 (1884) 152–156) und A. Harnack (*Math. Ann.* 25 (1885) 241–250); das, was diese Autoren als „Inhalt“ einer Punktmenge einführen, ist genau das, was oben als „äußerer Inhalt“ bezeichnet ist. Die in der Form anders lautende Inhaltsdefinition von G. Cantor (*Math. Ann.* 23 (1884) 473–479) läuft faktisch auf dasselbe hinaus. Für zusammenhängende Darstellungen der Inhaltstheorie sei verwiesen auf Hausdorff (10) und Kamke (13).

### § 3. Überdeckungssätze.

In der Theorie der Punktmengen und in der modernen Analysis spielen eine große Rolle einige sog. „Überdeckungssätze“.

Es sei  $\mathfrak{M}$  eine lineare Punktmenge und  $\mathfrak{J}$  eine (endliche, abzählbare oder nichtabzählbare) Menge von (getrennten oder nicht getrennten) Intervallen derart, daß jeder Punkt von  $\mathfrak{M}$  mindestens einem Intervall von  $\mathfrak{J}$  angehört; dann sagen wir: die Intervallmenge  $\mathfrak{J}$  überdeckt die Menge  $\mathfrak{M}$ . Entsprechend sagen wir von einer Menge  $\mathfrak{R}$  von Rechtecken (Kreisen oder dgl.), daß sie eine ebene Menge  $\mathfrak{M}$  überdecke, wenn jeder Punkt von  $\mathfrak{M}$  mindestens einem Rechteck (Kreis oder dgl.) von  $\mathfrak{R}$  angehört.

**Überdeckungssatz von E. Borel:** *Es sei  $\mathfrak{M}$  eine lineare beschränkte abgeschlossene Menge und  $\mathfrak{J}$  eine Menge offener Intervalle, welche die Menge  $\mathfrak{M}$  überdeckt. Dann gibt es eine endliche Teilmenge von  $\mathfrak{J}$ , etwa bestehend aus den Intervallen  $i_1, \dots, i_n$ , welche ebenfalls die ganze Menge  $\mathfrak{M}$  überdeckt.*

Der Satz wird falsch, wenn auch nur eines der beiden ersten gesperrten Wörter fortgelassen wird. Borel hatte den Satz zunächst (Thèse, Paris 1894, S. 43, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) 12 (1895) 51–52; Lit.-Verz. 3, S. 42) weniger weitreichend formuliert, indem die abgeschlossene Menge  $\mathfrak{M}$  ein abgeschlossenes Intervall war (vgl. Rep. I<sub>1</sub>, S. 27). In der obenstehenden allgemeinen Formulierung findet sich der Satz zuerst bei W. H. Young (*Lond. M. S. Proc.* 35 (1903) 387). Für weitere Lite-

raturangaben s. Lit.-Verz. 1, S. 882 ff. Der Grundgedanke des Satzes, vor allem auch seines Beweises, steckt schon in dem Satz von E. Heine, daß eine Funktion, die in einem abgeschlossenen Intervall stetig ist, daselbst gleichmäßig stetig ist. Aus diesem Grunde wird der Satz auch häufig noch Heine-Borelscher Satz genannt.

Für ebene Mengen gilt der entsprechende Satz: *Es sei  $\mathfrak{M}$  eine ebene beschränkte abgeschlossene Menge und  $\mathfrak{R}$  eine  $\mathfrak{M}$  überdeckende Menge offener Rechtecke (Kreise oder dgl.). Dann gibt es eine endliche Teilmenge von  $\mathfrak{R}$ , die ebenfalls  $\mathfrak{M}$  überdeckt.*

Wenn die Menge  $\mathfrak{M}$  nicht abgeschlossen ist, gilt immerhin noch der Überdeckungssatz von E. Lindelöf (*C. R.* **137** (1903) 698; *Acta Math.* **29** (1905) 188; ferner W. H. Young, *Lond. M. S. Proc.* **35** (1903) 384—385): *Es sei  $\mathfrak{M}$  eine beliebige lineare Menge und  $\mathfrak{J}$  eine  $\mathfrak{M}$  überdeckende Menge offener Intervalle; dann gibt es eine höchstens abzählbare Teilmenge von  $\mathfrak{J}$ , welche ebenfalls  $\mathfrak{M}$  überdeckt.* Für ebene Mengen gilt wieder der entsprechende Satz.

Unter gewissen Voraussetzungen kommt man auch bei nicht abgeschlossenen Mengen, wie leicht zu sehen, immer mit endlich vielen überdeckenden Intervallen aus: *Es sei  $\mathfrak{M}$  eine lineare beschränkte Menge; zu jedem Punkt  $P$  von  $\mathfrak{M}$  gehöre ein Intervall  $i$  beliebiger Art, das  $P$  als Mittelpunkt hat und dessen Länge größer als eine feste Zahl  $l > 0$  ist; dann gibt es unter den Intervallen  $i$  endlich viele, die ebenfalls  $\mathfrak{M}$  überdecken* (E. Lindelöf; *Acta Math.* **29** (1905) 187).

Ohne die obige Einschränkung über die Länge der Intervalle, aber bei einer Einschränkung anderer Art gilt der Satz: *Es sei  $\mathfrak{M}$  eine lineare beschränkte Menge und  $\mathfrak{J}$  eine  $\mathfrak{M}$  überdeckende Menge (offener oder nicht offener) Intervalle derart, daß zu jedem Punkt  $P$  von  $\mathfrak{M}$  ein Intervall von  $\mathfrak{J}$  gehört, das  $P$  als Mittelpunkt hat; dann gibt es eine höchstens abzählbare Teilmenge von  $\mathfrak{J}$ , die ebenfalls  $\mathfrak{M}$  überdeckt, und die Intervalle  $i_v$  dieser Teilmenge lassen sich so als Folge schreiben, daß*

$$|i_1| \geq |i_2| \geq |i_3| \geq \dots$$

ist (E. Lindelöf, *C. R.* **137** (1903) 698; *Acta Math.* **29** (1905) 187).

Die beiden letzten Sätze gelten mutatis mutandis ebenfalls für ebene Mengen und, wie alle bisher genannten Überdeckungssätze, auch für Mengen mit drei und mehr Dimensionen (Lindelöf a. a. O.; ferner Carathéodory (5), S. 42 ff.).



Ein weiterer wichtiger Überdeckungssatz wird auf S. 1043 angeführt.

Für die Theorie des Maßes von Punktmengen ist ferner grundlegend der folgende Satz: *Es sei  $i_1, i_2, \dots$  eine Menge von höchstens abzählbar vielen getrennten Intervallen beliebiger Art und  $j_1, j_2, \dots$  eine Menge von höchstens abzählbar vielen (nicht notwendig getrennten) Intervallen beliebiger Art; ferner sei die Menge*

$$\mathfrak{J} = i_1 + i_2 + \dots$$

*der von der ersten Intervallmenge überdeckten Punkte eine Unter-  
menge von*

$$\mathfrak{J} = j_1 + j_2 + \dots$$

*Dann ist im Falle der Konvergenz der rechts stehenden Summe*

$$|i_1| + |i_2| + \dots \leq |j_1| + |j_2| + \dots$$

*Wenn  $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}$  ist und beide Mengen aus getrennten Intervallen bestehen, gilt*

$$\Sigma |i| = \Sigma |j|.$$

(Lit.-Verz. 3, S. 41 ff.; 21, S. 17; 13, S. 32.) Der Satz gilt einschließlich dieser Folgerung auch für Mengen von Rechtecken und Quadern (auch höherer Dimensionen), wobei an Stelle der Längen der Intervalle die üblichen Inhalte der Rechtecke und Quader treten. Das Wesentliche des Satzes liegt darin, daß die Intervallmengen aus *unendlich* vielen Intervallen bestehen dürfen. Für Intervallmengen, die aus *endlich* vielen Intervallen bestehen, ist der Satz trivial; für den Fall endlicher Rechteckmengen liegt ein Beweis vor von E. Schmidt (*Math. Zeitschr.* 12 (1922) 298).

#### § 4. Das Maß von Punktmengen.

Nach den Sätzen von S. 1031 besitzen die offenen Mengen eine verhältnismäßig einfache Struktur, und doch besitzt nicht jede offene Menge einen Inhalt im Peano-Jordanschen Sinne. Es seien z. B.  $r_1, r_2, \dots$  die in irgendeiner Reihenfolge aufgeschriebenen echten Brüche; jedes  $r_n$  werde bei gegebenem  $\varepsilon > 0$  durch ein offenes Intervall der Länge  $2^{-n}\varepsilon$  überdeckt, wobei die über das Intervall  $(0, 1)$  hinausreichenden Teile dieser Intervalle fortgelassen werden sollen. Da jedes dieser Intervalle  $i_n$  offen ist, ist auch ihre Vereinigungsmenge  $\mathfrak{M}$  eine lineare offene Menge,



also als Summe von getrennten offenen Intervallen  $i_1, i_2, \dots$  darstellbar. Daraus folgt

$$\underline{I}(\mathfrak{M}) = \Sigma |i_n| \leq \Sigma |i_n| \leq \varepsilon.$$

Andererseits liegt  $\mathfrak{M}$  im Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$  überall dicht, da dieses schon für die einen Teil von  $\mathfrak{M}$  bildenden echten Brüche zutrifft; daher ist  $\overline{I}(\mathfrak{M}) = 1$ . Die offene Menge  $\mathfrak{M}$  hat also sicher keinen Inhalt, wenn  $\varepsilon < 1$  ist.

Bei offenen Mengen und überhaupt bei Mengen, die sich als Summen von höchstens abzählbar vielen getrennten Intervallen  $i_n$  darstellen lassen, liegt aber eine Erweiterung des Inhaltsbegriffs außerordentlich nahe: man addiere die Längen der Einzelintervalle  $i_n$  und verstehe unter  $\Sigma |i_n|$  den verallgemeinerten Inhalt dieser Mengentypen. Von hier aus kann man auch beliebigen beschränkten Mengen beikommen, indem man (vgl. S. 1033, 1035) für die Definition des verallgemeinerten äußeren Inhalts nicht endlich viele, sondern unendlich viele Intervalle zuläßt. Diese Gedanken führen zu folgenden Definitionen.

Es sei  $\mathfrak{D}$  eine beschränkte lineare offene Menge, also darstellbar als Summe von höchstens abzählbar vielen getrennten Intervallen  $i_v$ :

$$\mathfrak{D} = i_1 + i_2 + \dots$$

Unter dem linearen Maß  $|\mathfrak{D}|$  der offenen Menge  $\mathfrak{D}$  versteht man die (im Falle unendlich vieler  $i_v$  wegen der Beschränktheit von  $\mathfrak{D}$  sicher konvergente) Summe

$$|\mathfrak{D}| = |i_1| + |i_2| + \dots$$

Dieses Maß ist von der speziellen zur Darstellung von  $\mathfrak{D}$  benutzten Intervallmenge nach S. 1031 unabhängig.

Für eine beliebige beschränkte lineare Menge  $\mathfrak{M}$  wird das äußere Maß  $\overline{\mathfrak{M}}$  definiert durch

$$\overline{\mathfrak{M}} = \text{fin inf } |\mathfrak{D}|,$$

wobei für  $\mathfrak{D}$  zur Konkurrenz zugelassen sind alle beschränkten,  $\mathfrak{M}$  überdeckenden offenen Mengen. Das innere Maß  $\underline{\mathfrak{M}}$  von  $\mathfrak{M}$  wird definiert durch (vgl. S. 1035)

$$\underline{\mathfrak{M}} = |a| - \overline{a - \mathfrak{M}},$$

wobei  $a$  ein beliebiges,  $\mathfrak{M}$  enthaltendes Intervall ist; wenn auch dem Wortlaut nach  $\underline{\mathfrak{M}}$  von dem speziellen Intervall  $a$  abhängt, ist, wie sich zeigen läßt, das innere Maß doch faktisch von

diesem unabhängig. Ist  $\mathfrak{M} = \underline{\mathfrak{M}}$ , so heißt die Menge  $\mathfrak{M}$  meßbar, und es wird

$$|\mathfrak{M}| = \overline{\mathfrak{M}} = \underline{\mathfrak{M}}$$

als ihr Maß bezeichnet.

Jede beschränkte offene Menge ist meßbar, und die hier für beliebige Mengen gegebene Definition ihres Maßes liefert dasselbe Maß wie die vorher gegebene Definition.

Jede beschränkte Menge  $\mathfrak{M}$  besitzt sowohl ein äußeres wie ein inneres Maß, und es ist

$$0 \leq I(\mathfrak{M}) \leq \underline{\mathfrak{M}} \leq \overline{\mathfrak{M}} \leq \bar{I}(\mathfrak{M}).$$

Wenn  $\mathfrak{M}$  eine Untermenge der beschränkten Menge  $\mathfrak{N}$  ist, gilt

$$\overline{\mathfrak{M}} \leq \overline{\mathfrak{N}}, \quad \underline{\mathfrak{M}} \leq \underline{\mathfrak{N}},$$

und daher, falls  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  meßbar sind,

$$|\mathfrak{M}| \leq |\mathfrak{N}|.$$

Für je zwei beschränkte Mengen  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  ist

$$\overline{\mathfrak{M} + \mathfrak{N} + \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}} \leq \overline{\mathfrak{M}} + \overline{\mathfrak{N}},$$

$$\underline{\mathfrak{M} + \mathfrak{N} + \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}} \geq \underline{\mathfrak{M}} + \underline{\mathfrak{N}},$$

und daher sind, falls  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  meßbar sind, auch  $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}$  meßbar, und es ist

$$|\mathfrak{M} + \mathfrak{N}| + |\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}| = |\mathfrak{M}| + |\mathfrak{N}|;$$

sind insbesondere  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  ohne gemeinsame Punkte, so ergibt sich

$$|\mathfrak{M} + \mathfrak{N}| = |\mathfrak{M}| + |\mathfrak{N}|.$$

Aus vorstehenden Sätzen folgt, daß das Maß die drei am Anfang von § 2 aufgestellten Postulate erfüllt.

Jede höchstens abzählbare Menge hat das Maß 0.

Die obigen Definitionen lassen sich unmittelbar auf zwei- und mehrdimensionale Mengen übertragen. Bei ebenen Mengen geht man aus von dem Maß des Rechtecks, das mit dem üblichen Flächeninhalt übereinstimmt, und setzt weiter fest, daß jede beschränkte Menge  $\mathfrak{R}$ , die aus höchstens abzählbar vielen getrennten Rechtecken  $\mathfrak{r}_i$  und endlich vielen linearen Mengen besteht, das Maß

$$|\mathfrak{R}| = |\mathfrak{r}_1| + |\mathfrak{r}_2| + \dots$$

haben soll (die endlich vielen linearen Mengen sollen also das ebene Maß nicht beeinflussen). Die übrigen Definitionen und Sätze gelten dann für ebene Mengen mit demselben Wortlaut wie für lineare Mengen, wobei jedoch etwa vorkommende Intervalle durch Rechtecke zu ersetzen sind. Hinzu kommt, daß auch jede ebene Menge, die aus höchstens abzählbar vielen linearen Mengen besteht, das ebene Maß 0 besitzt.

Auch die folgenden Sätze gelten mit dem gleichen Wortlaut sowohl für das lineare Maß wie für das Maß von zwei- und mehrdimensionalen Mengen.

Jede beschränkte abgeschlossene (offene) Menge ist meßbar, und ihr Maß stimmt mit ihrem äußeren (inneren) Inhalt im Peano-Jordanschen Sinne überein.

Wenn für eine Menge  $\mathfrak{M}$  der Peano-Jordansche Inhalt existiert, ist sie meßbar und  $|\mathfrak{M}| = I(\mathfrak{M})$ .

Wenn  $\mathfrak{N}$  eine meßbare Untermenge der meßbaren Menge  $\mathfrak{M}$  ist, ist auch  $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$  meßbar und

$$|\mathfrak{M} - \mathfrak{N}| = |\mathfrak{M}| - |\mathfrak{N}|.$$

Wenn die Mengen  $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$  meßbar sind, ist auch die Summe und der Durchschnitt dieser Mengen meßbar, und es ist

$$|\mathfrak{M}_1 + \dots + \mathfrak{M}_n| \leq |\mathfrak{M}_1| + \dots + |\mathfrak{M}_n|$$

und, falls die  $\mathfrak{M}_\nu$  paarweise elementenfremd sind,

$$|\mathfrak{M}_1 + \dots + \mathfrak{M}_n| = |\mathfrak{M}_1| + \dots + |\mathfrak{M}_n|.$$

Von größter Bedeutung ist nun, daß dieser Satz — was sich bei dem Peano-Jordanschen Inhalt nicht sagen läßt — auch noch für abzählbar viele Mengen gilt:

Hauptsatz: Es seien  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$  abzählbar viele meßbare Mengen. Dann ist auch ihr Durchschnitt  $\mathfrak{D} = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 \cdot \dots$  meßbar und

$$|\mathfrak{D}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{M}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{M}_n|.$$

Wenn die Summe  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots$  beschränkt ist, ist auch  $\mathfrak{M}$  meßbar und, falls die Summe konvergiert,

$$|\mathfrak{M}| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\mathfrak{M}_\nu|;$$

falls überdies die  $\mathfrak{M}_\nu$  paarweise elementenfremd sind, ist

$$|\mathfrak{M}| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\mathfrak{M}_\nu|.$$

Über das äußere und innere Maß gelten entsprechende Sätze:

Es seien  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$  abzählbar viele beschränkte Mengen. Dann ist, wenn  $\mathfrak{D}$  ihren Durchschnitt bezeichnet,

$$\underline{\mathfrak{D}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_n}.$$

Wenn zudem die Summe  $\mathfrak{M}$  der Mengen beschränkt ist, gilt

$$\overline{\mathfrak{M}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathfrak{M}_1 + \dots + \mathfrak{M}_n},$$

insbesondere also, wenn die Reihe konvergiert,

$$\overline{\mathfrak{M}} \leq \overline{\mathfrak{M}_1} + \overline{\mathfrak{M}_2} + \dots$$

Das Folgende möge der Einfachheit halber nur für lineare Mengen formuliert werden.

Es seien  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  zwei beschränkte getrennte Mengen, d. h. es soll sich ein Intervall  $\alpha$  so angeben lassen, daß  $\mathfrak{M}$  ganz in dem abgeschlossenen Intervall  $\alpha$  liegt und  $\mathfrak{N}$  keinen Punkt in dem offenen Intervall  $\alpha$  hat; dann ist

$$\overline{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}} = \overline{\mathfrak{M}} + \overline{\mathfrak{N}}; \quad \underline{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}} = \underline{\mathfrak{M}} + \underline{\mathfrak{N}}.$$

Es gibt nichtabzählbare Mengen, die das Maß 0 haben und deren Verdichtungspunkte das ganze Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$  erfüllen (Carathéodory (5), S. 286).

Die Frage, ob jede beschränkte Menge meßbar ist, ist zu verneinen. Um eine nichtmeßbare Menge zu konstruieren, geht G. Vitali von einer Zahl  $\xi$  aus, die irrational oder 0 ist und bildet die abzählbare Menge  $\mathfrak{M}(\xi)$  aller Zahlen  $\xi + r$ , wo  $r$  bei festem  $\xi$  alle rationalen Zahlen durchläuft. Indem man nun die Mengen  $\mathfrak{M}(\xi)$  für alle Zahlen  $\xi$  bildet, die irrational oder 0 sind, erhält man u. a. auch Mengen, die übereinstimmen, nämlich dann, wenn die erzeugenden Zahlen  $\xi$  eine rationale Differenz haben. Aus jeder der wirklich verschiedenen Mengen  $\mathfrak{M}(\xi)$  wird eine Zahl  $\eta = \eta(\xi)$  zwischen 0 und 1 ausgewählt. Von der Gesamtheit  $\mathfrak{N}$  dieser Zahlen  $\eta$  läßt sich dann zeigen, daß sie nicht meßbar ist. Man vgl. hierzu *Encykl.* (1), S. 977—978.

Für die Meßbarkeit einer beschränkten Menge  $\mathfrak{M}$  ist notwendig und hinreichend, daß  $\mathfrak{M}$  sich als Summe von höchstens abzählbar vielen perfekten Mengen und einer Menge vom Maß 0 darstellen läßt. Ein anderes Meßbarkeitskriterium lautet: Es sei  $\mathfrak{M}$  eine beschränkte Menge, etwa im offenen Intervall  $a$  gelegen, und  $\mathfrak{N}$  die Komplementärmenge; für die Meßbarkeit von  $\mathfrak{M}$  (und  $\mathfrak{N}$ ) ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  offene Mengen  $\mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{Z}$  gibt, die  $\mathfrak{M}$  bzw.  $\mathfrak{N}$  überdecken und für die

$$|\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{Z}| < \varepsilon$$

ist. Da  $\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{Z}$  eine offene Menge ist, und deren Maß unabhängig vom Maß beliebiger Mengen eingeführt ist, liegt hierbei kein Zirkel vor.

Von großer Bedeutung ist der Überdeckungssatz von G. Vitali (*Torino Atti* **43** (1907—1908) 229—236; vgl. auch Kamke (13) S. 68—70 und, zugleich für Verallgemeinerungen, Carathéodory (5), S. 299 ff.): Es sei  $\mathfrak{M}$  eine beschränkte Menge und ihr äußeres Maß  $\overline{\mathfrak{M}} > 0$ . Zu jedem Punkt  $P$  der Menge  $\mathfrak{M}$  sei eine Folge von abgeschlossenen Intervallen  $i_1(P), i_2(P), \dots$  vorhanden derart, daß

$$\lim_{v \rightarrow \infty} |i_v| = 0$$

ist. Dann gibt es zu jedem  $0 < \varepsilon < 1$  unter den sämtlichen der Menge  $\mathfrak{M}$  zugeordneten Intervallen  $i$  endlich viele getrennte Intervalle, etwa  $i_1, \dots, i_n$ , so daß

$$\overline{\mathfrak{M} - \mathfrak{M} \cdot (i_1 + \dots + i_n)} < \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}$$

und

$$\overline{\mathfrak{M} \cdot (i_1 + \dots + i_n)} > (1 - \varepsilon) \overline{\mathfrak{M}} \quad \text{ist.}$$

Der entscheidende Schritt bei der Ausgestaltung der Inhaltstheorie zur hier auseinandergesetzten Theorie des Maßes ist von E. Borel ((3), S. 46 ff.) im Jahre 1898 getan. Borel definiert das lineare Maß für einen Punkt (nämlich 0) und eine Strecke (nämlich Länge der Strecke), sodann für alle Mengen, die sich durch eine Folge von höchstens abzählbar vielen Additionen von elementenfremden dieser Mengen und höchstens abzählbar vielen Subtraktionen dieser Mengen aufbauen lassen; sodann für alle Mengen, die sich aus den bisher erhaltenen durch die genannten Operationen herstellen lassen. Indem er so fortfährt, kann er zu immer komplizierteren Mengen gelangen. Das Maß wird dabei so definiert, daß mit den Mengen sich auch ihre Maßzahlen addieren und subtrahieren. Unter den auf diese Weise erhaltenen



sog. Borelschen Mengen befinden sich z. B. die offenen und die abgeschlossenen Mengen. H. Lebesgue (*Intégrale, Longueur, Aire. Thèse = Annali di Mat.* (3) **7** (1902), S. 231 ff.) hat die Definitionen so ausgestaltet, daß sie auf umfassendere Klassen von Mengen anwendbar sind. Unabhängig von Lebesgue, wenn auch zeitlich nach ihm, sind G. Vitali (*Lomb. Ist. Rend.* (2) **37** (1904), S. 69 ff.; *Palermo Rend.* **18** (1904), S. 116 ff.) und W. H. Young (*Lond. M. S. Proc.* (2) **2** (1904), S. 16 ff.) zu einer auf dasselbe hinauslaufenden Definition des Maßes gelangt. Young benutzt folgenden Zusammenhang zur Definition des äußeren und inneren Maßes: *Es ist*

$\overline{\mathfrak{M}} = \text{fin inf } \underline{I}(\mathfrak{J})$ , wo  $\mathfrak{J}$  eine beliebige,  $\mathfrak{M}$  überdeckende offene Menge bedeutet;

$\underline{\mathfrak{M}} = \text{fin sup } \overline{I}(\mathfrak{S})$ , wo  $\mathfrak{S}$  eine beliebige abgeschlossene Unter-  
menge von  $\mathfrak{M}$  bedeutet.

Für die Darstellung der Theorie seien vor allem genannt die oben erwähnte Abhandlung von Lebesgue, ferner Lit.-Verz. 10, 11, 13—15, 20—22.

Für die Ausdehnung der Maßtheorie auf nichtbeschränkte Mengen vgl. W. H. Young, a. a. O. und Lit.-Verz. 22; G. Vitali, a. a. O.; H. Lebesgue, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **27** (1910), S. 378 f.; W. Alexandrow, *Elementare Grundlagen für die Theorie des Maßes*, Diss. Zürich 1915.

Von F. Hausdorff ((10), S. 415) rührt der Begriff der relativ-meßbaren Menge her. Es sei  $\mathfrak{A}$  eine beliebige Menge; dann heißt eine Menge  $\mathfrak{M}$  über  $\mathfrak{A}$  relativ-meßbar, wenn  $\mathfrak{M}$  als Durchschnitt von  $\mathfrak{A}$  mit einer meßbaren Menge dargestellt werden kann, etwa  $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{N}$ , wo  $\mathfrak{N}$  meßbar ist. Es gilt dann

$$\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{M}} + \overline{\mathfrak{A} - \mathfrak{M}}, \quad \underline{\mathfrak{A}} = \underline{\mathfrak{M}} + \underline{\mathfrak{A} - \mathfrak{M}}.$$

Ist  $\mathfrak{A}$  speziell ein Intervall, so besagen diese Relationen, daß  $\mathfrak{M}$  meßbar schlechthin ist.

Auch für die relativ-meßbaren Mengen gelten Summensätze in der von den meßbaren Mengen her bekannten weittragenden Form: *Wenn die beliebige Menge  $\mathfrak{A}$  in höchstens abzählbar viele elementenfremde, über  $\mathfrak{A}$  relativ meßbare Mengen  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$  zerlegt ist, gilt*

$$\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{M}_1} + \overline{\mathfrak{M}_2} + \dots, \quad \underline{\mathfrak{A}} = \underline{\mathfrak{M}_1} + \underline{\mathfrak{M}_2} + \dots.$$

Noch weiter ist C. Carathéodory (*Gött. Nachr.* 1914, S. 404 bis 420; Lit.-Verz. 5, Kap. V; vgl. auch Hahn (9), S. 424ff.) bei der Verallgemeinerung des Maßes gegangen und hat dadurch die definitivische Vollendung der Theorie erreicht. Carathéodory geht davon aus, daß das äußere Lebesguesche Maß  $\overline{\mathfrak{M}}$  einer (etwa linearen) Menge  $\mathfrak{M}$  eine durch die Menge bestimmte Zahl, also eine Funktion der Menge  $\mathfrak{M}$  ist, und untersucht solche Mengenfunktionen, die eine gewisse Anzahl von Forderungen erfüllen, die man an die Mengenfunktion zu stellen haben wird, wenn sie als äußeres Maß der Menge in sehr weitem Sinne zu bezeichnen ist. Die von Carathéodory für eine derartige von ihm als Maßfunktion oder äußeres Maß  $\mu^*(\mathfrak{M})$  bezeichnete Mengenfunktion aufgestellten Postulate lauten:

I. Jeder beliebigen Punktmenge  $\mathfrak{M}$  ist eine Zahl  $\mu^*(\mathfrak{M})$  zugeordnet. Diese ist entweder 0 oder endlich und positiv oder  $+\infty$ . Es gibt Punktmengen, für welche diese Zahl  $\neq 0$  und endlich ist; für leere Mengen ist sie gleich 0.

II. Für eine Teilmenge  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{M}$  ist stets  $\mu^*(\mathfrak{N}) \leq \mu^*(\mathfrak{M})$ .

III. Ist  $\mathfrak{M}$  die Vereinigungsmenge einer Folge von endlich oder abzählbar vielen Mengen  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$ , so ist stets

$$\mu^*(\mathfrak{M}) \leq \mu^*(\mathfrak{M}_1) + \mu^*(\mathfrak{M}_2) + \dots$$

IV. Haben die Mengen  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  eine Entfernung  $l > 0$ , so ist

$$\mu^*(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) = \mu^*(\mathfrak{M}) + \mu^*(\mathfrak{N}).$$

Das äußere Lebesguesche Maß ist nach dem Vorangehenden eine Maßfunktion, welche diese Postulate erfüllt.

Es sei nun eine Maßfunktion  $\mu^*$  fest gegeben, d. h. eine Mengenfunktion, die für jede beliebige Menge definiert ist und die Postulate I—IV erfüllt. In bezug auf diese fest gegebene Maßfunktion nennt Carathéodory eine Menge  $\mathfrak{M}$  meßbar, wenn für jede willkürliche Punktmenge  $\mathfrak{A}$ , für die  $\mu^*(\mathfrak{A})$  endlich ist,

$$\mu^*(\mathfrak{A}) = \mu^*(\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{A}) + \mu^*(\mathfrak{A} - \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{A})$$

gilt. Die Meßbarkeit einer Punktmenge wird hiernach ein relativer Begriff, der von der zugrunde gelegten Maßfunktion abhängt. Ist  $\mu^*$  speziell das äußere Lebesguesche Maß und  $\mathfrak{A}$  ein die Menge enthaltendes Intervall, so besagt die obige Relation gerade, daß  $\mathfrak{M}$  im Lebesgueschen Sinne meßbar ist; aber die Forderung Carathéodorys postuliert auch nicht mehr, da aus den für jede beliebige Menge  $\mathfrak{A}$  geltenden Hausdorffschen

Relationen die obige Relation für jede Menge  $\mathfrak{A}$  folgt, falls  $\mathfrak{M}$  im Lebesgueschen Sinne meßbar ist.

*Für jede Maßfunktion sind alle Borelschen Mengen meßbar.*

Ferner gelten für diesen sehr allgemeinen Meßbarkeitsbegriff wieder die wichtigsten der für das Lebesguesche Maß angeführten Tatsachen, so insbesondere: *Der Durchschnitt und die Summe von höchstens abzählbar vielen meßbaren Mengen ist meßbar; sind die Mengen überdies elementenfremd, so ist das Maß der Summe der Mengen gleich der Summe der Maße der Mengen.*

Für die Anwendung der Maßtheorie zur Bestimmung von Kurvenlängen und Oberflächen und allgemein für eine Theorie des  $m$ -dimensionalen Maßes im  $n$ -dimensionalen Raum siehe *Encykl.* (1), S. 994ff.

## § 5. Der Begriff der reellen Funktion und des Limes.

Nach G. Lejeune Dirichlet (vgl. Rep. **I**<sub>1</sub>, S. 9) sagt man, es sei im Intervall  $a \leq x \leq b$  eine Funktion  $y = f(x)$  definiert, wenn jedem  $x$  des Intervalls eine wohlbestimmte Zahl  $y$  zugeordnet ist. In der Theorie der reellen Funktionen ist es vielfach nötig, diesen Funktionsbegriff nach zwei Richtungen zu verallgemeinern.

Erstens braucht die Funktion nicht immer für ein ganzes Intervall definiert zu sein, sondern nur für diejenigen  $x$ , die einer gegebenen Punktmenge  $\mathfrak{P}$  angehören. Man nennt dann auch wohl  $f(x)$  eine Punktfunktion über oder auf der Menge  $\mathfrak{P}$  und die Menge  $\mathfrak{P}$  den Definitionsbereich der Funktion.

Zweitens werden für den Funktionswert  $f(x)$  auch die Symbole oder „uneigentlichen Zahlen“  $+\infty$  (auch kurz  $\infty$  geschrieben) und  $-\infty$  zugelassen.<sup>1)</sup> Diese Symbole oder Zahlen sollen folgenden Rechengesetzen genügen oder, axiomatisch gesprochen, sie werden durch folgende Postulate eingeführt:

$$1. \quad +\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \\ +(+\infty) = -(-\infty) = +\infty, \quad +(-\infty) = -(+\infty) = -\infty.$$

2. Für jede endliche Zahl  $a$  ist

$$a + \infty = +\infty + a = +\infty, \quad a - \infty = -\infty + a = -\infty, \\ -\infty < a < +\infty.$$

<sup>1)</sup> Hier also zwei uneigentliche Zahlen im Gegensatz zur Theorie der komplexen Funktionen mit der einen uneigentlichen Zahl  $\infty$ .

3. Für jede Zahl  $a \neq 0$  ( $a$  darf also auch  $+\infty$  oder  $-\infty$  sein) ist

$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = [\operatorname{sgn} a] \infty,$$

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -[\operatorname{sgn} a] \infty;$$

dabei bedeutet  $[\operatorname{sgn} a]$  das Vorzeichen von  $a$  für  $a \neq 0$ .

4. Für jede endliche Zahl  $a$  ist

$$\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0,$$

und für jede endliche Zahl  $a \neq 0$

$$\frac{+\infty}{a} = [\operatorname{sgn} a] \infty, \quad \frac{-\infty}{a} = -[\operatorname{sgn} a] \infty.$$

5. Von einer Folge  $a_1, a_2, a_3, \dots$  wird gesagt, sie habe den Limes  $+\infty$  bzw.  $-\infty$ , wenn für jedes endliche  $\alpha$  von einem gewissen Index  $n = n(\alpha)$  an  $a_n > \alpha$  bzw.  $a_n < \alpha$  ist.

Die Operationen  $+\infty - \infty$ ,  $-\infty + \infty$ ,  $\frac{a}{0}$ ,  $\frac{\pm\infty}{0}$ ,  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  werden nicht definiert und sind daher als sinnlos anzusehen.

Bei Verwendung dieser Symbole und des auf S. 32 eingeführten Limesbegriffs ist also z. B.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty;$$

$$f'(0) = +\infty, \quad \text{wenn } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{ist.}$$

Für die unabhängige Veränderliche  $x$  werden die Zahlen  $-\infty$  und  $+\infty$  nicht zugelassen werden, sondern höchstens für die Funktion  $f(x)$ . Wenn eine Funktion  $f(x)$  in ihrem Definitionsbereich nicht die Werte  $-\infty$  oder  $+\infty$  annimmt, d. h. wenn  $|f(x)| < \infty$  ist, wird  $f(x)$  eine endliche Funktion genannt. Die Funktion  $f(x)$  heißt in ihrem Definitionsbereich beschränkt, wenn es eine endliche Zahl  $A > 0$  gibt, so daß  $|f(x)| < A$  ist.

Von Wichtigkeit sind folgende auf P. du Bois-Reymond (*Freiburger Antrittsprogramm* 1870, Abschn. III; dort allerdings im wesentlichen nur für Zahlenfolgen) und U. Dini ((6) und (7), §§ 136, 137) zurückgehenden Begriffe: Es sei  $f(x)$  eine Funktion über der Menge  $\mathfrak{B}$  und  $a$  ein Häufungspunkt für die zur

Menge  $\mathfrak{P}$  gehörenden Zahlen  $x > a$  bzw.  $x < a$ . Dann wird der rechte oder vordere Limes superior bzw. der linke oder hintere Limes superior von  $f(x)$  an der Stelle  $a$  definiert durch

$$(1) \quad \limsup_{x \rightarrow a+0} f(x) = \operatorname{fin} \inf_{b > a} \{ \operatorname{fin} \sup_{a < x < b} f(x) \}^1)$$

bzw. durch

$$(2) \quad \limsup_{x \rightarrow a-0} f(x) = \operatorname{fin} \inf_{c < a} \{ \operatorname{fin} \sup_{c < x < a} f(x) \}^2);$$

d. h. es soll zunächst für alle  $x$  der Menge  $\mathfrak{P}$  in einem Intervall  $a < x < b$  bzw.  $c < x < a$  die obere Grenze  $G$  von  $f(x)$  aufgesucht werden; die untere Grenze aller dieser für beliebiges  $b > a$  bzw.  $c < a$  entstehenden Zahlen  $G$  ist dann der vordere bzw. hintere Limes superior von  $f(x)$  an der Stelle  $a$ . Entsprechend wird definiert der rechte (vordere) Limes inferior bzw. linke (hintere) Limes inferior durch

$$(3) \quad \liminf_{x \rightarrow a+0} f(x) = \operatorname{fin} \sup_{b > a} \{ \operatorname{fin} \inf_{a < x < b} f(x) \}^3)$$

bzw. durch

$$(4) \quad \liminf_{x \rightarrow a-0} f(x) = \operatorname{fin} \sup_{c < a} \{ \operatorname{fin} \inf_{c < x < b} f(x) \}^4)$$

*Diese vier Limites existieren für jede beliebige Funktion bei Zulassung der Zahlen  $+\infty$  und  $-\infty$ , wofern nur der Punkt  $a$  ein Häufungspunkt der angegebenen Art ist.*

Ist  $a$  ein beliebiger Häufungspunkt des Definitionsbereiches  $\mathfrak{P}$  der Funktion  $f(x)$ , so wird unter dem Limes superior schlecht-hin an der Stelle  $a$ , in Zeichen

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{oder} \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x),$$

die größere (Gleichheit zugelassen) der beiden Zahlen (1) und (2) verstanden, falls beide existieren; sonst diejenige der beiden

<sup>1)</sup> Auch bezeichnet mit  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} f(x)$  und  $\overline{f(a+0)}$ .

<sup>2)</sup> Auch bezeichnet mit  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a-0} f(x)$  und  $\overline{f(a-0)}$ .

<sup>3)</sup> Auch bezeichnet mit  $\underline{\lim}_{x \rightarrow a+0} f(x)$  und  $\underline{f(a+0)}$ .

<sup>4)</sup> Auch bezeichnet mit  $\underline{\lim}_{x \rightarrow a-0} f(x)$  und  $\underline{f(a-0)}$ .



Zahlen (1) und (2), welche existiert. Entsprechend wird unter dem Limes inferior von  $f(x)$  an der Stelle  $a$  die kleinere (Gleichheit zugelassen) der beiden Zahlen (3) und (4) verstanden, falls beide existieren; andernfalls die existierende der beiden Zahlen (3) und (4).

*Diese beiden Limites existieren für jede beliebige Funktion bei Zulassung der Zahlen  $+\infty$  und  $-\infty$ , wofern nur  $a$  ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches ist.*

Existieren die beiden folgenden Limites und ist

$$\limsup_{x \rightarrow a+0} f(x) = \liminf_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

so wird der gemeinsame Wert der vordere oder rechte Limes von  $f(x)$  an der Stelle  $a$  genannt, in Zeichen

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \text{oder} \quad f(a+0).$$

Existieren die beiden folgenden Limites und ist

$$\limsup_{x \rightarrow a-0} f(x) = \liminf_{x \rightarrow a-0} f(x),$$

so wird der gemeinsame Wert der hintere oder linke Limes von  $f(x)$  an der Stelle  $a$  genannt, in Zeichen

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \quad \text{oder} \quad f(a-0).$$

Es sei endlich wieder  $a$  ein beliebiger Häufungspunkt von  $\mathfrak{B}$ , so daß  $\limsup_{x \rightarrow a} f(x)$  und  $\liminf_{x \rightarrow a} f(x)$  existieren; wenn diese beiden Limites übereinstimmen, wird der gemeinsame Wert der Limes von  $f(x)$  an der Stelle  $a$  genannt, in Zeichen

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Es existiert dann stets der rechte oder linke Limes von  $f(x)$  an der Stelle  $a$  oder beide (in diesem Fall haben sie denselben Wert); umgekehrt, wenn  $f(a+0)$  und  $f(a-0)$  existieren und übereinstimmen, existiert auch  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Vgl hierzu auch *Rep.* I<sub>1</sub>, S. 32 f.

## § 6. Stetige Funktionen, monotone Funktionen, Funktionen von beschränkter Schwankung.

Um die Funktionen zu erfassen, deren graphische Darstellung der freilich vagen Vorstellung entspricht, die man mit dem Wort „Kurve“ zu verbinden pflegt, hat man aus der Menge der Funktionen die endlichen stetigen monotonen differenzierbaren Funktionen herausgehoben. Sowohl die stetigen Funktionen wie die monotonen als auch die differenzierbaren Funktionen für sich spielen eine wichtige Rolle in der Analysis.

Es sei  $f(x)$  eine Funktion über  $\mathfrak{P}$  und  $a$  ein Häufungspunkt von  $\mathfrak{P}$ , der selber zu  $\mathfrak{P}$  gehört. Dann heißt  $f(x)$  im Punkte  $a$  nach rechts stetig bzw. nach links stetig, wenn der rechte bzw. linke Limes von  $f(x)$  im Punkte  $a$  existiert und

$$f(a + 0) = f(a) \quad \text{bzw.} \quad f(a - 0) = f(a)$$

ist. Die Funktion heißt im Punkte  $a$  stetig schlechthin, wenn der Limes im Punkte  $a$  existiert und

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{ist.}$$

Z. B. ist die Funktion  $y = [x]$ , wo  $[x]$  die größte ganze Zahl  $\leq x$  bedeutet, in jedem Punkte nach rechts stetig. Eine Funktion kann auch in einem Punkte stetig sein, in dem sie den Wert  $\infty$  hat; z. B. ist

$$f(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0, \\ x^{-2} & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

in jedem Punkte stetig, auch im Punkte  $x = 0$ .

Eine Funktion  $f(x)$  heißt in einer Punktmenge  $\mathfrak{P}$  stetig, wenn sie in jedem Punkte dieser Menge stetig ist. Aus der oben gegebenen Definition der Stetigkeit in einem Punkte folgt dann, daß  $\mathfrak{P}$  in sich dicht ist. Setzt man  $\mathfrak{P}$  überdies noch als abgeschlossen voraus, so gilt der in der elementaren Infinitesimalrechnung gewöhnlich nur für den Fall formulierte Satz, daß  $\mathfrak{P}$  ein abgeschlossenes Intervall ist:

*Ist die endliche Funktion  $f(x)$  auf einer perfekten Menge  $\mathfrak{P}$  stetig, so ist  $f(x)$  auf  $\mathfrak{P}$  gleichmäßig stetig, d. h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für je zwei Punkte  $x_1, x_2$  der Menge  $\mathfrak{P}$*

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon \quad \text{ist, wofern nur} \quad |x_2 - x_1| < \delta \quad \text{ist.}$$

Weiterhin setzen wir in diesem Abschnitt voraus, daß die betrachtete Funktion endlich und der Definitionsbereich  $\mathfrak{P}$  ein Intervall ist. Für diesen Fall vgl. zur Definition der Stetigkeit auch Rep. I<sub>1</sub>, S. 35, 36. Ebenda findet man auch die grundlegenden Sätze über stetige Funktionen. Wir heben hier die folgenden vier Sätze hervor:

1. Wenn  $f(x)$  im Punkte  $x_0$  stetig ist, gilt dasselbe von  $|f(x)|$ .

2. Wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  im Punkte  $x_0$  stetig sind, gilt dasselbe von  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  und, falls überdies  $g(x_0) \neq 0$  ist, auch von  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

3. Wenn  $f(x)$  im Punkte  $x_0$  und  $g(y)$  im Punkte  $y_0 = f(x_0)$  stetig ist, ist auch  $g(f(x))$  im Punkte  $x_0$  stetig.

4. Wenn im Intervall  $\langle a, b \rangle$  die Funktionen  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , ... stetig sind und gleichmäßig<sup>1)</sup> gegen eine Funktion  $f(x)$  konvergieren, ist  $f(x)$  ebenfalls in  $\langle a, b \rangle$  stetig. Diese Tatsache kann wegen 2. auch so formuliert werden: Wenn im Intervall  $\langle a, b \rangle$  die Reihe

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

gleichmäßig konvergiert und jedes der  $f_\nu(x)$  stetig ist, ist die Summe ebenfalls in  $\langle a, b \rangle$  stetig.

In diesen Sätzen sind die wichtigsten Rechenregeln enthalten, die bei Anwendung auf die Klasse der stetigen Funktionen aus dieser Klasse nicht herausführen. Die Frage, ob Sätze dieser Art gelten, wird für alle im folgenden einzuführenden Funktionenklassen von Wichtigkeit sein.

Wenn die Funktion  $f(x)$  in einem Intervall  $\langle a, b \rangle$  stetig ist sind die Werte der Funktion für sämtliche Zahlen  $a \leq x \leq b$  bestimmt, sobald die Funktionswerte für eine in  $\langle a, b \rangle$  überall dichte Menge bekannt sind. Die Frage, ob eine Funktion, die in einer überall dichten Menge eines Intervalls  $\langle a, b \rangle$  stetig ist, sich stets zu einer im ganzen Intervall  $\langle a, b \rangle$  stetigen Funktion ergänzen läßt, ist zu verneinen, da schon eine im offenen Intervall  $\langle a, b \rangle$  stetige Funktion sich nicht immer zu einer im abgeschlossenen Intervall stetigen Funktion ergänzen läßt, wie die für  $x > 0$  stetige Funktion  $\sin \frac{1}{x}$  zeigt. Vgl. jedoch Carathéodory (5), S. 617 ff.

<sup>1)</sup> Die Definition der gleichmäßigen Konvergenz s. Rep. I<sub>1</sub>, S. 432.

Man sagt, eine Funktion  $f(x)$  habe an einer Stelle  $\xi$  ein eigentliches Maximum bzw. Minimum, wenn es zu  $\xi$  eine Umgebung gibt, derart, daß für alle  $x \neq \xi$  dieser Umgebung  $f(\xi) > f(x)$  bzw.  $f(\xi) < f(x)$  unter Ausschluß der Gleichheit gilt.

Eine Funktion  $f(x)$  heißt in einem Intervall  $\langle a, b \rangle$  monoton, wenn entweder für jedes Zahlenpaar  $x_1 < x_2$  dieses Intervalls  $f(x_1) \leq f(x_2)$  oder  $f(x_1) \geq f(x_2)$  ist. Im ersten Falle sagt man: die Funktion nimmt monoton zu; im zweiten Fall: sie nimmt monoton ab.

Es gibt stetige Funktionen, die in jeder Umgebung eines Punktes  $\xi$  unendlich viele eigentliche Maxima und Minima haben und in keiner Umgebung eines Punktes  $\xi$  monoton sind, z. B.

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

in der Umgebung von  $\xi = 0$ .

Wenn eine in  $\langle a, b \rangle$  stetige Funktion in keinem Teilintervall  $\langle a, b \rangle$  monoton ist, hat sie, wie man leicht zeigt, in jedem Teilintervall von  $\langle a, b \rangle$  unendlich viele *eigentliche* Maxima und Minima. Es gibt auch wirklich derartige Funktionen, und das zeigt, daß der Begriff der stetigen Funktion anschaulich nicht erfaßt werden kann. Man gehe nämlich z. B. von einem doppelt geknickten Streckenzug aus, der den Punkt  $x = 0$  mit dem Punkt  $x = 1$  verbindet und bei dem von je drei aufeinanderfolgenden Eckpunkten der mittlere entweder höher oder tiefer als die beiden benachbarten Eckpunkte liegt (Fig. 4, gestrichelte Linie). Dieser Streckenzug bestimmt eine stetige Funktion  $f_1(x)$ . Über dem mittleren Drittel jeder der drei Strecken kann wieder ein doppelt geknickter Streckenzug so aufgesetzt werden, daß von je drei aufeinanderfolgenden Eckpunkten des abgeänderten Kurvenbildes der mittlere höher oder tiefer als die beiden benachbarten liegt und für die durch den neuen Streckenzug dargestellte stetige Funktion  $f_2(x)$

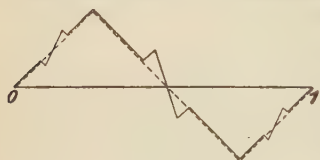


Fig. 4.

Strecken kann wieder ein doppelt geknickter Streckenzug so aufgesetzt werden, daß von je drei aufeinanderfolgenden Eckpunkten des abgeänderten Kurvenbildes der mittlere höher oder tiefer als die beiden benachbarten liegt und für die durch den neuen Streckenzug dargestellte stetige Funktion  $f_2(x)$

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \frac{1}{2}$$

gilt. Dieser Streckenzug wird auf dem mittleren Drittel jeder

seiner Strecken wieder nach der obigen Vorschrift abgeändert, jedoch so, daß für die durch ihn bestimmte stetige Funktion  $f_3(x)$

$$|f_2(x) - f_3(x)| < \frac{1}{2^2}$$

gilt; usf. Die Folge stetiger Funktionen  $f_1(x), f_2(x), \dots$  konvergiert dann gleichmäßig gegen eine infolgedessen stetige Funktion  $f(x)$ . Da diejenigen Punkte, die bei irgendeinem  $f_n(x)$  Eckpunkte des Funktionsbildes sind, auch Punkte der zu  $f(x)$  gehörigen Kurve sind, ist  $f(x)$  in keinem Teilintervall monoton, d. h. hat in jedem Teilintervall unendlich viele eigentliche Maxima und Minima.

*Die Anzahl der eigentlichen Maxima und Minima ist bei einer stetigen Funktion jedoch höchstens abzählbar* (A. Schoenflies (18), 1. Teil, S. 158).

*Eine Funktion  $f(x)$ , die im Intervall  $\langle a, b \rangle$  monoton ist, hat daselbst höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen* (Dini, (6) und (7), § 66).

Die Unstetigkeitspunkte einer im Intervall  $\langle a, b \rangle$  monotonen Funktion können in dem Intervall überall dicht liegen. Z. B. setze man für  $n = 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{2\nu}{2^n} \leq x < \frac{2\nu+1}{2^n} \text{ bei } \nu = 0, 1, \dots, 2^{n-1}-1, \\ \frac{1}{3^n} & \text{für } \frac{2\nu+1}{2^n} \leq x < \frac{2\nu+2}{2^n} \text{ bei } \nu = 0, 1, \dots, 2^{n-1}-1. \end{cases}$$

Dann konvergiert in dem Intervall  $(0, 1)$  gleichmäßig

$$(2) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x),$$

ist monoton und in jedem Punkt  $x = \frac{\nu}{2^n}$  zwar nach rechts stetig, aber nach links unstetig (vgl. auch Lit.-Verz. 5, S. 159).

Ein Beispiel für eine Funktion, die in allen irrationalen Punkten stetig und in den rationalen Punkten unstetig ist, ist

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für irrationales } x, \\ \frac{1}{q} & \text{für rationales } x = \frac{p}{q} \text{ bei teilerfremden } p, q \\ & \text{und } q > 0. \end{cases}$$



Bei Zulassung des Funktionswertes  $\infty$  hat die gleiche Eigenschaft

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} \infty & \text{für irrationales } x, \\ q & \text{für rationales } x = \frac{p}{q}. \end{cases}$$

Nach E. Borel ((4), S. 95) kann man allgemein zu einer beliebigen abzählbaren Punktmenge  $a_1, a_2, \dots$  eine Funktion konstruieren, die in jedem Punkt  $a_n$  unstetig und in jedem andern Punkt stetig ist; man braucht nur

$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq a_n, \\ \frac{1}{n} & \text{für } x = a_n \end{cases}$$

zu setzen.

Es gibt Funktionen, die in keinem Punkte stetig sind, z. B. die von G. Lejeune Dirichlet (*J. f. Math.* 4 (1829) 169 = Werke, Bd. I, S. 132) angegebene Funktion

$$(6a) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für irrationales } x, \\ 1 & \text{für rationales } x, \end{cases}$$

die man auch in der Gestalt

$$(6b) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos n! \pi x)^{2m} \right\}$$

darstellen kann.

Die unstetigen Funktionen werden nach H. Hankel (*Tübinger Gratulationsprogramm*, 1870 = *Math. Ann.* 20 (1882) 91) und U. Dini (Lit.-Verz. 6 u. 7, § 62) eingeteilt in punktiert unstetige und totalunstetige Funktionen. Eine Funktion fällt in einem Intervall  $\langle a, b \rangle$  unter die erste Klasse, wenn sie in diesem Intervall nicht überall stetig ist, aber die Stetigkeitspunkte in  $\langle a, b \rangle$  doch überall dicht liegen. Sie gehört der zweiten Klasse an, wenn die Stetigkeitspunkte nicht überall dicht liegen, d. h. wenn es in  $\langle a, b \rangle$  ein Teilintervall gibt, in dem kein Stetigkeitspunkt liegt. Die oben angeführten Funktionen (2), (3), (4), (5) sind Beispiele für punktiert unstetige Funktionen, während (6) totalunstetig ist.

Zu den grundlegenden Arbeiten über stetige und unstetige Funktionen gehören, wenn auch nicht alle Ergebnisse einwandfrei sind, die „Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen“ von H. Hankel (*Tübinger Gratulationsprogramm* 1870 = *Math. Ann.* 20 (1882) 63–112).

Für weitere Untersuchungen dieser Art, insbesondere auch Beispiele siehe Dini (6) u. (7), Kap. 5, 6, 9 sowie Schoenflies (18), 1. Teil, Kap. 1, 2, 4. Zusammenfassende Darstellungen der Untersuchungen von stetigen Funktionen auf einer Punktmenge findet man bei Carathéodory (5) und Hahn (9).

Hier sei noch eine Tatsache erwähnt, die G. Peano (*Math. Ann.* **36** (1890) 157—160) entdeckt hat. Die durch eine eindeutige stetige Funktion  $y = f(x)$  bestimmte Menge von Punkten  $x, y$  kann als „stetige Kurve“ angesprochen werden. Um auch Kurven zu erhalten, die nicht schlicht über der  $x$ -Achse liegen, geht man zu Parameterdarstellungen in folgender Weise über: wenn die Funktionen  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  im Intervall  $0 \leq t \leq 1$  stetig sind, wird die Menge der Punkte

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

als allgemeinste ebene stetige Kurve bezeichnet. G. Peano hat durch ein Beispiel die merkwürdige Tatsache erwiesen, daß die Menge der Punkte  $x, y$  ein volles Quadrat lückenlos ausfüllen kann, also sich keineswegs mit der (allerdings unbestimmten) Vorstellung zu decken braucht, die man gemeinhin von einer „Kurve“ hat. D. Hilbert (*Math. Ann.* **38** (1891) 459f.; vgl. auch Encykl. (1) S. 945) hat dasselbe

durch folgendes Beispiel in mehr anschaulich-geometrischer Form erwiesen: Das Intervall  $0 \leq t \leq 1$  wird in vier gleiche Teile geteilt und ebenso ein Quadrat von der Seitenlänge 1 in vier gleich große Quadrate geteilt (Fig. 5). Die Teilstrecken werden den Teilquadraten so zugeordnet, daß zwei benachbarten Teilstrecken zwei Teilquadrate mit gemeinsamer Seite entsprechen. Jede Teilstrecke und jedes Teilquadrat wird

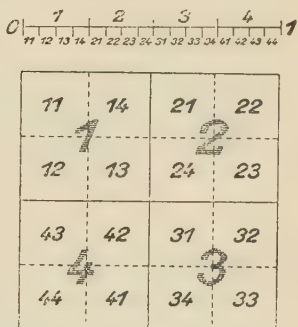


Fig. 5.

von neuem geviertelt und die neuen Teilstrecken und Teilquadrate wieder in der eben beschriebenen Weise einander zugeordnet. In dieser Weise fährt man fort. Jeder Punkt der Strecke  $\langle 0, 1 \rangle$  kann nun durch eine Intervallschachtelung festgelegt werden und ihm wird zugeordnet der Punkt des Quadrats, der durch die der Intervallschachtelung zugeordnete Quadratschachtelung bestimmt ist. Damit ist die Strecke  $\langle 0, 1 \rangle$  auf das ganze Quadrat stetig abgebildet. Man beachte

jedoch, daß nicht jedem Punkte des Quadrats nur ein Punkt der Strecke entspricht.

Es sei  $f(x)$  in einem Intervall  $\langle a, b \rangle$  definiert und endlich; ferner sei  $a \leq \alpha < \beta \leq b$ . Dann heißt

$$\sigma(\alpha, \beta) = \limsup_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) - \liminf_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x)$$

die Schwankung von  $f(x)$  im Intervall  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Die Schwankung der endlichen Funktion  $f(x)$  in einem Punkte  $x_0$  des Intervalls  $\langle a, b \rangle$  ist definiert durch

$$\sigma(x_0) = \liminf \sigma(\alpha, \beta);$$

dabei sind, falls  $x_0$  ein innerer Punkt von  $\langle a, b \rangle$  zur Konkurrenz alle Teilintervalle  $\langle \alpha, \beta \rangle$  von  $\langle a, b \rangle$  zugelassen, die  $x_0$  als inneren Punkt enthalten, und falls  $x_0$  einer der Endpunkte  $a$  oder  $b$  ist, alle diejenigen Teilintervalle  $\langle \alpha, \beta \rangle$  von  $\langle a, b \rangle$  die  $a$  als linken bzw.  $b$  als rechten Endpunkt enthalten.

*Eine endliche Funktion  $f(x)$  ist dann und nur dann in einem Punkte  $x_0$  stetig, wenn in diesem Punkte die Schwankung  $\sigma(x_0) = 0$  ist.*

Über Funktionen von beschränkter Schwankung siehe Rep. I<sub>1</sub>, S. 39.

Eine endliche Funktion  $f(x)$  ist z. B. von beschränkter Schwankung im Intervall  $\langle a, b \rangle$ , wenn sie differenzierbar ist und die Differentialquotienten beschränkt sind; oder wenn ihre Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{für} \quad a \leq x_1 < x_2 \leq b$$

beschränkt sind.

Eine Funktion von beschränkter Schwankung braucht in keinem Teilintervall stetig zu sein; das zeigt die monotone Funktion (2) auf S. 1053, deren Unstetigkeitspunkte in jedem Intervall überall dicht liegen. Eine stetige Funktion braucht nicht von beschränkter Schwankung zu sein. Letzteres zeigt die Funktion, die durch folgende Kurve bestimmt ist: Man verbinde für  $n = 1, 2, 3, \dots$  den Punkt, der die Ordinate  $\frac{1}{n}$  hat und über der Mitte des Intervalls  $\left\langle \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right\rangle$  liegt, geradlinig mit den Endpunkten dieses Intervalls (Fig. 6) und setze  $f(0) = 0$ .

Dann ist die durch die Kurve bestimmte Funktion  $f(x)$  im Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$  stetig, aber nicht von beschränkter Schwankung. Es gibt auch stetige Funktionen, die in keinem Teilintervall von beschränkter Schwankung sind (Carathéodory (5), S. 190).

Über die Rechenregeln (vgl. hierzu die auf S. 1051 für stetige Funktionen aufgestellten Regeln) ist folgendes zu sagen:

1. Wenn  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  von beschränkter Schwankung ist, gilt dasselbe für  $|f(x)|$ .

2. Wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  von beschränkter Schwankung sind, gilt dasselbe von  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  und, falls  $|g(x)|$  eine positive untere Schranke hat, auch von  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

3. Wenn  $f(x)$  und  $g(y)$  von beschränkter Schwankung sind, braucht  $g(f(x))$  nicht dieselbe Eigenschaft zu haben; das zeigen z. B. im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0; \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y = 0, \\ 1 & \text{für } y \neq 0. \end{cases}$$

4. Wenn im Intervall  $\langle a, b \rangle$  die Funktionenfolge  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , ... gleichmäßig gegen eine Funktion  $f(x)$  konvergiert und wenn für jede der Funktionen  $f_n(x)$  jede Schwankungssumme

$\sum_{v=1}^m |f_n(x_v) - f_n(x_{v-1})|$  kleiner als eine weder von  $n$  noch von  $m$  abhängende Zahl  $A$  ist, ist auch  $f(x)$  von beschränkter Schwankung.

Die Funktionen von beschränkter Schwankung sind von Wichtigkeit für die Theorie der rektifizierbaren Kurven, der trigonometrischen Reihen und der Differentialgleichungen (hier treten sie in der Gestalt der Lipschitz-Bedingung auf). Für weitere Eigenschaften und eine Weiterbildung des Begriffes vgl. Carathéodory (5), S. 180—191, S. 510—515, S. 584—590 und Hahn (9), Kap. 7.

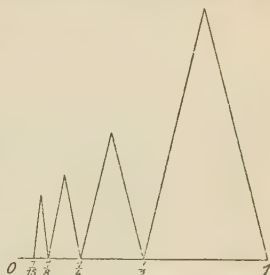


Fig. 6.

### § 7. Die analytisch darstellbaren Funktionen. Die Baireschen Funktionenklassen.

Die Definition der Funktion  $y = f(x)$  nach G. Lejeune Dirichlet verlangt, daß jedem  $x$  ein  $y$  zugeordnet ist. Obwohl der Kern der Dirichletschen Definition allgemein anerkannt ist, ist doch gerade in neuester Zeit mehrfach (z. B. durch E. Borel, H. Weyl und vor allem durch L. E. J. Brouwer) beanstandet worden, daß über die Art und Weise, wie die Zuordnung zu geschehen hat, nichts ausgesagt ist. Man kann dem Rechnung tragen, indem man mit H. Lebesgue (*Journ. de Math.* (6) **1** (1905) 139—216, insbes. S. 145f.) den Dirichletschen Funktionsbegriff folgendermaßen verengt, wobei der Einfachheit halber, wie überhaupt in diesem Paragraphen, die vorkommenden Funktionen als endlich vorausgesetzt seien:

Eine Funktion  $f(x)$  werde in einem Intervall  $\langle a, b \rangle$  eine analytisch darstellbare Funktion genannt, wenn man sie durch höchstens abzählbar viele Additionen, Multiplikationen und konvergente Limesprozesse<sup>1)</sup> aus Konstanten und der Veränderlichen  $x$  aufbauen kann. Die Division, die man zunächst vermissen wird, ist hierin ebenfalls enthalten, da  $\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}$  ist und nach dem Satz von K. Weierstraß (*Rep.* **I**<sub>1</sub>, S. 36) die Funktion  $\frac{1}{v}$  in jedem den Punkt  $v = 0$  nicht enthaltenden Intervall sich durch eine (sogar gleichmäßig) konvergente Reihe von Polynomen darstellen läßt, also in jedem  $v = 0$  nicht enthaltenden Intervall zu den analytisch darstellbaren Funktionen im Sinne von Lebesgue gehört. Entsprechendes läßt sich über die sonstigen einfachen Funktionen wie  $\sqrt{x}$ ,  $\log x$  usw. für die Intervalle zeigen, in denen diese Funktionen existieren.

Zu den in  $\langle a, b \rangle$  analytisch darstellbaren Funktionen gehört trivialerweise jedes Polynom, aber nach dem Satz von K. Weierstraß auch jede Funktion, die in  $\langle a, b \rangle$  stetig ist. Zu den analytisch darstellbaren Funktionen gehört ferner auch die nirgends stetige Dirichletsche Funktion (6) von S. 1054, was sofort einleuchtet, wenn man sie in der Gestalt schreibt:

---

1) Die Limesprozesse sollen dabei stets *endliche* Werte liefern.



$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos n! \pi x)^{2^m} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{\nu=0}^p (-1)^\nu \frac{(n! \pi x)^{2^\nu}}{(2^\nu)!} \right) \right]^{2^m} \right\}.
 \end{aligned}$$

Die Begriffsbildung von Lebesgue begegnet sich mit einer ähnlichen von R. Baire (*Thèse* 1899 = *Annali di mat.* (3) **3** (1899) 1—122, insbes. S. 68; vgl. auch *Rep.* **I**<sub>1</sub>, 37). Baire geht davon aus, daß der Limes einer konvergenten Folge von stetigen Funktionen nicht stetig zu sein braucht. Setzen wir nämlich im Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  und  $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^n$

$$f_n\left(\frac{\nu}{2^n}\right) = \frac{1}{d_{n,\nu}},$$

wo  $d_{n,\nu}$  den Quotienten von  $2^n$  und dem größten gemeinsamen Teiler der Zahlen  $2^n$  und  $\nu$  bedeutet, und verbinden wir die auf diese Weise festgelegten Punkte  $\frac{\nu}{2^n}, f_n\left(\frac{\nu}{2^n}\right)$  geradlinig, so definiert diese Kurve (Fig. 7 für  $n = 3$ ) im Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$  eine stetige Funktion  $f_n(x)$ . Es ist dann

$$(2) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

vorhanden und hat für  $x = \frac{\nu}{2^n}$  den nur von  $x$  abhängenden

Wert  $\frac{1}{d_{n,\nu}}$  und sonst den Wert 0. Der Limes einer Folge von stetigen Funktionen kann also bereits eine (punktiert unstetige) Funktion sein, deren Unstetigkeitsstellen überall dicht liegen.

Von dieser Bemerkung ausgehend, wählt Baire als Grundlage für seine Einteilung der in einem festen Intervall  $\langle a, b \rangle$  definierten Funktionen in Klassen, die fundamentale Klasse der stetigen Funktionen und bezeichnet sie als nullte Klasse. Die Gesamtheit der in  $\langle a, b \rangle$  unstetigen Funktionen, die sich daselbst als Limes von stetigen Funktionen darstellen lassen, bildet die erste Bairesche Klasse. Diejenigen

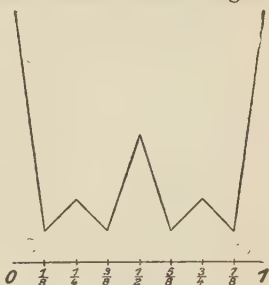


Fig. 7.

Funktionen, die sich in  $\langle a, b \rangle$  als Limes von Funktionen der ersten Klasse darstellen lassen, ohne jedoch selber der nullten oder ersten

Klasse anzugehören, bilden die zweite Bairesche Klasse. In dieser Weise kann man fortfahren und gelangt so zur Definition der abzählbar vielen Klassen mit den Nummern  $0, 1, 2, 3, \dots$ , d. h. zu den Klassen mit endlichen Ordnungszahlen. Man kann aber darüber noch hinauskommen (vgl. hierzu die Bildung der Ableitungen höherer Ordnungszahlen (*Rep. I*<sub>1</sub>, S. 29)). Bezeichnen wir vorübergehend die Gesamtheit der bisher definierten Baireschen Funktionen mit  $K$ , so kann man die Klasse derjenigen Funktionen bilden, die, ohne selbst zu  $K$  zu gehören, sich in  $\langle a, b \rangle$  als Limes einer Folge von Funktionen aus  $K$  darstellen lassen; die Klasse dieser Funktionen wird durch die erste transfinite Ordnungszahl  $\omega$  bezeichnet. Durch Anwendung der „transfiniten Induktion“ kann man zu Baireschen Klassen gelangen, deren Nummer eine beliebige Ordnungszahl der zweiten Zahlklasse ist. Ist nämlich  $\alpha$  irgendeine solche Ordnungszahl, derart, daß schon Funktionen aller Klassen existieren, die der  $\alpha$ -ten Klasse vorhergehen, so wird jede Funktion, die sich in  $\langle a, b \rangle$  als Limes einer Folge von Funktionen der schon definierten Klassen darstellen läßt, zur  $\alpha$ -ten Klasse gerechnet, wenn die Funktion selber nicht schon einer der früheren Klassen angehört.

Es entsteht also eine Fülle von denkbaren Klassen, und auf Grund von Beispielen wissen wir, daß es Funktionen der nullten und ersten Klasse tatsächlich gibt, d. h. daß diese Klassen nicht leer sind. Allgemein hat H. Lebesgue (*Journ. de Math.* (6) **1** (1905) 205—212; vgl. auch de la Vallée Poussin (20), S. 145—151 sowie Kuratowski, *C. R.* **176** (1923) 229—232) gezeigt: *Zu jeder Ordnungszahl  $\alpha$  der ersten oder zweiten Zahlklasse gibt es Funktionen der  $\alpha$ -ten Baireschen Klasse.*

Aber die Klasseneinteilung von Baire umfaßt keineswegs alle Funktionen im Dirichletschen Sinne. Baire (*Annali di Mat.* (3) **3** (1899) 71 durch Mächtigkeitsbetrachtungen) und Lebesgue (*Journ. de Math.* (6) **1** (1905) 205—212) durch Konstruktion einer Funktion) haben bewiesen: *Es gibt Funktionen im Dirichletschen Sinne, die keiner Baireschen Klasse angehören.*

H. Lebesgue hat weiter gezeigt: *Die Gesamtheit der im Intervall  $\langle a, b \rangle$  analytisch darstellbaren Funktionen ist identisch mit der Gesamtheit der Funktionen, die irgendeiner Baireschen Klasse angehören* (*Journ. de Math.* (6) **1** (1905) 152—153). *Die in  $\langle a, b \rangle$  analytisch darstellbaren Funktionen sind genau die Funktionen  $f(x)$ , die im Borelschen Sinne meßbar sind, d. h. die Funktionen, bei denen für jedes  $y$  die Menge der Punkte  $x$ , für*

welche  $f(x) \geq y$  gilt, eine im Borelschen Sinne meßbare Menge (vgl. S. 1043 f.) ist (a. a. O., S. 168—170).

Über die Rechenregeln ist folgendes zu sagen:

1. Wenn  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  höchstens der  $\alpha$ -ten Baireschen Klasse angehört, gilt dasselbe von  $|f(x)|$ .

2. Wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  höchstens der  $\alpha$ -ten Klasse angehören, gilt dasselbe von  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  und, falls überdies  $g(x) \neq 0$  in  $\langle a, b \rangle$  ist, auch von  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

3. Es gehöre  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  einer Baireschen Klasse an; es sei  $A \leq f(x) \leq B$ , und es gehöre  $g(y)$  in  $\langle A, B \rangle$  einer Baireschen Klasse an. Dann ist auch  $g(f(x))$  in  $\langle a, b \rangle$  eine Bairesche Funktion.

4. Es konvergiere in  $\langle a, b \rangle$  gleichmäßig

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

und es gehöre jede der Funktionen  $f_n(x)$  höchstens der  $\alpha$ -ten Klasse an; dann gilt dasselbe von  $f(x)$ .

Die vorstehenden Sätze finden sich teils wörtlich bei H. Lebesgue (*Journ. de Math.* (6) **1** (1905) 153—156), teils folgen sie leicht aus den dort angegebenen Sätzen. Vgl. auch W. Sierpiński (*Fund. Math.* **1** (1920) 164) sowie Carathéodory (5), S. 397—399.

Von den Kriterien dafür, ob eine gegebene Funktion einer gegebenen Klasse angehört, führen wir das auf die erste Klasse bezügliche Kriterium an: *Dafür, daß eine Funktion  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  höchstens zur ersten Baireschen Klasse gehört, ist notwendig und hinreichend, daß  $f(x)$  auf jeder perfekten Teilmenge des Intervalls höchstens punktiert unstetig ist*, d. h. daß für jedes Teilintervall  $(\alpha, \beta)$  des gegebenen Intervalls der in  $(\alpha, \beta)$  etwa hineinfallende Teil der perfekten Teilmenge mindestens einen Stetigkeitspunkt von  $f(x)$  enthält. (R. Baire, *C. R.* **126** (1898) 884—887 und Lit.-Verz. 2, Kap. 4; einfacher bei H. Lebesgue in Lit.-Verz. 4, Note 2, ferner Lit.-Verz. 21, S. 124.)

Aus diesem Satz folgt z. B., daß alle Funktionen von beschränkter Schwankung und überhaupt alle Funktionen mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitspunkten höchstens zur ersten Klasse gehören. Es ergibt sich ferner, daß die überall unstetige Dirichletsche Funktion (1) auf S. 1054 nicht zur ersten Klasse gehört. Da sie auf Grund ihrer Darstellung als Doppellimes von

stetigen Funktionen aber höchstens zur zweiten Klasse gehört, ist sie gerade eine Funktion der zweiten Klasse.

Trotz der großen Allgemeinheit des zu den Baireschen Funktionen führenden Konstruktionsprinzipes sind sie in gewisser Weise doch nur den durch konvergente Polynomfolgen erhaltenen Funktionen äquivalent. Das zeigt der Satz von M. Fréchet (*Thèse* 1906 = *Palermo Rend.* **22** (1906) 15—17): *Gehört  $f(x)$  im Intervall  $\langle a, b \rangle$  irgendeiner Baireschen Klasse an, so gibt es in  $\langle a, b \rangle$  eine Menge  $\mathfrak{M}$  vom Maß 0 und eine Folge von Polynomen, derart, daß die Polynomfolge in jedem nicht zu  $\mathfrak{M}$  gehörenden Punkte von  $\langle a, b \rangle$  gegen  $f(x)$  konvergiert.*

Für eine Einführung in die hier skizzierte Theorie sind vor allem zu nennen Baire (2); H. Lebesgue (*Journ. de Math.* (6) **1** (1905) 139—216); de la Vallée Poussin (21).

### § 8. Die meßbaren Funktionen.

Für die Theorie des Integrals sind die sog. meßbaren Funktionen von grundlegender Bedeutung geworden. Wir legen den Funktionen zunächst wieder keine Beschränkung auf, lassen also insbesondere  $+\infty$  und  $-\infty$  als Funktionswerte zu.

Es sei  $f(x)$  eine gegebene Funktion auf der beschränkten Punktmenge  $\mathfrak{P}$ . Es soll dann für  $-\infty \leq A \leq B \leq +\infty$  die Menge der zu  $\mathfrak{P}$  gehörigen Punkte  $x$ , für die  $A \leq f(x) \leq B$  ist, mit  $\mathfrak{M}(A \leq f \leq B)$  bezeichnet werden. Entsprechend bezeichnen  $\mathfrak{M}(A < f)$ ,  $\mathfrak{M}(f \leq B)$ ,  $\mathfrak{M}(f = A)$  usw.

die Mengen der zu  $\mathfrak{P}$  gehörigen Punkte  $x$ , für die

$$A < f(x), \quad f(x) \leq B, \quad f(x) = A \text{ usw.} \quad \text{ist.}$$

Die Funktion  $f(x)$  heißt nach H. Lebesgue (*Thèse* = *Annali di Mat.* (3) **7** (1902) 258; dort wird allerdings noch „summierbar“ statt „meßbar“ gesagt) eine über  $\mathfrak{P}$  meßbare Funktion oder kurz meßbar, wenn für jedes  $-\infty \leq A \leq +\infty$  die Menge  $\mathfrak{M}(f \geq A)$  meßbar (im Lebesgueschen Sinne; vgl. § 4) ist. Aus der Definition folgt unmittelbar für  $A = -\infty$ , daß der Definitionsbereich  $\mathfrak{P}$  selber eine meßbare Menge ist. Es werde daher in diesem Abschnitt weiterhin stets der Definitionsbereich  $\mathfrak{P}$  der Funktion als meßbar vorausgesetzt.

*Es sei  $\mathfrak{P}$  eine meßbare Menge. Dafür, daß eine Funktion  $f(x)$  über  $\mathfrak{P}$  meßbar ist, ist notwendig, daß für jedes  $A \leq B$  jede der Mengen*

$$\mathfrak{M}(f \geq A), \quad \mathfrak{M}(f > A), \quad \mathfrak{M}(f \leq B), \quad \mathfrak{M}(f < B), \\ \mathfrak{M}(f = A), \quad \mathfrak{M}(A \leq f \leq B), \quad \mathfrak{M}(A < f < B)$$

meßbar ist, und hinreichend, daß mindestens eine der Mengen

$$\mathfrak{M}(f \geq A), \quad \mathfrak{M}(f > A), \quad \mathfrak{M}(f \leq B), \quad \mathfrak{M}(f < B) \\ \mathfrak{M}(A \leq f \leq B)$$

für jedes  $A \leq B$  meßbar ist.

Weiterhin setzen wir in diesem Abschnitt der Einfachheit halber die Funktionen stets als endlich voraus.

Meßbare Funktionen in einem Intervall  $\langle a, b \rangle$  sind die stetigen Funktionen; die monotonen Funktionen; die Funktionen von beschränkter Schwankung; die Funktionen, die in  $\langle a, b \rangle$  fast überall<sup>1)</sup> stetig sind; die in  $\langle a, b \rangle$  analytisch darstellbaren Funktionen. Letzteres folgt daraus, daß die analytisch darstellbaren Funktionen nach S. 1060 sogar im engeren Borelschen Sinne meßbar sind.

Eine Funktion  $f(x)$  kann nach einer der ersten Bemerkungen nur auf einer meßbaren Menge  $\mathfrak{P}$  meßbar sein. Aber selbst für den Fall, daß  $\mathfrak{P}$  ein Intervall ist, gibt es nicht-meßbare Funktionen über  $\mathfrak{P}$ ; man erhält offenbar eine über  $\langle 0, 1 \rangle$  nicht-meßbare Funktion, wenn man für eine in  $\langle 0, 1 \rangle$  liegende nicht-meßbare Menge  $\mathfrak{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für die Punkte von } \mathfrak{N}, \\ 0 & \text{für die nicht zu } \mathfrak{N} \text{ gehörigen Punkte} \end{cases}$$

setzt.

Wenn  $f(x)$  über  $\mathfrak{P}$  meßbar und  $\mathfrak{Q}$  eine meßbare Unter-  
menge von  $\mathfrak{Q}$  ist, ist  $f(x)$  auch über  $\mathfrak{Q}$  meßbar.

Es seien  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$  höchstens abzählbar viele meßbare Mengen und  $f(x)$  auf jeder der Mengen meßbar; dann ist  $f(x)$

<sup>1)</sup> Man sagt, eine Funktion  $f(x)$  habe eine Eigenschaft  $E$  fast überall auf einer Punktmenge  $\mathfrak{P}$  oder fast in jedem Punkt von  $\mathfrak{P}$ , wenn diejenigen Punkte  $x$  von  $\mathfrak{P}$ , für welche  $f(x)$  die Eigenschaft  $E$  nicht hat, eine Menge vom Maß 0 bilden. Eine Funktion heißt also fast überall stetig auf  $\mathfrak{P}$ , wenn die Menge der Unstetigkeitspunkte das Maß 0 hat.

Praktisch ist auch folgender Äquivalenzbegriff (Lit.-Verz. 5, S. 389): Zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  werden auf der Punktmenge  $\mathfrak{P}$  äquivalent genannt, wenn die Menge der Punkte  $x$  von  $\mathfrak{P}$ , für welche  $f(x) \neq g(x)$  gilt, das Maß 0 hat.



meßbar auf  $\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2 \cdot \dots$ , und auch auf  $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \dots$ , falls diese Summe eine beschränkte Menge ist.

Unter Festhaltung des Definitionsbereiches  $\mathfrak{P}$  der Funktion gelten folgende Rechenregeln:

1. Wenn  $f(x)$  auf  $\mathfrak{P}$  meßbar ist, gilt dasselbe von  $|f(x)|$ .
2. Wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  auf  $\mathfrak{P}$  meßbar sind, gilt dasselbe von  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  und, falls überdies  $g(x) \neq 0$  in  $\mathfrak{P}$  ist, auch von  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

3. Wenn  $g(y)$  und  $f(x)$  meßbare Funktionen sind, braucht  $g(f(x))$  keineswegs meßbar zu sein. C. Carathéodory ((5), S. 379f.) hat sogar ein Beispiel angegeben, welches zeigt: Es gibt in  $\langle 0, 1 \rangle$  monoton wachsende, stetige Funktionen  $f(x)$  und im Intervall  $\langle f(0), f(1) \rangle$  meßbare Funktionen  $g(y)$ , so daß  $g(f(x))$  in  $\langle 0, 1 \rangle$  nicht meßbar ist. Dagegen gilt noch folgender Satz (Carathéodory (5), S. 376f.): *Es sei  $f(x)$  meßbar auf  $\mathfrak{P}$  und  $g(y)$  definiert und monoton in einem Intervall, das alle Werte  $y = f(x)$  enthält; dann ist auch  $g(f(x))$  meßbar auf  $\mathfrak{P}$ .*

4. Es sei  $f_1(x), f_2(x), \dots$  eine Folge meßbarer Funktionen auf  $\mathfrak{P}$  und für jeden Punkt  $x$  von  $\mathfrak{P}$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

vorhanden. Dann ist auch  $f(x)$  auf  $\mathfrak{P}$  meßbar. Man beachte, daß hier nicht gleichmäßige Konvergenz vorausgesetzt wird, daß vielmehr schon bei einfacher Konvergenz der Limesprozeß nicht aus dem Bereich der meßbaren Funktionen herausführt.

Von Interesse ist noch folgender Satz von E. Borel ((4), S. 37): *Es seien  $f_1(x), f_2(x), \dots$  abzählbar viele meßbare Funktionen über  $\mathfrak{P}$ , und es sei für jeden Punkt  $x$  von  $\mathfrak{P}$*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

vorhanden: Wird bei gegebenem  $\varepsilon > 0$  und  $n$  mit  $\mathfrak{P}_{n, \varepsilon}$  die Teilmenge von  $\mathfrak{P}$  bezeichnet, in der

$$|f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon$$

ist, so ist  $\mathfrak{P}_{n, \varepsilon}$  meßbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{P}_{n, \varepsilon}| = 0.$$

Dieser Satz ist von D. Th. Egoroff (C. R. 152 (1911) 244—246) zu folgendem verschärft: *Wenn die Folge  $f_1(x)$ ,*

$f_2(x), \dots$  von meßbaren Funktionen auf  $\mathfrak{P}$  gegen  $f(x)$  konvergiert, läßt sich aus  $\mathfrak{P}$  eine Teilmenge  $\Omega$  von beliebig kleinem Maß  $n$  so herausheben, daß die Funktionenfolge in der Menge  $\mathfrak{P} - \Omega$  gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergiert.

Abgesehen davon, daß jede Bairesche Funktion meßbar ist (was übrigens auch unmittelbar aus 4. folgt), besteht zwischen den Baireschen Funktionen und den meßbaren Funktionen folgender von G. Vitali (*Lomb. Ist. Rend.* (2) **38** (1905) 599—603; vgl. auch Carathéodory, (5), S. 403—406) entdeckte Zusammenhang: Ist  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  meßbar, so gibt es eine Funktion, die in  $\langle a, b \rangle$  zur zweiten Baireschen Klasse gehört und zu  $f(x)$  äquivalent ist.

Hieraus folgt mit Hilfe des Satzes von Fréchet (S. 1062): Jede in  $\langle a, b \rangle$  meßbare Funktion läßt sich fast im ganzen Intervall als Limes einer Folge von Polynomen darstellen.

Für eine Einführung in die Theorie der meßbaren Funktionen seien genannt Lit.-Verz. 5, 10, 13, 14, 20—22.

## § 9. Die Derivierten.

Die Verallgemeinerung des gewöhnlichen Limesbegriffs (§ 5) führt naturgemäß auch zu einer Verallgemeinerung des Differentialquotienten.

Es sei  $f(x)$  in einer Umgebung des Punktes  $\xi$  definiert und endlich. Wir bilden an der Stelle  $\xi$  einen Differenzenquotienten

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi},$$

wobei  $x \neq \xi$  sein und dem Definitionsbereich von  $f(x)$  angehören soll. Bei festgehaltenem  $\xi$  und bei Zulassung der Zahlen  $-\infty$  und  $+\infty$  als Grenzwerte werden die folgenden vier Limes (vgl. S. 1048) gebildet:

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{x \rightarrow \xi - 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi},$$

$$\overline{D}f(\xi) = \limsup_{x \rightarrow \xi - 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi},$$

$$\underline{D}_+f(\xi) = \liminf_{x \rightarrow \xi + 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi},$$

$$\overline{D}_+f(\xi) = \limsup_{x \rightarrow \xi + 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Diese vier Limites werden der Reihe nach genannt:

linke (oder hintere) untere Derivierte von  $f(x)$  an der Stelle  $\xi$ ,  
 linke (oder hintere) obere Derivierte von  $f(x)$  an der Stelle  $\xi$ ,  
 rechte (oder vordere) untere Derivierte von  $f(x)$  an der Stelle  $\xi$ ,  
 rechte (oder vordere) obere Derivierte von  $f(x)$  an der Stelle  $\xi$ .

Ist  $D_-f(\xi) = \bar{D}_-f(\xi)$ , so heißt der gemeinsame Wert der linke (oder hintere) Differentialquotient oder die linke (hintere) Ableitung von  $f(x)$  an der Stelle  $\xi$ ; ist  $D_+f(\xi) = \bar{D}_+f(\xi)$ , so heißt der gemeinsame Wert der rechte (vordere) Differentialquotient oder die rechte (vordere) Ableitung von  $f(x)$  an der Stelle  $\xi$ . Diese beiden Ableitungen werden auch bezeichnet durch  $f'_-(\xi)$  bzw.  $f'_+(\xi)$ . Wenn  $f'_-(\xi) = f'_+(\xi)$  ist, wird  $f(x)$  an der Stelle  $\xi$  differenzierbar genannt und der gemeinsame Wert als Differentialquotient oder Ableitung  $f'(\xi)$  an der Stelle  $\xi$  bezeichnet.

Der kleinere der beiden Werte  $\underline{D}_-f(\xi)$ ,  $\underline{D}_+f(\xi)$  und im Falle ihrer Gleichheit der gemeinsame Wert heißt untere Derivierte von  $f(x)$  an der Stelle  $\xi$ ; Bezeichnung:  $\underline{D}f(\xi)$ . Der größere der beiden Werte  $\bar{D}_-f(\xi)$ ,  $\bar{D}_+f(\xi)$  und im Falle ihrer Gleichheit der gemeinsame Wert heißt obere Derivierte von  $f(x)$  an der Stelle  $\xi$ . Falls  $\bar{D}f(\xi) = \underline{D}f(\xi)$  ist, ist die Funktion wieder an der Stelle  $\xi$  differenzierbar und der gemeinsame Wert gleich  $f'(\xi)$ .

Für die Derivierten und Ableitungen sind, falls nicht das Gegenteil besonders vorausgesetzt wird, stets die Zahlen  $+\infty$  und  $-\infty$  zugelassen. Bei dieser Festsetzung existiert für jede im Intervall  $(a, b)$  endliche Funktion in jedem Punkte jede der sechs Derivierten.

Ist z. B.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x < 0, \\ 2x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

so ist im Punkte  $\xi = 0$

$$\begin{array}{lll} \underline{D}_-f(0) = -1, & \underline{D}_+f(0) = -2, & \underline{D}f(0) = -2, \\ \bar{D}_-f(0) = +1, & \bar{D}_+f(0) = +2, & \bar{D}f(0) = +2. \end{array}$$

## Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

besitzt im Punkte  $\xi = 0$  wohl eine linke Ableitung, und zwar  $f'_-(0) = 0$ , aber keine rechte Ableitung, da  $\underline{D}_+ f(0) = -\infty$ ,  $\underline{D}_+ f(0) = +\infty$  ist. Für die Funktion  $f(x) = |x|$  existieren die beiderseitigen Ableitungen, sind aber im Punkte 0 voneinander verschieden, nämlich  $f'_-(0) = -1$ ,  $f'_+(0) = 1$ .

Die Derivierten können bei vielen Untersuchungen der klassischen Infinitesimalrechnung die Ableitungen ersetzen, so daß die Ergebnisse nicht an die besonders voraussetzende Existenz der Ableitungen gebunden sind. Z. B. besagt die monotone Zunahme einer beliebigen reellen Funktion in  $\langle a, b \rangle$  nichts anderes, als daß in jedem Punkte des Intervalls  $\underline{D} f(x) \geq 0$  ist, die monotone Abnahme  $\bar{D} f(x) \leq 0$ . Ferner hat  $f(x)$  in einem Punkte  $\xi$  des Intervalls sicher ein eigentliches Maximum, wenn  $\underline{D}_- f(\xi) > 0$  und  $\bar{D}_+ f(\xi) < 0$  ist, dagegen ein eigentliches Minimum, wenn  $\bar{D}_- f(\xi) < 0$  und  $\underline{D}_+ f(\xi) > 0$  ist.

Der Begriff der Derivierten ist eingeführt von U. Dini ((6) u. (7), § 136 f). Die Bezeichnung „Derivierte“ stammt von L. Scheeffer (*Acta Math.* 5 (1884) 52). Die hier benutzten Zeichen hat C. Carathéodory ((5), S. 515 ff.) eingeführt. Scheeffer und mit ihm verschiedene andere Autoren benutzen statt  $\underline{D}_-$ ,  $\bar{D}_-$ ,  $\underline{D}_+$ ,  $\bar{D}_+$  die Zeichen  $D_-$ ,  $D^-$ ,  $D_+$ ,  $D^+$ . Es ist darauf zu achten, daß die sonst auch gelegentlich für die „Ableitung“ gebrauchte Bezeichnung „Derivierte“, in diesem Sinne nicht mehr verwendet werden darf.

Die oben eingeführten Begriffe lassen sich unmittelbar auf endliche Funktionen ausdehnen, die statt in einem Intervall, in allgemeineren Bereichen definiert sind; vgl. hierzu Carathéodory (5), S. 515 ff.

Bezüglich der Existenz der Ableitungen gilt der Satz: *Jede endliche Funktion, die in  $\langle a, b \rangle$  von beschränkter Schwankung ist (insbesondere also jede monotone Funktion), besitzt fast überall<sup>1)</sup> in  $\langle a, b \rangle$  endliche Differentialquotienten* (Lebesgue, (14), S. 128; vgl. auch B. Levi, *Atti della R. Accad. d. Lincei, Rendiconti* (5) 15<sub>1</sub> (1906) 437, sowie Kamke (13), S. 71 ff.).

1) Vgl. Anm. auf S. 1063.

Für stetige Funktionen gilt ein entsprechender Satz nicht; vielmehr gibt es stetige Funktionen, die in keinem Punkte differenzierbar sind (vgl. Rep. **I**<sub>1</sub> S. 458 f. sowie K. Knopp, *Math. Zeitschr.* **2** (1918) 1—26). Ob es stetige Funktionen gibt, die in keinem Punkte eine rechte Ableitung (oder eine linke) haben, ist unbekannt.

Jedoch sind bei stetigen und sogar bei beliebigen endlichen Funktionen noch folgende Aussagen möglich: *Es sei  $f(x)$  eine beliebige endliche Funktion im Intervall  $\langle a, b \rangle$ ; die Punkte, in denen sowohl die vordere wie die hintere Ableitung existieren, aber  $f'_-(x) \neq f'_+(x)$  ist, bilden eine höchstens abzählbare Menge* (für stetige Funktionen: B. Levi, *Atti della R. Accad. d. Lincei, Rendiconti* (5) **15**<sub>1</sub>, (1906) 437 f.; allgemein: G. Chisholm Young, *Acta Math.* **37** (1914) 141—148). *Für jede in  $\langle a, b \rangle$  endliche Funktion hat die Menge der Punkte, in denen eine rechte oder linke Ableitung mit einem der Werte  $+\infty$  oder  $-\infty$  existiert, das Maß 0* (St. Banach, *C. R.* **173** (1921) 457—459). *Insbesondere kann also eine in  $\langle a, b \rangle$  endliche und stetige Funktion eine unendliche Ableitung höchstens in einer Menge vom Maß 0 besitzen* (N. Lusin, *Annali di Mat.* (3) **26** (1917) 81—88). Für die Menge vom Maß 0 kann dabei eine Teilmenge beliebig vorgeschrieben werden, sogar dann, wenn die Funktion noch weitere Bedingungen erfüllen soll. Das zeigt die von H. Bauer (*Monatsh. f. Math.* **26** (1915) 193 f.; vgl. auch Kamke (13) S. 133 f.) bewiesene Tatsache: *Ist  $\mathfrak{M}$  eine beliebige Menge vom Maß 0 im Intervall  $\langle a, b \rangle$ , so gibt es in  $\langle a, b \rangle$  eine stetige und monoton zunehmende Funktion, die in jedem Punkte von  $\mathfrak{M}$  (aber ev. auch noch außerhalb  $\mathfrak{M}$ ) eine Ableitung mit dem Werte  $+\infty$  hat.*

Jede der vier Derivierten  $\underline{D}_- f(x)$ ,  $\overline{D}_- f(x)$ ,  $\underline{D}_+ f(x)$ ,  $\overline{D}_+ f(x)$  kann, wenn für  $f(x)$  eine beliebige stetige Funktion genommen werden darf, in einem einzelnen Punkte  $\xi$  jeden der Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  annehmen, und zwar jede Derivierte unabhängig davon, welchen Wert die anderen Derivierten haben, wenn nur die selbstverständlichen Bedingungen

$$\underline{D}_- f(x) \leq \overline{D}_- f(x), \quad \underline{D}_+ f(x) \leq \overline{D}_+ f(x)$$

erfüllt sind. Es ist leicht, derartige Funktionen zu konstruieren. Im ganzen Definitionsbereich einer stetigen und sogar einer beliebigen endlichen Funktion können die vier Derivierten aber nicht mehr für jeden einzelnen Punkt willkürlich festgelegt werden. Das zeigt z. B. folgender Satz von G. Chisholm Young



(*Acta Math.* **37** (1914) 141—148): Ist  $f(x)$  im Intervall  $\langle a, b \rangle$  endlich, so ist fast überall im Intervall

$$\overline{D}_+ f(x) \geq \underline{D}_- f(x) \text{ und } \overline{D}_- (fx) \geq \underline{D}_+ (fx).$$

Mit den oben angeführten trivialen Ungleichungen über die Derivierten ist also bei jeder endlichen Funktion fast in jedem Punkte irgendeine obere der vier Derivierten mindestens so groß wie irgendeine andere untere.

Dieses Ergebnis ist noch einer weitgehenden Verschärfung fähig: Wenn  $f(x)$  im Intervall  $\langle a, b \rangle$  endlich ist, ist fast in jedem Punkte des Intervalls  $f'(x)$  vorhanden und endlich oder  $\overline{D} f(x) = +\infty$  und  $\underline{D} f(x) = -\infty$ ; genauer gilt fast in jedem Punkte des Intervalls eine der folgenden vier Zeilen (jedoch nicht notwendig dieselbe Zeile für das ganze Intervall):

1.  $f'(x)$  existiert und ist endlich;
2.  $\overline{D}_+ f(x) = \overline{D}_- (fx) = +\infty$ ,  $\underline{D}_+ f(x) = \underline{D}_- f(x) = -\infty$ ;
3.  $\overline{D}_+ f(x) = +\infty$ ,  $\underline{D}_- f(x) = -\infty$ ,  $\underline{D}_+ f(x) = \overline{D}_- f(x) = \text{endlich}$
4.  $\overline{D}_- f(x) = +\infty$ ,  $\underline{D}_+ f(x) = -\infty$ ,  $\underline{D}_- f(x) = \overline{D}_+ f(x) = \text{endlich}$ .

Sonstige denkbare und hier nicht angeführte Fälle treten also höchstens in den Punkten einer Menge vom Maß 0 ein (für stetige Funktionen: A. Denjoy, *Journ. de Math.* (7) **1** (1915) 174—193; für meßbare Funktionen: G. Chisholm Young, *Lond. M. S. Proc.* **15** (1916) 360—384; allgemein: S. Saks, *Fund. Math.* **5** (1924) 98—104). Es muß als sehr merkwürdig angesehen werden, daß ohne irgend eine Voraussetzung über die Funktion ein derart allgemeiner Satz wie der vorangehende gilt.

Betrachtet man die Ableitungen selber als Funktionen, so gilt nach G. Darboux (*Ann. de l'Éc. Norm.* (2) **4** (1875) 109 f.) der Satz: Wenn die Funktion  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  differenzierbar und  $a \leq \alpha < \beta \leq b$  ist, nimmt die Ableitung  $f'(x)$  jeden zwischen  $f'(\alpha)$  und  $f'(\beta)$  liegenden Wert mindestens einmal an. Diese Eigenschaft kommt zwar auch jeder stetigen Funktion zu (vgl. S. 36); man darf daraus aber nicht auf die Stetigkeit der Ableitung schließen. Vielmehr braucht die Ableitung in keinem Teilintervall stetig zu sein (G. Darboux, a. a. O.). Ein ein-

faches Beispiel einer Funktion, deren Ableitung in einem Punkte unstetig ist, wird geliefert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0; \end{cases}$$

hier ist

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \end{cases}$$

also  $x = 0$  ein Unstetigkeitspunkt der Ableitung.

Wenn  $f(x)$  in jedem Punkte des Intervalls differenzierbar ist, gehört  $f'(x)$  höchstens zur ersten Baireschen Klasse, ist also höchstens punktiert unstetig. Dasselbe gilt von  $f'_+(x)$  und  $f'_-(x)$ , wenn die eine oder andere Ableitung im ganzen Intervall existiert. Diese Tatsachen folgen fast unmittelbar aus der Definition der Baireschen Klassen und der Ableitungen.

Über die Derivierten gilt folgendes: Ist  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  endlich und meßbar, so ist jede Derivierte daselbst auch meßbar (St. Banach, *Fund. Math.* **3** (1922) 128—132). Ist  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  überdies stetig, so gehört jede Derivierte höchstens zur zweiten Baireschen Klasse. (Lebesgue (14), S. 121; vgl. auch H. Lebesgue, *Atti della R. Acc. d. Linc., Rend.* (5) **15**<sub>2</sub> (1906) 3 ff.; sowie St. Banach, a. a. O.).

Wenn in irgendeinem Punkt  $x_0$  des Definitionsbereiches  $\langle a, b \rangle$  einer endlichen stetigen Funktion  $f(x)$  irgendeine der sechs Derivierten stetig ist, gilt dies auch für die übrigen fünf Derivierten; die Funktion ist dann im Punkt  $x_0$  differenzierbar. Dies folgt leicht aus dem Satz von U. Dini ((6) u. (7), § 146 f.): Es sei  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  endlich und stetig, und es sei  $g$  die untere,  $G$  die obere Grenze aller für  $x_1 \neq x_2$  innerhalb  $\langle a, b \rangle$  entstehenden Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1};$$

dann ist

$$\begin{aligned} \liminf_{a \leq x \leq b} \underline{D}_- f(x) &= \liminf_{a \leq x \leq b} \underline{D}_- f(x) = \liminf_{a \leq x \leq b} \underline{D}_+ f(x) \\ &= \liminf_{a \leq x \leq b} \overline{D}_+ f(x) = g; \end{aligned}$$

d. h. die vier Derivierten, und daher auch  $\underline{D} f(x)$  und  $\overline{D} f(x)$  haben in  $\langle a, b \rangle$  dieselbe untere Grenze. Ebenso haben die

sämtlichen Derivierten in  $\langle a, b \rangle$  in dem Intervall dieselbe obere Grenze, nämlich  $G$ .

Über die Frage, wann eine Funktion  $\varphi(x)$  Ableitung einer Funktion  $f(x)$  ist, ist folgendes zu sagen: Wenn eine Funktion  $\varphi(x)$  eine Ableitung ist, hat sie nach S. 1068 höchstens in einer Menge vom Maß 0 die Werte  $+\infty$  oder  $\infty$  und ist nach S. 1070 meßbar. N. Lusin (*Annali di Mat.* (3) **26** (1917) 81—95) hat dieses in folgender Weise umkehren können: Wenn die Funktion  $\varphi(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  meßbar und fast überall endlich ist, gibt es eine stetige Funktion, deren Ableitung fast im ganzen Intervall existiert und gleich  $f(x)$  ist.

## § 10. Allgemeines über den Integralbegriff.

### Das Riemannsche Integral.

Auf das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

hat die Aufgabe geführt: den Inhalt des Flächenstücks (Fig. 8) zu bestimmen, das von der zunächst möglichst einfach gedachten Kurve

$$y = f(x) \quad f(x) \geq 0,$$

der  $x$ -Achse und den Ordinaten in den Punkten  $a$  und  $b$  begrenzt wird. Für diese Aufgabe, den Inhalt einer zweidimensionalen Punktmenge zu bestimmen, liegen durch die Begriffsbildungen von Peano-Jordan (§ 2) und Lebesgue (§ 4) zwei Lösungen vor. Je nachdem man die eine oder die andere Lösung zugrunde legt, wird man zu dem Integralbegriff von Riemann oder Lebesgue geführt.

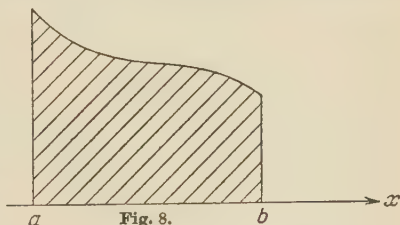


Fig. 8.

Der Inhalts- bzw. Maßbegriff wird hierbei jedoch nicht für Punktmenge n allge meinst er Art gebraucht, vielmehr haben die bei der obigen Aufgabe vorkommenden Punktmenge n immer die Eigenschaft, daß mit einem Punkt  $x_0, y_0$  auch alle Punkte  $x_0, ty_0$  mit  $0 \leq t \leq 1$  der Menge angehören; mit andern Worten:

die auftretenden Punktmengen sind sog. Ordinatenmengen, deren Punkte  $x, y$  durch die Ungleichungen

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

bestimmt sind und die mit  $\mathcal{Y}(f, a, b)$  bezeichnet seien.

Indem wir wieder mit  $\bar{I}(\mathcal{M})$  und  $\underline{I}(\mathcal{M})$  den äußeren bzw. inneren Peano-Jordanschen Inhalt bezeichnen, definieren wir (erste Fassung) das obere bzw. untere Riemannsche Integral einer beschränkten Funktion  $f(x) \geq 0$  zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  durch

$$\int_{(R)}^b f(x) dx = \bar{I}(\mathcal{Y}(f, a, b)) \quad \text{bzw.} \quad \int_{(R)}^b f(x) dx = \underline{I}(\mathcal{Y}(f, a, b)).$$

Diese beiden Integrale existieren für jede beschränkte Funktion  $f(x) \geq 0$ . Wenn beide Integrale übereinstimmen, nennt man den gemeinsamen Wert das Riemannsche Integral schlechthin,

$$\int_{(R)}^b f(x) dx = I(\mathcal{Y}(f, a, b)),$$

und die Funktion  $f(x)$  integrierbar im Riemannschen Sinne.<sup>1)</sup> Wenn auch das obere und untere Integral erst von G. Darboux (*Ann. de l'Ec. Norm.* (2) **4** (1875) 57ff.) eingeführt sind und Riemanns Definition (Habil.-Schrift, Göttingen 1854 = *Ges. math. Werke* S. 225f.), wie auch Darboux's dem Wortlaut nach anders ist, so sind die eingeführten Bezeichnungen doch berechtigt, da das Wesentliche an den Definitionen durchaus Riemanns Verdienst ist (vgl. auch Rep. **I**<sub>1</sub>, 487—489).

Geht man auf die Definition des Peano-Jordanschen Inhalts zurück, so lassen sich das obere und untere R-Integral auch folgendermaßen definieren (zweite Fassung): Es werde das Integrationsintervall  $\langle a, b \rangle$  durch die Punkte

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_p = b$$

in  $p$  Teilintervalle  $i_\nu = \langle x_{\nu-1}, x_\nu \rangle$  zerlegt. Diese Zerlegung heiße  $\mathcal{Z}$ .

---

1) Die drei oben definierten Integrale werden künftig kürzer als oberes bzw. unteres R-Integral und R-Integral bezeichnet. Statt „integrierbar im Riemannschen Sinne“ werden wir zumeist R-integrierbar oder sogar nur integrierbar sagen. Vgl. hierzu S. 1078.

Es werde ferner

$$\mu(i_\nu) = \inf_{x_{\nu-1} \leq x \leq x_\nu} f(x), \quad M(i_\nu) = \sup_{x_{\nu-1} \leq x \leq x_\nu} f(x)$$

gesetzt. Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \sup \sum_{\nu=1}^p |i_\nu| \mu(i_\nu),$$

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \sum_{\nu=1}^p |i_\nu| M(i_\nu),$$

wobei zur Konkurrenz alle möglichen Zerlegungen  $\mathfrak{Z}$  des Intervalls  $\langle a, b \rangle$  zugelassen sind. Die hier rechts auftretenden Summen sind offenbar gerade die Flächeninhalte von Rechtecken, welche nur aus Punkten der Ordinatenmenge bestehen bzw. die ganze Ordinatenmenge enthalten, also gerade die Flächeninhalte von solchen Rechtecken, mit deren Hilfe der Peano-Jordansche Inhalt definiert wird.

Diese zweite Fassung der Definition des Integrals ist im wesentlichen die von G. Darboux gegebene; für die von Riemann gegebene Formulierung vgl. Rep. I<sub>1</sub>, S. 487.

Die Befreiung von der bisher noch geltenden Einschränkung  $f(x) \geq 0$  geschieht so, daß die einzelnen Ordinaten mit dem ihnen zukommenden Vorzeichen in Anrechnung gebracht werden, d. h. man setze

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{wenn } f(x) > 0, \\ 0, & \text{wenn } f(x) \leq 0; \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } f(x) > 0, \\ -f(x), & \text{wenn } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

ist. Dann sind  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  beide  $\geq 0$  und beschränkt; es existieren daher ihre unteren und oberen R-Integrale, und wir können nun definieren:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx,$$



und, falls  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  beide integrierbar sind,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx.$$

Für jede beschränkte Funktion existieren daher oberes und unteres R-Integral, jedoch nicht immer das R-Integral schlechthin; denn z. B. ist für die Funktion (6) auf S. 1054 offenbar

$$\int_0^1 f(x) dx = 1, \quad \int_0^1 f(x) dx = 0,$$

also das Integral schlechthin nicht vorhanden.

Der Vorzug der ersten Fassung der Integraldefinition liegt in der größeren Anschaulichkeit, der Vorzug der zweiten wie der Riemannschen (vgl. S. 487) Fassung ist, daß sie nicht nur für Funktionen  $f(x) \geq 0$ , sondern für beliebige beschränkte Funktionen gilt.

Für die Existenz des R-Integrals einer beschränkten Funktion  $f(x)$  im Intervall  $\langle a, b \rangle$  ist notwendig und hinreichend, daß die Menge der Unstetigkeitspunkte von  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  das Maß 0 hat; oder, was dasselbe ist, daß für jedes  $\eta > 0$  die Menge der Punkte, in denen  $f(x)$  eine Schwankung  $\geq \eta$  besitzt, den Peano-Jordanschen Inhalt 0 hat (Lebesgue (14), S. 29). Hieraus ergibt sich die Integrierbarkeit der Funktion (3) auf S. 1053, da diese nur abzählbar viele Unstetigkeitspunkte hat; übrigens hat das Integral in jedem Intervall den Wert 0.

Von den Rechenregeln (vgl. zu diesem Rep. I<sub>1</sub>, S. 488, 490, 494—497) heben wir folgende vier Gruppen hervor:

1. Wenn  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  beschränkt und integrierbar ist, gilt dasselbe von  $|f(x)|$ .

2. Wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  beschränkt und integrierbar sind, gilt dasselbe von  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  und, falls  $|g(x)|$  eine positive untere Schranke hat, auch von  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

3. Es sei  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  beschränkt und integrierbar,

$$A = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), \quad B = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

und  $g(y)$  in  $\langle A, B \rangle$  stetig; dann ist auch  $g(f(x))$  in  $\langle a, b \rangle$  integrierbar (P. du Bois-Reymond, *Math. Ann.* **16** (1880) 112 und **20** (1882) 122—124; übrigens folgt diese Tatsache

auch unmittelbar aus dem angeführten Kriterium für die Integrierbarkeit).

Dagegen braucht eine integrierbare Funktion von einer stetigen Funktion nicht integrierbar zu sein, also erst recht nicht (gegen die Ansicht von P. du Bois-Reymond, *Math. Ann.* **20** (1882), S. 124) eine integrierbare Funktion von einer integrierbaren Funktion (zum letzteren vgl. auch Lebesgue (14), S. 30f.). Denn man wähle etwa im Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$  irgendeine nirgends dichte perfekte Menge  $\mathfrak{P}$  positiven Maßes, die durch Herausnahme der abzählbar vielen offenen Intervalle  $i_1, i_2, \dots$  aus  $\langle 0, 1 \rangle$  erzeugt ist. Ist  $i_\nu = (a_\nu, b_\nu)$ , so werde gesetzt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b_\nu - a_\nu}{2} - \left| \frac{b_\nu + a_\nu}{2} - x \right| & \text{für jedes } x \text{ in } i_\nu \text{ und } \nu = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{wenn } x \text{ zu } \mathfrak{P} \text{ gehört;} \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y = 0, \\ 1 & \text{für } y \neq 0. \end{cases}$$

Dann ist  $f(x)$  stetig in  $\langle 0, 1 \rangle$  und  $g(y)$  überall integrierbar, aber  $g(f(x))$  unstetig in der Menge  $\mathfrak{P}$ , also da  $\mathfrak{P}$  positives Maß hat, nicht integrierbar.

4. Es möge die Folge  $f_1(x), f_2(x), \dots$  aus Funktionen bestehen, die sämtlich in  $\langle a, b \rangle$  beschränkt und integrierbar sind, und gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergieren; dann ist auch  $f(x)$  beschränkt und integrierbar und

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Nur eine andere Formulierung dieses Satzes ist der folgende: Wenn die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

in  $\langle a, b \rangle$  gleichmäßig konvergiert und jedes  $f_n(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  beschränkt und integrierbar ist, gilt dieses auch von  $f(x)$ , und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Dieser Satz dürfte auf K. Weierstraß zurückgehen.

Wird in dem obigen Satz nur einfache statt gleichmäßiger Konvergenz vorausgesetzt, so gilt er nicht mehr. Das hat G. Darboux (*Ann. de l'Éc. Norm.* (2) **4** (1875) 84) durch folgendes Beispiel gezeigt:

$$(1) \quad f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}.$$

Hier ist

$$\int_0^1 (R) f_n(x) dx = \left[ -e^{-n^2 x^2} \right]_0^1 = 1 - e^{-n^2} \rightarrow 1,$$

während  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ , also

$$\int_0^1 (R) f(x) dx = 0 \quad \text{ist.}$$

Es gilt aber noch folgender von C. Arzelà (1885 veröffentlicht; ausführlicher dargestellt in *Bologna Mem.* (5) **8** (1899—1900) 723—725; vgl. auch *Encykl.* (1), S. 1077, Anm. 687) bewiesener Satz: *Es seien die Funktionen  $f_1(x), f_2(x), \dots$  sämtlich in  $\langle a, b \rangle$  integrierbar; sie seien ferner in  $\langle a, b \rangle$  gleichmäßig beschränkt, d. h. es möge eine Zahl  $A > 0$  geben, so daß für alle  $n$  und alle  $a \leq x \leq b$*

$$|f_n(x)| < A$$

*gilt; endlich existiere*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

*und sei in  $\langle a, b \rangle$  integrierbar; dann ist*

$$\int_a^b (R) f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (R) f_n(x) dx.$$

(Vgl. hierzu auch S. 1083.) Bei dem vorher angeführten Beispiel (1) sind alle Bedingungen dieses Satzes erfüllt bis auf eine: die  $f_n(x)$  sind nicht gleichmäßig beschränkt, wie  $x = \frac{1}{n}$  zeigt. Für notwendige und hinreichende Bedingungen der Vertauschbarkeit von Integration und Limesprozeß vgl. C. Arzelà, *Bologna Mem.* (5) **8** (1899—1900) 706—725 und *Bologna Rend.* (2) **10** (1905—1906) 32—40.

Endlich sei der sog. *Fundamentalsatz der Integralrechnung* angeführt: *Es sei  $F(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  differenzierbar,  $F'(x) = f(x)$ , und  $f(x)$  beschränkt und integrierbar; dann ist für  $a \leq x \leq b$*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x) dx.$$

Die Voraussetzung, daß die Ableitung integrierbar sei, ist hierbei wesentlich, da eine Ableitung, auch wenn sie beschränkt ist, nicht integrierbar zu sein braucht. Ein Beispiel einer beschränkten, nicht integrierbaren Ableitung hat V. Volterra (*Giornale di Mat.* **19** (1881) 333 ff.) gegeben.

Für die uneigentlichen R-Integrale sei verwiesen auf *Rep. I*<sub>1</sub>, S. 491—494.

## § 11. Das Lebesguesche Integral beschränkter Funktionen.

Wie am Anfang von § 10 erwähnt, ist das Lebesguesche Integral mit dem Lebesgueschen Maß von Punktmengen verknüpft; und zwar wie folgt:

Es sei  $f(x)$  im Intervall  $\langle a, b \rangle$  beschränkt und  $\geq 0$ . Die drei Lebesgueschen Integrale<sup>1)</sup> werden definiert durch

$$\int_a^b f(x) dx = \text{oberes L-Integral} = \overline{\mathfrak{Y}}(f, a, b),$$

$$\int_a^b f(x) dx = \text{unteres L-Integral} = \underline{\mathfrak{Y}}(f, a, b),$$

$$\int_a^b f(x) dx = \text{L-Integral} = |\mathfrak{Y}(f, a, b)|;$$

dabei bedeutet  $\mathfrak{Y}(f, a, b)$  wie auf S. 1072 die durch  $f(x)$ ,  $a$  und  $b$  bestimmte Ordinatenmenge; ferner bedeuten  $\mathfrak{Y}$ ,  $\underline{\mathfrak{Y}}$  und  $|\mathfrak{Y}|$  das obere bzw. untere zweidimensionale Lebesguesche Maß (vgl. § 4) und das zweidimensionale Lebesguesche Maß schlechthin. Das obere und untere L-Integral existieren für jede beschränkte Funktion  $f(x) \geq 0$ . Das L-Integral schlechthin existiert genau dann, wenn die Ordinatenmenge  $\mathfrak{Y}(f, a, b)$  meßbar ist oder, was dasselbe besagt, wenn unteres und oberes L-Integral übereinstimmen; ihr gemeinsamer Wert ist das L-Integral.

1) Abgekürzt: L-Integrale.

Der Übergang zum L-Integral beliebiger beschränkter Funktionen geschieht wie beim R-Integral folgendermaßen: Wir setzen, wenn  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  beschränkt ist,

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{wenn } f(x) > 0, \\ 0, & \text{wenn } f(x) \leq 0; \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } f(x) > 0, \\ -f(x), & \text{wenn } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

ist, und definieren

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx;$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx.$$

Das obere und untere L-Integral existieren für jede beschränkte Funktion.

Die Funktion  $f(x)$  heißt in  $\langle a, b \rangle$  integrierbar<sup>1)</sup>, wenn das obere und untere Integral übereinstimmen; der gemeinsame Wert wird als ihr L-Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet.

Das L-Integral umfaßt das R-Integral; genauer ist für jede in  $\langle a, b \rangle$  beschränkte Funktion  $f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx;$$

wenn  $f(x)$  überdies in  $\langle a, b \rangle$  integrierbar ist, ist die Funktion auch in  $\langle a, b \rangle$  integrierbar und

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Die Definition des L-Integrals wird noch folgendermaßen erweitert: Es sei  $\mathfrak{B}$  eine beschränkte Menge auf

1) Für die Bezeichnung „integrierbar“ vgl. Anm. 1 auf S. 1072.



der  $x$ -Achse, etwa im Intervall  $\langle a, b \rangle$  gelegen, und auf  $\mathfrak{P}$  sei eine beschränkte Funktion  $f(x)$  gegeben. Die Integrale von  $f(x)$ , erstreckt über die Menge  $\mathfrak{P}$  als Integrationsbereich, werden dann definiert durch

$$\int_{\mathfrak{P}} \overline{f}(x) dx = \int_a^b \overline{f^*}(x) dx, \quad \int_{\mathfrak{P}} f(x) dx = \int_a^b f^*(x) dx$$

und, wofern das zweite der folgenden Integrale existiert,

$$\int_{\mathfrak{P}} f(x) dx = \int_a^b f^*(x) dx;$$

dabei soll die Hilfsfunktion

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für die Punkte von } \mathfrak{P}, \\ 0 & \text{für die nicht zu } \mathfrak{P} \text{ gehörenden Punkte} \end{cases}$$

sein.

Aus der Existenz des L-Integrals

$$\int_{\mathfrak{P}} f(x) dx$$

einer über  $\mathfrak{P}$  beschränkten Funktion folgt, daß für jedes  $y \geq 0$  die Mengen (vgl. S. 1062)  $\mathfrak{M}(f > y)$  und  $\mathfrak{M}(f < -y)$  meßbar sind. Ob auch  $\mathfrak{M}(f = 0)$  meßbar ist, hängt davon ab, ob  $\mathfrak{P}$  meßbar ist. Da, wie aus der Definition unmittelbar hervorgeht, an der Existenz und dem Werte des Integrals nichts geändert wird, wenn man noch in weiteren Punkten der  $x$ -Achse die Funktion definiert mit dem Werte 0, kann der Definitionsbereich  $\mathfrak{P}$  der Funktion stets zu einer meßbaren Menge vervollständigt werden, ohne daß an der Existenz und dem Wert des Integrals etwas geändert wird. Daher setzt man, ohne daß dies im folgenden stets noch besonders betont wird, den Integrationsbereich  $\mathfrak{P}$  stets als meßbar voraus. Es gilt dann der wichtige Satz:

*Für die Existenz des L-Integrals*

$$\int_{\mathfrak{P}} f(x) dx$$

*einer beschränkten Funktion  $f(x)$  ist notwendig und hinreichend, daß sie über  $\mathfrak{P}$  meßbar ist (vgl. § 8).*

Die oben gegebene Formulierung für die Definition des L-Integrals hat den Vorzug, daß sie erkennen läßt, wie man zu

ihm ganz naturgemäß kommt. Ihr Nachteil ist, daß in sie die Funktion  $f(x)$  in einer für das Rechnen mit Integralen wenig brauchbaren Weise eingeht. Wir geben daher noch zwei andere Darstellungen des L-Integrals. Die erste, die häufig der Theorie auch als Definition des L-Integrals zugrunde gelegt wird, lautet:

Es sei  $f(x)$  eine beschränkte meßbare<sup>1)</sup> Funktion über  $\mathfrak{P}$ , etwa  $A < f(x) < B$ . Es sei  $\mathfrak{Z}$  eine Zerlegung

$$A = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_p = B$$

des Intervalls  $\langle A, B \rangle$ . Es sei endlich<sup>2)</sup>

$$s(\mathfrak{Z}) = \sum_{v=1}^p y_{v-1} |\mathfrak{M}(y_{v-1} \leq f < y_v)|$$

$$S(\mathfrak{Z}) = \sum_{v=1}^p y_v |\mathfrak{M}(y_{v-1} \leq f < y_v)|.$$

Dann ist

$$s(\mathfrak{Z}) \leq \int_{\mathfrak{P}} f(x) dx \leq S(\mathfrak{Z})$$

und

$$\text{fin sup } s(\mathfrak{Z}) = \text{fin inf } S(\mathfrak{Z}) = \int_{\mathfrak{P}} f(x) dx,$$

wobei zur Konkurrenz alle eben beschriebenen Zerlegungen  $\mathfrak{Z}$  zugelassen sind.

Diese Darstellung weicht von der bei der Definition des R-Integrals üblichen vor allem darin ab, daß hier nicht von einer Einteilung des auf der  $x$ -Achse gegebenen Intervalls, sondern von einer Einteilung des auf der  $y$ -Achse zur Verfügung stehenden Wertebereiches der Funktion ausgegangen wird und dann die Menge der Punkte  $x$  festgestellt wird, zu denen „annähernd gleiche“ Ordinaten gehören.

Die zweite Darstellung, die der üblichen Definition des R-Integrals näherkommt, lautet:

Es sei  $f(x)$  eine beschränkte meßbare<sup>1)</sup> Funktion über  $\mathfrak{P}$ . Es sei

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_p$$

1) Da nur meßbare Funktionen integrabel sind, schränkt diese Voraussetzung die Allgemeinheit nicht ein.

2) Es bezeichnet  $|\mathfrak{M}|$  das lineare Maß von  $\mathfrak{M}$ . Von jetzt ab kommen überhaupt nur noch lineare Maße vor.

eine Zerlegung  $\mathfrak{z}$  der Menge  $\mathfrak{P}$  in endlich viele meßbare und paarweise elementenfremde Mengen. Es sei weiter

$$\left. \begin{aligned} \mu_v &= \text{fin inf } f(x) \\ M_v &= \text{fin sup } f(x) \end{aligned} \right\} \text{ für die Punkte von } \mathfrak{P}_v.$$

Endlich werde

$$\sigma(\mathfrak{z}) = \sum_{v=1}^p \mu_v |\mathfrak{P}_v|, \quad \Sigma(\mathfrak{z}) = \sum_{v=1}^p M_v |\mathfrak{P}_v|$$

gesetzt. Dann ist

$$\sigma(\mathfrak{z}) \leq \int_{\mathfrak{P}} f(x) dx \leq \Sigma(\mathfrak{z})$$

und, wenn zur Konkurrenz alle oben beschriebenen Zerlegungen  $\mathfrak{z}$  zugelassen werden,

$$\text{fin sup } \sigma(\mathfrak{z}) = \text{fin inf } \Sigma(\mathfrak{z}) = \int_{\mathfrak{P}} f(x) dx.$$

Hiernach besteht der Unterschied zwischen dem R-Integral und dem L-Integral darin, daß für die Aufstellung der approximierenden Summen bei dem R-Integral das Integrationsintervall  $\langle a, b \rangle$  in getrennte Teilintervalle bei dem L-Integral dagegen in beliebige elementenfremde meßbare Teilmengen zerlegt wird.

Die Rechenregeln für das L-Integral stimmen zum großen Teil mit denen für das R-Integral überein, sind nur vielfach allgemeiner. Es seien folgende angeführt:

1. Wenn  $f(x)$  über  $\mathfrak{P}$  integrabel ist, ist  $f(x)$  auch über jede meßbare Untermenge  $\mathfrak{P}_1$  von  $\mathfrak{P}$  integrabel. Ist  $f(x)$  über jede der Mengen  $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots$  integrabel, wobei  $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots$  höchstens abzählbar viele Mengen mit beschränkter Summe  $\mathfrak{Q}$  sind, und ist  $f(x)$  über  $\mathfrak{Q}$  beschränkt, so ist  $f(x)$  auch über  $\mathfrak{Q}$  integrabel.

2. Es sei  $f(x)$  über  $\mathfrak{P}$  integrabel und

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \dots,$$

wo die  $\mathfrak{P}_v$  höchstens abzählbar viele meßbare und paarweise elementenfremde Mengen sind. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{P}} f(x) dx = \sum_v \int_{\mathfrak{P}_v} f(x) dx.$$

3. Wenn  $f(x)$  über  $\mathfrak{P}$  integrabel ist, gilt dasselbe von  $|f(x)|$ , und es ist

$$\left| \int_{\mathfrak{P}} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathfrak{P}} |f(x)| dx.$$

4. Wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  über  $\mathfrak{P}$  integrabel sind, gilt dasselbe von  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  und, falls  $|g(x)|$  eine positive untere Schranke hat, auch von  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

5. Wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  über  $\mathfrak{P}$  integrabel sind, ist

$$\int_{\mathfrak{P}} \{f(x) + g(x)\} dx = \int_{\mathfrak{P}} f(x) dx + \int_{\mathfrak{P}} g(x) dx.$$

6. Wenn  $f(x)$  über  $\mathfrak{P}$  integrabel ist, ist für jede Konstante  $c$

$$\int_{\mathfrak{P}} cf(x) dx = c \int_{\mathfrak{P}} f(x) dx.$$

7. Erster Hauptsatz: Es seien  $f_1(x), f_2(x), \dots$  abzählbar viele integrable Funktionen über  $\mathfrak{P}$  und gleichmäßig beschränkt, d. h. es möge eine Zahl  $A > 0$  geben, so daß für jedes  $x$  der Menge  $\mathfrak{P}$  und jedes  $n$

$$(a) \quad |f_n(x)| < A$$

ist. Es existiere ferner

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Dann ist auch  $f(x)$  integrabel und

$$\int_{\mathfrak{P}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{P}} f_n(x) dx.$$

Dieser Satz kann auch so formuliert werden:

Erfüllen die Funktionen der Folge  $f_1(x), f_2(x), \dots$  die obigen Voraussetzungen mit Ausnahme von (a) und (b) und ist statt dessen  $f_1(x) + \dots + f_n(x)$  gleichmäßig in  $n$  und  $x$  beschränkt und außerdem  $f_1(x) + f_2(x) + \dots$  für jedes  $x$  von  $\mathfrak{P}$  konvergent, so ist die Summe der Reihe eine über  $\mathfrak{P}$  integrable Funktion und

$$\int_{\mathfrak{P}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{P}} f_n(x) dx;$$

d. h. man kann gliedweise integrieren.

Dieser Satz macht den einen großen Vorzug des L-Integrals gegenüber dem R-Integral aus. Während nämlich bei dem entsprechenden Satz für das R-Integral (vgl. S. 1075) die gleichmäßige Konvergenz vorausgesetzt wurde, um die Integrierbarkeit der Summe behaupten zu können, wird hier neben der einfachen Konvergenz nur die gleichmäßige Beschränktheit vorausgesetzt.

Übrigens folgt aus diesem Satz auch unmittelbar der auf S. 1076 angeführte Satz von C. Arzelà.

8. Wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  über  $\mathfrak{P}$  integrabel sind und  $f(x) \leq g(x)$  ist, gilt

$$\int_{\mathfrak{P}} f(x) dx \leq \int_{\mathfrak{P}} g(x) dx.$$

9. Erster Mittelwertsatz: Es seien  $f(x)$  und  $g(x)$  über  $\mathfrak{P}$  integrabel,  $\mu \leq f(x) \leq M$  und  $g(x) \geq 0$ . Dann ist

$$\mu \int_{\mathfrak{P}} g(x) dx \leq \int_{\mathfrak{P}} f(x) g(x) dx \leq M \int_{\mathfrak{P}} g(x) dx.$$

10. Zweiter Mittelwertsatz: Es sei  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  integrabel und  $g(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  monoton. Dann gibt es im Intervall  $\langle a, b \rangle$  einen Punkt  $\xi$ , so daß

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx$$

ist. Für Verallgemeinerungen dieses Satzes siehe z. B. H. Lebesgue, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) 27 (1910) 442 ff.

11. Schwarzsche Ungleichheit: Wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  über  $\mathfrak{P}$  integrabel sind, ist

$$\left\{ \int_{\mathfrak{P}} f(x) g(x) dx \right\}^2 \leq \int_{\mathfrak{P}} \{f(x)\}^2 dx \int_{\mathfrak{P}} \{g(y)\}^2 dy.$$

12. Es sei  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  integrabel,  $g(x)$  beschränkt und fast überall <sup>1)</sup>  $f(x) = g(x)$ ; dann ist  $g(x)$  integrabel und

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Umgekehrt: wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  integrabel sind und für jedes  $a \leq x \leq b$

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^x g(x) dx$$

gilt, ist  $f(x) = g(x)$  fast überall in  $\langle a, b \rangle$ .

1) Vgl. Anm. auf S. 1063.



13. Ist  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  integabel, so hat

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx \quad (a \leq x \leq b)$$

*beschränkte Differenzenquotienten*

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (a \leq x_1 < x_2 \leq b),$$

*ist also insbesondere stetig und von beschränkter Schwankung.*

14. Wenn  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  integabel ist, so heißt für jede Konstante  $c$  die für  $a \leq x \leq b$  existierende Funktion

$$F(x) = c + \int_a^x f(x) dx$$

ein unbestimmtes L-Integral von  $f(x)$ . Nach der in 13, angegebenen Eigenschaft des Integrals ist  $F(x)$  von beschränkter Schwankung und daher nach S. 1067 fast überall in  $\langle a, b \rangle$  differenzierbar. Es werde nach C. Carathéodory (Lit.-Verz. 5, S. 547) unter der Ableitung  $\dot{F}(x)$  der Funktion  $F(x)$  von beschränkter Schwankung verstanden

$$\dot{F}(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{an den Stellen, wo } F'(x) \text{ existiert,} \\ 0 & \text{für jedes andere } x.^1 \end{cases}$$

Die Ableitung  $\dot{F}(x)$  ist in  $\langle a, b \rangle$  meßbar und beschränkt, also integabel.

Der Fundamentalsatz der Integralrechnung kann nunmehr für das L-Integral folgendermaßen ausgesprochen werden:

*Zweiter Hauptsatz: Dafür, daß eine in  $\langle a, b \rangle$  definierte Funktion  $F(x)$  ein unbestimmtes L-Integral ist, ist notwendig und hinreichend, daß sie in  $\langle a, b \rangle$  beschränkte Differenzenquotienten hat. Für jede derartige Funktion ist*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x \dot{F}(x) dx \quad \text{für } a \leq x \leq b.$$

---

1) Wenn  $F(x)$  überall existiert, ist also  $\dot{F}(x)$  gerade die gewöhnliche Ableitung.

Insbesondere folgt hieraus unmittelbar:

*Jede Funktion  $f(x)$ , die in  $\langle a, b \rangle$  beschränkt und Differentialquotient einer Funktion  $F(x)$  ist, ist integrierbar, und es ist*

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a) \quad \text{für } a \leq x \leq b.$$

Es kann also zu einer gegebenen Ableitung die Stammfunktion stets durch Integration gefunden werden, d. h. das L-Integral umfaßt im Gegensatz zum R-Integral vollkommen die Umkehrung des Differentiationsprozesses, wofern die Ableitung beschränkt ist, führt also so weit, wie auf Grund der Definition des L-Integrals irgend erwartet werden kann. Darin ist neben dem Bestehen des ersten Hauptsatzes (S. 1082) seine große Bedeutung zu sehen.

Die partielle Integration und die Änderung der Integrationsvariablen ist nach folgenden Sätzen ausführbar:

15. *Es sei  $f(x)$  integrierbar, und es habe  $g(x)$  beschränkte Differenzenquotienten in  $\langle a, b \rangle$ ; es sei weiter  $F(x)$  ein unbestimmtes Integral von  $f(x)$ . Dann ist*

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = [F(x) g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \dot{g}(x) dx,$$

wobei

$$[F(x) g(x)]_a^b = F(b)g(b) - F(a)g(a)$$

ist.

16. *Es habe  $g(t)$  in  $\langle \alpha, \beta \rangle$  beschränkte Differenzenquotienten und es sei*

$$A \leq g(t) \leq B \quad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta.$$

*Ferner sei  $f(x)$  in  $\langle A, B \rangle$  integrierbar. Dann existiert auch das zweite der folgenden Integrale und es ist für  $a = g(\alpha)$  und  $b = g(\beta)$*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \dot{g}(t) dt.$$

Das in diesem Abschnitt behandelte Integral hat H. Lebesgue in derselben bedeutsamen Arbeit eingeführt, in der er seine Definition des Maßes gegeben hat (*Thèse = Annali di Mat.* (3) 7 (1902) 248—282). In dieser Abhandlung und in der dem Integral

gewidmeten Monographie (Lit.-Verz. 14) finden sich größtenteils schon die im vorstehenden aufgeführten Sätze. Für eine Einführung in die Theorie seien neben den erwähnten Arbeiten von Lebesgue genannt Lit.-Verz. 5, 10, 13, 15, 17, 20, 21. Für eine Ausdehnung der Theorie auf Funktionen mehrerer Veränderlicher siehe H. Lebesgue, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **27** (1910) 361—450 sowie van Os (15).

## § 12. Das Lebesguesche Integral nicht-beschränkter Funktionen.

In diesem Paragraphen brauchen die Funktionen  $f(x)$  nicht nur nicht beschränkt zu sein, sondern können auch die Werte  $+\infty$  und  $-\infty$  haben.

Für die Definition des L-Integrals nicht-beschränkter Funktionen  $f(x)$  werden diese von vornherein als meßbar im Definitionsbereich  $\mathfrak{B}$  vorausgesetzt. Nach der von Ch. J. de la Vallée Poussin (*Cours d'analyse infinitésimale*, Bd. 2, 2. Aufl., Löwen u. Paris 1912, S. 108 f.; ferner Lit.-Verz. 20, S. 260) modifizierten Definition von H. Lebesgue (*Thèse = Annali di Mat.* (3) **7**, 258 f. (1902) und Lit.-Verz. 14, S. 114 f.) werden für zwei beliebige ganze Zahlen  $m > 0$  und  $n < 0$  zwei Hilfsfunktionen

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } 0 \leq f(x) \leq m, \\ m & \text{für } f(x) > m; \end{cases} \quad f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } n \leq f(x) \leq 0, \\ n & \text{für } f(x) < n \end{cases}$$

eingeführt. Wegen der vorausgesetzten Meßbarkeit von  $f(x)$  ist sowohl  $f_m(x)$  wie  $f_n(x)$  meßbar und auch beschränkt. Es existieren daher im Sinne des § 11 die L-Integrale

$$\int_{\mathfrak{B}} f_m(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{B}} f_n(x) dx.$$

Die gegebene Funktion  $f(x)$  heißt über  $\mathfrak{B}$  summierbar nach Lebesgue oder kurz L-summierbar, wenn die Limites dieser Integrale für  $m \rightarrow +\infty$  und  $n \rightarrow -\infty$  existieren und endliche sind, und es wird gesetzt

$$\int_{\mathfrak{B}} f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathfrak{B}} f_m(x) dx + \lim_{n \rightarrow -\infty} \int_{\mathfrak{B}} f_n(x) dx.$$

Aus der Definition ergeben sich unmittelbar folgende Tatsachen:

Jede in  $\mathfrak{P}$  integrierbare (also beschränkte) Funktion ist L-summierbar und hat nach beiden Integrationsprozessen dasselbe Integral über  $\mathfrak{P}$ .

Wenn  $f(x)$  über  $\mathfrak{P}$  summierbar ist, bilden die Punkte von  $\mathfrak{P}$ , in denen  $f(x)$  die Werte  $+\infty$  oder  $-\infty$  hat, eine Menge vom Maß 0.

Mit  $f(x)$  ist auch  $|f(x)|$  über  $\mathfrak{P}$  summierbar und umgekehrt. Das Integral einer summierbaren Funktion gehört also zu den sog. absolut konvergenten Integralen.

Hieran liegt es, daß es — was ein Nachteil der L-summierbaren Funktionen ist<sup>1)</sup> — Funktionen gibt, die ein uneigentliches R-Integral besitzen, ohne L-summierbar zu sein; z. B. trifft das zu für

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{d}{dx} \left( x^2 \sin \frac{1}{x^2} \right) & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

im Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$  als Integrationsbereich (Lebesgue (14), S. 115).

Die im § 11 für beschränkte Funktionen angeführten Sätze lauten hier:

1. Wenn  $f(x)$  über  $\mathfrak{P}$  summierbar ist, ist  $f(x)$  auch über jede meßbare Teilmenge von  $\mathfrak{P}$  L-summierbar. Ist  $f(x)$  über die endlich vielen Mengen  $\mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_n$  L-summierbar, so ist  $f(x)$  auch über  $\mathfrak{Q}_1 + \dots + \mathfrak{Q}_n$  L-summierbar.

2.; 3.; 4. (außer für das Produkt und den Quotienten); 5.; 6. gelten sämtlich mit „L-summierbar“ statt „integrabel“.

7. Es sei  $f_1(x), f_2(x), \dots$  eine gegen  $f(x)$  konvergierende Folge von abzählbar vielen L-summierbaren Funktionen über  $\mathfrak{P}$ , und es möge eine über  $\mathfrak{P}$  L-summierbare Funktion  $\Phi(x)$  geben, so daß  $|f_n(x)| \leq \Phi(x)$  für alle  $n$  ist. Dann ist auch  $f(x)$  über  $\mathfrak{P}$  L-summierbar und

$$\int_{\mathfrak{P}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{P}} f_n(x) dx.$$

Für weitere Sätze dieser Art s. Lit.-Verz. 20, S. 264 f.

Weiter gelten mit „L-summierbar“ statt „integrabel“ die Sätze 8.; 9., wenn noch  $f(x)g(x)$  als L-summierbar vorausgesetzt wird; 10., wenn noch  $g(x)$  als beschränkt vorausgesetzt wird; 11., wenn  $\{f(x)\}^2$  und  $\{g(x)\}^2$  als L-summierbar voraus-

1) Weitere Nachteile ergeben sich aus dem Folgenden.

gesetzt werden; 12. unter Fortlassung der Voraussetzung, daß  $g(x)$  beschränkt sei.

13. Eine endliche Funktion  $F(x)$  heißt nach G. Vitali (*Torino Atti* **40** (1905) 1021) im Intervall  $\langle a, b \rangle$  absolutstetig oder totalstetig, wenn sie die Bedingung erfüllt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für endlich viele getrennte Teilintervalle  $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle, \dots, \langle \alpha_p, \beta_p \rangle$  von  $\langle a, b \rangle$  stets

$$\sum_{\nu} |F(\beta_{\nu}) - F(\alpha_{\nu})| < \varepsilon \text{ ist, falls } \sum_{\nu} (\beta_{\nu} - \alpha_{\nu}) < \delta$$

ist (vgl. auch Carathéodory (5), S. 513). Es gilt dann der Satz: Ist  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  L-summierbar, so ist

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$

in  $\langle a, b \rangle$  totalstetig, also insbesondere auch stetig und von beschränkter Schwankung.

14. Das unbestimmte Integral  $F(x)$  und die Ableitung  $\dot{F}(x)$  wird wie in § 11 eingeführt. Der Fundamentalsatz der Integralrechnung lautet dann: *Dafür, daß eine in  $\langle a, b \rangle$  definierte Funktion  $F(x)$  ein unbestimmtes Integral einer L-summierbaren Funktion ist, ist notwendig und hinreichend, daß  $F(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  totalstetig ist. Für jede derartige Funktion  $F(x)$  ist*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x \dot{F}(x) dx \quad \text{für } a \leq x \leq b.$$

Insbesondere folgt hieraus:

*Für jede Funktion  $f(x)$ , die in  $\langle a, b \rangle$  L-summierbar<sup>1)</sup> und Differentialquotient einer Funktion  $F(x)$  ist, ist*

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a) \quad \text{für } a \leq x \leq b.$$

Dieser Satz weist insofern einen Mangel auf, als, anders als in § 11, die Existenz des Integrals wieder besonders

---

<sup>1)</sup> Diese Voraussetzung kann ersetzt werden durch die Voraussetzung, daß es eine in  $\langle a, b \rangle$  L-summierbare Funktion  $g(x)$  gibt, so daß  $|f(x)| \leq |g(x)|$  ist. Bei dieser Formulierung ist dann in dem obigen Satz der entsprechende Satz des § 11 enthalten.



vorausgesetzt wird. Daß dies notwendig ist, d. h. daß nicht jede Ableitung L-summierbar ist, zeigt die Funktion (1) auf S. 1087.

15. gilt auch für den Fall, daß  $f(x)$  nur L-summierbar und  $g(x)$  nur totalstetig ist.

Bezüglich 16. sei auf Carathéodory (5), S. 561 f. verwiesen (die Darstellung bei de la Vallée Poussin (20), § 269, insbes. § 267, Nr 1 trifft nicht zu) und auf H. Lebesgue (*Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **27** (1910) 442 ff.).

Für eine Einführung in die Theorie sind die am Schluß von § 11 angeführten Schriften (mit Ausnahme von Kamke (13)) zu nennen.

### § 13. Die Integrale von Denjoy und Perron.

Ein Rückblick auf die in den §§ 10—12 eingeführten Integrale zeigt, daß am bequemsten zu rechnen ist mit dem L-Integral für beschränkte Integranden. Bei diesem gelten Rechenregeln in solcher Ausdehnung und unter so geringen Voraussetzungen wie bei keinem andern Integralbegriff; besonders deutlich ist das bei den beiden Hauptsätzen (S. 1082 u. 1084). Für das R-Integral gelten diese beiden Sätze nur unter stärker einschränkenden Voraussetzungen. Für das L-Integral nicht-beschränkter Funktionen gelten sie zwar in einer solchen Gestalt, daß sie die entsprechenden Sätze bei beschränkten Integranden umfassen; dafür tritt aber, wie oben bemerkt, der Übelstand auf, daß das L-Integral nicht-beschränkter Integranden das uneigentliche R-Integral nicht umfaßt. Die Beseitigung dieses Übelstandes, d. h. die Aufstellung von Integralbegriffen, welche die bisher genannten ausnahmslos umfassen, verdankt man A. Denjoy und in besonders einfacher, wenn auch nicht ganz so allgemeiner Form, O. Perron.

Denjoy (*Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **34** (1917) 181 ff.; vgl. auch H. Lebesgue, *Acta math.* **49** (1927) 244—262) geht von dem allgemeinen L-Integral aus und baut aus diesem unter Verwendung der von L. Cauchy (vgl. *Rep.* **I**, S. 491), G. Lejeune Dirichlet (vgl. P. Lipschitz, *J. für Math.* **63** (1864) 296—308) und A. Harnack (*Math. Ann.* **21** (1883) 324/6, **24** (1884) 220/32) für Berechnung des uneigentlichen Integrals eingeführten Prinzipien sein von ihm „Total“ genanntes Integral durch transfinite Induktion in abzählbar vielen Schritten auf. Er verwendet dabei folgende als „totalisierende

Operationen“ bezeichneten Konstruktionsprinzipien (a. a. O., S. 185—188); dabei bezeichnet

$$\int_{(D)} f(x) dx$$

das Integral im Denjoyschen Sinne (kurz: D-Integral).

1. Für jede perfekte Menge  $\mathfrak{P}$ , für welche das allgemeine L-Integral von  $f(x)$  über  $\mathfrak{P}$  existiert, soll

$$\int_{\mathfrak{P}} f(x) dx = \int_{(D)} f(x) dx$$

sein.

2. Es möge für jedes Zahlenpaar  $\sigma, \tau$  innerhalb des Intervalls  $\alpha < \sigma < \tau < \beta$

$$\int_{(D)} f(x) dx \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \alpha \\ \tau \rightarrow \beta}} \int_{(D)} f(x) dx$$

existieren. Dann soll

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \alpha \\ \tau \rightarrow \beta}} \int_{(D)} f(x) dx$$

sein.

3. Es sei für  $\alpha < \beta < \gamma$  das D-Integral von  $f(x)$  in den Intervallen  $\langle \alpha, \beta \rangle$  und  $\langle \beta, \gamma \rangle$  bekannt. Dann soll

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx$$

sein.

4. Es sei  $\mathfrak{P}$  eine nirgends dichte perfekte Punktmenge im Intervall  $\langle a, b \rangle$ , über welche  $f(x)$  L-summierbar ist. Es sei  $i_1 + i_2 + \dots$  die zu  $\mathfrak{P}$  komplementäre Intervallmenge von  $\langle a, b \rangle$ , und es sei  $f(x)$  über jedes dieser Intervalle D-integrierbar. Endlich sei

$$(1) \quad \sum_v \int_{i_v} f(x) dx \quad \text{absolut konvergent.}$$

Dann soll

$$\int_{\alpha}^b f(x) dx = \int_{\mathfrak{P}} f(x) dx + \sum_v \int_{(D)} f(x) dx$$

sein.

Für den Aufbau des allgemeinen D-Integrals im Intervall  $\langle a, b \rangle$  mit Hilfe der vorstehenden vier Operationen werden über den Integranden  $f(x)$  folgende drei Voraussetzungen gemacht (a. a. O., S. 185—188):

A) Für jede perfekte Menge  $\mathfrak{P}$  in  $\langle a, b \rangle$  sei die Menge derjenigen Punkte von  $\mathfrak{P}$ , in deren Umgebung  $f(x)$  auf  $\mathfrak{P}$  nicht L-summierbar ist, relativ nirgends dicht zu  $\mathfrak{P}$ . Dabei heißt  $f(x)$  in der Umgebung eines Punktes  $\xi$  von  $\mathfrak{P}$  L-summierbar, wenn es ein Intervall  $x_1 < \xi < x_2$  gibt, so daß  $f(x)$  über den Durchschnitt von  $\mathfrak{P}$  und  $\langle x_1, x_2 \rangle$  summierbar ist.

B) Es sei  $\int_{(\mathbf{D})}^{\tau} f(x) dx$  für alle  $\sigma < \tau$  eines Intervalls  $\alpha < \sigma < \tau < \beta$  vorhanden. Dann soll stets

$$\lim_{\substack{\sigma \rightarrow \alpha \\ \tau \rightarrow \beta}} \int_{(\mathbf{D})}^{\tau} f(x) dx$$

existieren.

C) Es sei  $\mathfrak{P}$  eine nirgends dichte perfekte Menge in  $\langle a, b \rangle$ ,  $i_1 + i_2 + \dots$  die zu  $\mathfrak{P}$  komplementäre Intervallmenge und  $f(x)$  über jedes  $i_\nu$  D-integrierbar. Dann soll die Menge der Punkte von  $\mathfrak{P}$ , in deren Umgebung die Aussage (1) nicht gilt, zu  $\mathfrak{P}$  relativ nirgends dicht sein. Dabei sollen die Worte: „die Aussage (1) gilt in der Umgebung eines Punktes  $P$ “ bedeuten: es gibt ein  $P$  als inneren Punkt enthaltendes Intervall  $i$ , so daß

$$(2) \quad \sum_{\nu} \int_{i_\nu} f(x) dx \quad \text{absolut konvergiert.}$$

Der Aufbau des D-Integrals im Intervall  $\langle a, b \rangle$  erfolgt nun folgendermaßen (Denjoy, a. a. O., S. 192—198): Es sei  $\mathfrak{M}_1$  die Menge der Punkte von  $\langle a, b \rangle$ , in deren Umgebung  $f(x)$  nicht L-summierbar ist. Diese Menge ist offenbar abgeschlossen und wegen A) nirgends dicht. Im Innern jedes Intervalls der zu  $\mathfrak{M}_1$  komplementären Intervallmenge ist  $f(x)$  L-summierbar. Die Operation 2. liefert daher das D-Integral in jedem der Intervalle dieser Menge und auch in jedem Teilintervall eines dieser Intervalle.

Zu der abgeschlossenen Menge  $\mathfrak{M}_1$  gibt es weiter nach dem Satz von Cantor-Bendixson (S. 1030) eine Zahl  $\gamma_1$  der ersten oder zweiten Zahlklasse, so daß  $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{M}_1^{(\gamma_1)}$  perfekt oder Null ist. Es soll die Definition des D-Integrals auf jedes Intervall ausgedehnt werden, das keinen Punkt von  $\mathfrak{P}_1$  enthält. Es sei zunächst

$\langle \alpha, \beta \rangle$  ein Intervall, das keinen Punkt von  $\mathcal{M}'_1$  als *inneren* Punkt enthält. Es sei weiter  $\alpha < \sigma < \tau < \beta$ . Dann liegen in  $\langle \sigma, \tau \rangle$  höchstens endlich viele Punkte von  $\mathcal{M}_1$ . In jedem der höchstens endlich vielen Teile, in welche  $\langle \sigma, \tau \rangle$  durch die Punkte von  $\mathcal{M}_1$  zerlegt wird, ist das D-Integral in dem vorhergehenden Abschnitt definiert. Die Operation 3. liefert dann das D-Integral in  $\langle \sigma, \tau \rangle$  und die Operation 2. wegen B) in dem ganzen Intervall  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Von  $\mathcal{M}'$  kann man nach diesem Muster aufsteigen zu  $\mathcal{M}'', \mathcal{M}'''$  usw., allgemein durch transfinite Induktion zu jedem  $\mathcal{M}^{(\gamma)}$ , wofern  $\gamma$  der ersten oder zweiten Zahlklasse angehört; d. h. man kann das D-Integral auf induktivem Wege definieren in jedem Teilintervall von  $\langle a, b \rangle$ , das keinen Punkt von  $\mathfrak{P}_1$  enthält.

Es sei nun weiter  $\mathcal{M}_2$  die Teilmenge der Punkte von  $\mathfrak{P}_1$ , in deren Umgebung entweder  $f(x)$  nicht L-summierbar ist oder in deren Umgebung die Aussage (1) nicht gilt.  $\mathcal{M}_2$  ist offenbar abgeschlossen und wegen A) und C) relativ nirgends dicht zu  $\mathfrak{P}_1$ . Nach dem Satz von Cantor-Bendixson gibt es eine Zahl  $\gamma_2$  der ersten oder zweiten Zahlklasse, so daß  $\mathfrak{P}_2 = \mathcal{M}_2^{(\gamma_2)}$  perfekt oder leer ist. Es ist dann auch  $\mathfrak{P}_2$  relativ nirgends dicht zu  $\mathfrak{P}_1$ . Wir zeigen zunächst, wie man das D-Integral in jedem von  $\mathcal{M}_2$  freien Teilintervall von  $\langle a, b \rangle$  definiert; dabei wird die bisher noch nicht verwendete Operation 4) angewandt. Es sei  $\langle \alpha, \beta \rangle$  ein Teilintervall von  $\langle a, b \rangle$ , das keinen Punkt von  $\mathcal{M}_2$  als *inneren* Punkt enthält. Es sei  $\alpha < \sigma < \tau < \beta$ . Es sei weiter  $\mathcal{Q}_1$  die Menge der Punkte von  $\mathfrak{P}_1$ , die in  $\langle \sigma, \tau \rangle$  liegen und  $j_1 + j_2 + \dots$  die zu der nirgends dichten perfekten Menge  $\mathcal{Q}_1$  komplementäre Intervallmenge von  $\langle \sigma, \tau \rangle$ . Die Funktion  $f(x)$  ist über  $\mathcal{Q}_1$  L-summierbar, da ja  $\langle \sigma, \tau \rangle$  als Teilintervall von  $\langle \alpha, \beta \rangle$  keinen Punkt von  $\mathcal{M}_2$  enthält. Die Summe (1), erstreckt über die Intervalle  $j_1, j_2, \dots$ , ist aus demselben Grunde absolut konvergent. Daher definiert die Operation 4. das D-Integral in  $\langle \sigma, \tau \rangle$  und weiter die Operation 2. in  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . — Nach dem Muster des vorigen Abschnitts läßt sich nun das D-Integral definieren in jedem Intervall, das keinen Punkt von  $\mathcal{M}'_2$  enthält, und durch transfinite Induktion in jedem Intervall, das keinen Punkt von  $\mathfrak{P}_2$  enthält.

Nach dem Muster am Anfang des vorigen Abschnitts wird nun zu  $\mathfrak{P}_2$  eine Untermenge  $\mathcal{M}_3$  und zu dieser eine perfekte Untermenge  $\mathfrak{P}_3$  gebildet. Allgemein läßt sich das Verfahren durch transfinite Induktion fortführen, bis einmal für eine Zahl  $\delta$  der ersten oder zweiten Zahlklasse  $\mathfrak{P}_\delta = 0$  ist. Da die Mengen  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$  stets in jeder vorangehenden enthalten sind, sowie

perfekt und relativ nirgends dicht zu jeder vorhergehenden sind, muß nach dem Satz von Baire (vgl. S. 1030) der Fall  $\mathfrak{P}_\delta = 0$  notwendig eintreten. Dann ist aber das D-Integral in dem ganzen Intervall  $\langle a, b \rangle$  definiert.

Das D-Integral umfaßt, wie aus seiner Definition unmittelbar hervorgeht, das L-Integral und auch das uneigentliche R-Integral, gleichviel, ob diesem die Definition von Cauchy-Dirichlet oder von Harnack zugrunde gelegt wird. Aber auch im Denjoyschen Sinne ist noch nicht jede Funktion integrierbar. Denn es gilt der Satz:

*Wenn in  $\langle a, b \rangle$  überall  $f(x) \geq 0$  ist, so ist  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  genau dann D-integrierbar, wenn die Funktion daselbst L-summierbar ist (Denjoy, a. a. O., S. 202).*

Da es nicht-negative Funktionen gibt, die im Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$  nicht L-summierbar sind (z. B.  $f(x) = \frac{1}{x}$  für  $x > 0$  und  $f(x) = 0$  für  $x = 0$ ), gibt es nach diesem Satz auch Funktionen, die nicht D-integrierbar sind.

Der Vorteil des D-Integrals liegt darin, daß jede Funktion  $f(x)$ , die in  $\langle a, b \rangle$  endlich und daselbst Ableitung einer andern Funktion ist, in diesem Intervall auch D-integrierbar ist (und dazu noch andere Funktionenklassen; vgl. Denjoy, a. a. O., S. 191). Diese Eigenschaft kommt auch schon dem sog. speziellen D-Integral (bei Denjoy: „totalisation complète“) zu. Es unterscheidet sich von dem vorher beschriebenen allgemeinen D-Integral nur dadurch, daß die Aussage (1) von S. 1090 überall ersetzt wird durch

$$„(1a) \quad \sum_{\nu} \left\{ \sup_{i_{\nu}^* \text{ in } i_{\nu}} \left| \int_{(D)} f(x) dx \right| \right\} \text{ konvergent}“;$$

dabei ist die obere Grenze zu nehmen, indem zur Konkurrenz zugelassen werden alle Teilintervalle  $i_{\nu}^*$  eines  $i_{\nu}$ . Entsprechend ist die Aussage (2) auf S. 1091 zu verändern.

Das spezielle D-Integral ist völlig identisch mit einem von O. Perron (*Heidelb. Ak. Sitzber.*, Abt. A, Jahrg. 1914, 14. Abh.) aufgestellten Integralbegriff, dessen Definition eine wesentlich einfachere ist. Es sei  $f(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  gegeben. Eine Funktion  $\varphi(x)$  wird Unterfunktion von  $f(x)$  genannt, wenn

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\text{ in } \langle a, b \rangle \text{ endlich und stetig,} \\ \varphi(a) &= 0, \end{aligned}$$



$$\overline{D}\varphi(x) \neq +\infty \quad \text{für } a \leq x \leq b,$$

$$\overline{D}\varphi(x) \leq f(x) \quad \text{für } a \leq x \leq b$$

ist; eine Funktion  $\psi(x)$  heißt Oberfunktion von  $f(x)$ , wenn

$$\psi(x) \text{ in } \langle a, b \rangle \text{ endlich und stetig,}$$

$$\psi(a) = 0,$$

$$D\psi(x) \neq -\infty \quad \text{für } a \leq x \leq b,$$

$$D\psi(x) \geq f(x) \quad \text{für } a \leq x \leq b$$

ist. Es mögen nun für  $f(x)$  sowohl Unter- wie Oberfunktionen existieren. Dann läßt sich zeigen, daß auch die Funktionen

$$\Phi(x) = \text{fin sup } \varphi(x) \quad \text{und} \quad \Psi(x) = \text{fin inf } \psi(x)$$

existieren und  $\Phi(x) \leq \Psi(x)$  ist. Es wird  $\Phi(b)$  das untere P-Integral und  $\Psi(b)$  das obere P-Integral von  $f(x)$  im Intervall  $\langle a, b \rangle$  genannt. Ist  $\Phi(b) = \Psi(b)$ , so heißt der gemeinsame Wert das P-Integral schlechthin.

Zu der Definition und den Eigenschaften des P-Integrals vgl. auch H. Bauer (*Monatsh. f. Math.* **26** (1915) 153—198), H. Hake (*Math. Ann.* **83** (1921) 119—142), E. Kamke (2), Kap. IV; zur Äquivalenz des P-Integrals und des speziellen D-Integrals H. Hake (a. a. O.), P. Alexandroff (*Math. Zeitschr.* **20** (1924) 213—222) und H. Looman (*Math. Ann.* **93** (1924) 153—156).

### Literaturverzeichnis.

1. *Encyklopädie d. Math. Wissenschaften*, Bd. II, 3, Heft 7. Leipzig 1924.
2. R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*. Paris 1905.
3. E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris 1898. 2. Aufl. Paris 1914.
4. E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes*. Paris 1905.
5. C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Leipzig und Berlin 1918.
6. U. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. Pisa 1878.
7. U. Dini, *Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe*. Deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp. Leipzig 1892.
8. A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*. 2. Aufl. Berlin 1923.

9. H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Bd. 1. Berlin 1921.
10. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig 1914. 2. Aufl. 1927.
11. E. Hobson, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*. 1. Aufl. Cambridge 1907. 2. Aufl. 1. Bd. 1921, 2. Band 1926.
12. C. Jordan, *Cours d'analyse de l'École polytechnique*. Bd. 1, 2. Aufl. Paris 1893, 3. Aufl. 1909.
13. E. Kamke, *Das Lebesguesche Integral*. Leipzig und Berlin 1925.
14. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris 1904.
15. C. H. van Os, *Moderne Integraalrekening*. Groningen 1925.
16. J. Pierpont, *Lectures on the theory of functions of real variables*. Bd. 1, Boston 1905; Bd. 2, Boston 1912.
17. L. Schlesinger und A. Plessner, *Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen*. Berlin und Leipzig 1926.
18. A. Schoenflies, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*. 1. Teil (*Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig.* 8 (1900)); 2. Teil (*Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig.*, 2. Ergänzungsband (1908)).
19. A. Schoenflies und H. Hahn, *Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen* (Umarbeitung des im VIII. Bande des *Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig.* erstatteten Berichts). Erste Hälfte: *Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen* von A. Schoenflies. Leipzig und Berlin 1913.
20. Ch.-J. de la Vallée Poussin, *Cours d'analyse infinitésimale*. Bd. 1, 3. Aufl. Löwen und Paris 1914.
21. Ch.-J. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensembles. Classes de Baire*. Paris 1916.
22. W. H. Young and G. Chisholm Young, *The theory of sets of points*. Cambridge 1906.
23. L. C. Young, *The theory of integration*. Cambridge 1927.

Viele Einzeluntersuchungen sind enthalten in der der Mengenlehre und ihren Anwendungen gewidmeten Zeitschrift „*Fundamenta Mathematicae*“, Warschau.

## Kapitel XXI.

### Neuere Entwicklungen zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von *Guido Hoheisel* in Breslau.

Die folgenden Ausführungen sollen lediglich eine Ergänzung des Artikels von Guldberg (Kap. X, S. 530) darstellen, soweit durch neuere Arbeiten eine solche nötig erscheint. Sie setzen also die Lektüre dieses Artikels (mit Guldberg kurz bezeichnet) voraus.

#### § 1. Existenzsätze. Singuläre Lösung. Gestalt der Integralkurven. Integrationsproblem.

Die Beziehung

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})^* = 0,$$

in der  $F$  eine stetige Funktion von  $(n+1)$  Veränderlichen und  $y(x)$  eine gesuchte Funktion der Unabhängigen  $x$  bedeutet, heißt eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung. Jede Funktion  $y(x)$ , die die Gleichung erfüllt, wird Lösung oder Integral genannt. Die Existenz solcher Lösungen wird zunächst bewiesen für den Fall, daß  $n = 1$  und  $F$  linear in  $y'(x)$  ist:

$$(1) \quad y' = f(x, y).$$

In der allgemeinsten Form ist der Existenzsatz von Perron bewiesen (*Math. Ann.* **76** (1915), S. 471):

Ist  $f(x, y)$  stetig in der Umgebung

$$x_0 \leq x \leq X; \quad \omega_1(x) \leq y \leq \omega_2(x),$$

wo  $\omega_{1,2}(x)$  in  $(x_0, X)$  stetig sind,  $\omega_{1,2}(x_0) = y_0$  und die nach rechts bzw. links genommenen Ableitungen  $D_+ \omega$  bzw.  $D_- \omega$  existieren und den Ungleichungen

$$D_{\pm} \omega_1 \leq f(x, \omega_1(x)); \quad D_{\pm} \omega_2 \geq f(x, \omega_2(x))$$

genügen, dann gibt es in  $(x_0, X)$  zwei Lösungen  $y = G(x)$  und  $y = g(x)$  (maximale und minimale), so daß

$$\omega_1(x) \leq g(x) \leq G(x) \leq \omega_2(x).$$

Sind Minimal- und Maximallösung identisch, so geht nur diese eine Lösung durch  $(x_0, y_0)$  (Eindeutigkeit). Anderenfalls wird das von  $(g, G)$  eingeschlossene Gebiet durch ein Kontinuum von Lösungen lückenlos erfüllt. Die Eindeutigkeit ist gesichert, wenn  $f$  noch der Lipschitzschen Bedingung genügt:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|.$$

$M$  eine Konstante für alle Punkte  $(x, y_1)$  und  $(x, y_2)$  der Umgebung von  $(x_0, y_0)$ . Von Tamarkine (*Math. Zeitschr.* **16** (1923), S. 207) sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Eindeutigkeit angegeben worden: durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  geht dann und nur dann eine einzige Lösung der Differentialgleichung (1) (bei stetigem  $f$ ), wenn für irgend zwei Punkte  $(x, y_1)$ ,  $(x, y_2)$  einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  die Ungleichung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varphi(|y_2 - y_1|)$$

erfüllbar ist für irgendeine positive monoton wachsende Funktion  $\varphi(u)$  der positiven Variablen  $u$ , wobei  $\varphi(0) = 0$  und

$$\int_u^{u_0} \frac{du}{\varphi(u)}$$

gegen Unendlich geht für  $u$  gegen Null.

Unter der Lipschitzschen Annahme beweist man Existenz und Eindeutigkeit am raschesten durch sukzessive Approximation (Picard, *Traité d'analyse*, übergegangen in alle Lehrbücher). Sind in jedem Punkte eines Gebietes Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gesichert, so läßt sich dort die Gesamtheit der Lösungskurven, auch allgemeines Integral genannt, in die Gestalt setzen  $\psi(x, y) = c$ , wo die willkürliche Konstante  $c$  irgendeinen Wert eines gewissen Intervalles, gewöhnlich  $(-\infty, +\infty)$ , annehmen kann. Jeder Wert  $c$  liefert eine Integralkurve (Partikuläres Integral.) Die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung

$$(2) \quad F(x, y, y') = 0.$$

wird nach dem Satz über implizite Funktionen zurückgeführt auf Gleichungen

$$(3) \quad y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \quad \dots$$

Ausgeschlossen sind dabei alle Tripel  $(x, y, y')$ , für die außer (2) noch

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') = 0$$

gilt. (2) und (4) geben gewisse Kurvenmannigfaltigkeiten in der  $(x, y)$  Ebene. Jeder Punkt, der zu diesen Kurven gehört, heißt ein singulärer Punkt. Es kann vorkommen, daß eine ganz zu (2), (4) gehörige Kurve eine Integralkurve von (2) ist. Sie heißt dann *singuläre Lösung*, im Gegensatz zu den sich aus (3) ergebenden Lösungen, deren Gesamtheit jetzt das „*allgemeine Integral*“ heißt. Die Mannigfaltigkeit (2), (4) heißt *Diskriminantenkurve*. Schließt man zur Vorsicht alle jene Punkte aus, für die außerdem

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$$

ist, so bilden alle Punkte, für welche

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0$$

gilt, die singulären Lösungen der Differentialgleichung. (L. Bieberbach, *Theorie der Differentialgleichungen*, Berlin, 2. Aufl., 1926.) Sie sind dann gewöhnlich Einhüllende des allgemeinen Integrals. Sofern die Diskriminantenkurve keine Lösungen liefert, ist sie Ort von Spitzen oder Doppelpunkten der gewöhnlichen Integralkurven. Für algebraische Differentialgleichungen eingehenderes bei M. Hamburger, *J. f. Math.* **112** (1893), S. 205.

Unter den singulären Punkten verdient zunächst der einfachste isolierte singuläre Punkt Interesse, der aus einer gemeinsamen Nullstelle von  $g$  und  $h$  in der Gleichung

$$g(x, y) \cdot y' + h(x, y) = 0$$

entspringt. Ist etwa  $(0, 0)$  eine einfache Nullstelle sowohl für  $h$  wie für  $g$ , so können die Integralkurven in der Nähe von  $(0, 0)$  sich noch auf mannigfaltige Weise verhalten. Sie gehen entweder sämtlich durch  $(0, 0)$  (*Knotenpunkt*) oder winden sich sämtlich spiralenförmig um  $(0, 0)$  (*Strudel*), oder sie bilden einen



*Sattelpunkt*, d. i. einige Kurven gehen durch (0, 0), die anderen Kurven verlaufen in den so gebildeten Winkelräumen hyperbelartig. Ferner können die Integrale auch lauter geschlossene Kurven um den Nullpunkt sein (*Wirbel*). Schließlich ergibt sich noch als eine Verbindung von Strudel und Wirbel, der sogenannte *Grenzzykel*. Eine abzählbare Anzahl von immer enger sich um (0, 0) lagernden geschlossenen Kurven bildet eine Folge von Ringgebieten, in denen sich die Integralkurven spiralenförmig an die beiden Randkurven anschließen. Abgesehen vom Grenzzykel finden sich diese Bilder schon bei der einfachen Gleichung

$$y' = \frac{ax + by}{cx + dy}.$$

Diese Untersuchungen lassen sich ausdehnen auf den Fall, wo in Zähler und Nenner analytische Funktionen mit den obigen Anfangsgliedern stehen.

Poincaré, *J. de math.* (3) 7 (1881) 375; (3) 8 (1882) 251; (4) 1 (1885) 167; (5) 2 (1886) 151; Bendixson, *Acta math.* 24 (1901) S. 1—88.

In neuester Zeit noch weiter verallgemeinert durch Perron, *Math. Ztschr.* Bd. 15 u. 16 (1922/23); siehe auch Brouwer, *Amst. Ber.* 1910.

Weiteres sowie ausführliche Literaturhinweise in dem Enzyklopädieartikel III B 8 von Liebmann, *Geom. Theorie der Differentialgleichungen*.

Integration einer Differentialgleichung heißt Auffindung einer expliziten analytischen Gestalt  $\Phi(x, y, c) = 0$  des allgemeinen Integrals. Über elementare Integrationsmethoden siehe den Artikel von Guldberg sowie jedes Lehrbuch der Differentialgleichungen.

Die grundsätzliche Frage, wann sich eine Differentialgleichung elementar (d. h. nur unter Benutzung der elementaren Funktionen und des Integralzeichens) integrieren läßt, trägt gruppentheoretischen Charakter und findet in der Lieschen Theorie ihre Beantwortung (siehe auch Guldberg).

Diese Anwendung der Lieschen Theorie ist für lineare Differentialgleichungen ausgebaut von Vessiot, *Paris thèse* (1892); *Toul. Ann.* 8 (1894).

Der Picardsche Aufsatz in *Traité d'analyse*, der einerseits manches zur Vervollständigung beiträgt, ist doch wegen mancherlei Fehler als einführende Lektüre ungeeignet.

Eine straffe und einwandfreie Zusammenfassung gerade dieser Anwendung der umfangreichen Lieschen Lehre von den Transformationsgruppen existiert bis jetzt noch nicht. Über die Liesche Theorie selbst unterrichtet ganz gut das Buch von Luigi Bianchi, *Lezioni sulla Teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Pisa 1926. Vgl. im übrigen die Enzyklopädieartikel II A 6 [Kontinuierliche Gruppen von Maurer u. Burkhardt] und II A 4b [Vessiot].

Über praktische numerische oder graphische Methoden zur angenäherten Integration findet sich alles Wissenswerte in dem Buch von Runge-König, „*Vorlesungen über numerisches Rechnen*“ 1923.

## § 2. Lineare Differentialgleichungen.

Die Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

wird entsprechend für  $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$  auf die Form

$$(5) \quad y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

gebracht. In dieser Gestalt ist sie ein Spezialfall eines sogenannten Simultansystems  $n^{\text{ter}}$  Ordnung. Darunter versteht man folgendes Gleichungssystem:

$$(6) \quad \frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n); \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$y_1(x), \dots, y_n(x)$  sind die gesuchten Funktionen.

Für  $y = y_1$ ;  $y' = y_2$ ;  $\dots$ ;  $y^{(n-1)} = y_n$  ergibt sich (5) als Spezialfall von (6). Das Existenz- und Eindeutigkeitstheorem lautet für (6):

Für irgend  $n$  Werte  $y_1^0, \dots, y_n^0$  gibt es nur ein System von Funktionen  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , das (6) genügt und für  $x = x_0$  die Werte  $y_1^0, \dots, y_n^0$  annimmt.  $f_k$  soll dabei einer Lipschitzschen Bedingung genügen.

Insbesondere ist also eine Lösung von (5) bestimmt, wenn für  $x = x_0$   $y(x)$ ,  $y'(x)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)}(x)$  vorgeschriebene Werte annehmen. Der Beweis durch sukzessive Approximation (Picard) ist wie im Falle  $n = 1$ . Das allgemeine Integral ist also eine  $n$ -fache Kurvenschar, d. h. es enthält  $n$  willkürliche Konstante.

Auch hier gibt es singuläre Lösungen. Doch ist darüber noch wenig gesagt worden.

Explizit auffinden kann man das allgemeine Integral nur in wenigen Fällen, die durch die Liesche Theorie sich charakterisieren lassen. Selbst der wichtige Sonderfall der linearen Differentialgleichung

$$L(y) = y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)y(x) = q(x)$$

ist zumeist nicht explizit lösbar, wie für  $n = 2$  bei Zurückführung auf die Riccatische Gleichung schon von Liouville bemerkt wurde (*J. de math.* 6 (1841), 1).

Jedoch lassen sich die Lösungen der inhomogenen Gleichung  $q \not\equiv 0$  stets durch das allgemeine Integral der homogenen Gleichung  $q \equiv 0$  ausdrücken. Da  $L(y)$  eine lineare Operation ist

$$L(y + z) = L(y) + L(z); \quad L(c \cdot y) = c \cdot L(y),$$

so folgt leicht, daß das allgemeine Integral der homogenen Gleichung sich linear aus  $n$  speziellen Integralen  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  zusammensetzt, die nur linear unabhängig sein müssen.

Solche Lösungen heißen ein Fundamentalsystem. Das allgemeine Integral der inhomogenen Gleichung  $L(Y) = q(x)$  wird gegeben durch irgendein partikuläres Integral, zu dem das allgemeine Integral der homogenen Gleichung additiv hinzutritt. Ein solches partikuläres Integral läßt sich z. B. nach Cauchy finden mit Hilfe von sogenannten „Grundlösungen“ der homogenen Gleichung. Seien etwa ( $n = 2$ )  $y_1(x), y_2(x)$  zwei linear unabhängige partikuläre Integrale der homogenen Gleichung. Eine „Grundlösung“ in einem Intervall  $(a, b)$  heißt eine Funktion, die in  $(a, \xi)$  mit einer Lösung der homogenen Gleichung zusammenfällt und in  $(\xi, b)$  mit einer anderen Lösung, aber derart, daß sie in  $\xi$  stetig ist, ihre Ableitung jedoch einen Sprung (von der Größe 1) macht. Beispiel:

$$\gamma(x, \xi) = \pm \frac{1}{2} \frac{y_2(\xi)y_1(x) - y_1(\xi)y_2(x)}{y_2(\xi)y_1'(\xi) - y_1(\xi)y_2'(\xi)}$$

wobei das obere Zeichen für  $x \geq \xi$ , das untere für  $x \leq \xi$  gilt.

( $a < \xi < b$ ). Man zeigt dann, daß  $\varphi(x) = \int_a^b \gamma(x, \xi) q(\xi) d\xi$  eine Lösung der inhomogenen Gleichung  $L(y) = q(x)$  ist. Zu dieser Lösung braucht man also nur das allgemeine Integral der homogenen Gleichung zu addieren und erhält so das all-

gemeine Integral der inhomogenen Gleichung. Eine andere Methode der Integration einer inhomogenen Gleichung stammt von de la Vallée-Poussin (*Cours d'analyse II*) und ist von Hilb auf Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung angewandt worden. (Hilb, *Math. Ann.* 82 u. 84 (1921).)

Direkt läßt sich das allgemeine Integral auch finden durch die Methode der Variation der Konstanten. Es ergibt sich dann als allgemeines Integral

$$Y = y_1(x) \int V_1 e^{\int p_1 dx} dx + \dots \\ y_n(x) \int V_n e^{\int p_1 dx} dx + C_1 y_1 + \dots + C_n y_n.$$

Dabei ist  $V_v$  folgendermaßen definiert. Es sei in der Wronskischen Determinante

$$W = \begin{vmatrix} y_1, & \dots, & y_n, \\ y_1', & \dots, & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}, & \dots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \left( = e^{-\int p_1 dx} \right)$$

die  $v^{\text{te}}$  Kolonne durch  $(0, 0, 0, \dots, q(x))$  ersetzt.

Es kommt also nur darauf an, ein Fundamentalsystem  $(y_1, \dots, y_n)$  zu finden.  $n$  Lösungen bilden dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn ihre Wronski-Determinante  $W$  nicht identisch verschwindet.

Eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante führt von einem Fundamentalsystem zu einem anderen. Es ergeben sich so alle Fundamentalsysteme.

### § 3. Verhalten der Integrale im komplexen Gebiet.

Wenn man auch zumeist explizite  $n$  Lösungen der homogenen Gleichung nicht finden kann, so lassen sich doch weitgehend die funktionentheoretischen Eigenschaften der Lösungen studieren, wofern man die Koeffizienten der Differentialgleichung als höchstens meromorph annimmt.

Sind in einem Punkte  $P$  alle Koeffizienten  $p_1, \dots, p_n$  regulär, so ist auch jedes Integral dort regulär, wie sich aus dem Picardschen Existenzbeweis sofort ergibt. Seine Potenzreihe hat daher einen Konvergenzradius, der bis zum nächsten Pole eines der Koeffizienten führt. Hat in  $Q(x=a)$  dagegen einer der Koeffizienten einen Pol, so wird dort im allgemeinen

jedes Integral einen singulären Punkt haben. Der Charakter der Singularität ist eingehend untersucht worden. B. Riemann, *Ges. Werke*, 2. Aufl., 1892, S. 381. L. Fuchs, *Ges. Werke*. G. Frobenius, *Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen* (*J. für Math.* **76** (1873), 214–235). L. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, 2 Bde., Leipzig 1895/8. L. Schlesinger, *Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865* (*Jahresber. d. Deutsch. Mathem.-Ver.* 1909.) Für Systeme siehe auch Jordan, *Cours d'analyse III*.

Sind die Pole der  $p_\nu$  nur einfach, so liegt eine Stelle der Bestimmtheit vor, an der im allgemeinen die Integrale Verzweigungen der Art  $(x - a)^{e_\nu}$  haben, wo die  $q_1, \dots, q_n$  Wurzeln einer determinierenden Gleichung sind. Hat diese Gleichung Doppelwurzeln oder haben zwei Wurzeln ganzzahlige Differenz, so treten im allgemeinen logarithmische Verzweigungen auf. Wann diese logarithmischen Verzweigungen nicht auftreten, ist von Heffter (*Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Leipzig 1894) entschieden worden. Es kann sogar (alle  $q$  ganzzahlig) der Fall eintreten, daß kein Integral eine Verzweigung besitzt. Es sind dazu nach Poincaré  $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$  Bedingungen nötig. Immerhin gibt es, wenn die Maximalordnung  $s$  der Pole von  $p_\nu$  kleiner als  $n$  ist, immer  $(n-s)$  in  $Q$  analytische Integrale. (Perron, *Math. Ann.* **70** (1911), 1.)

Diese Tatsachen lassen sich zum großen Teil auf lineare Simultansysteme übertragen (z. B. Horn, *Math. Ann.* **39** (1892) und „Gewöhnliche Differentialgleichungen“, *Samml. Schubert* 1905). Vereinfachungen bei Birkhoff (*Trans. Am. Math. Soc.* 1910). An Stellen  $Q$ , die keine Bestimmtheitsstellen sind, kennt man heute auch schon sehr weitgehend den Charakter der Singularität für die Integrale.  $x = \infty$  ist bei den Untersuchungen gewöhnlich als Punkt  $Q$  genommen, wobei zunächst (Poincaré) die Koeffizienten rational waren. Man ist aber heute so weit, alle Resultate aus dem Verhalten der Koeffizienten allein in einer Umgebung von  $x = \infty$  ableiten zu können (Birkhoff, *Math. Ann.* **74** (1913), 134). Die Laplacesche Transformation, die von Poincaré (*Acta Math.* 8) für diese Theorie verwandt wurde und von Birkhoff (*Trans. Am. Math. Soc.* 1909) erweitert wurde, ist heute für diese Zwecke überflüssig geworden. Die Methode der sukzessiven Approximationen (Horn, a. a. O.)



gestattet, alle wesentlichen theoretischen Sätze herzuleiten. Auch die sogenannten semikonvergenten Reihen, d. h. Darstellungen

der Form  $\sum_{v=0}^n c_v \cdot \frac{1}{x^v} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$  für große  $x$  haben nur noch

bedingtes Interesse. Eine bemerkenswerte Verallgemeinerung solcher Darstellungen ist Carleman (*Acta Math.* **43**) gelungen. Seine Resultate erlauben Anwendungen auf mannigfache Probleme. Interessant sind auch die Untersuchungen von Wiman, *Acta math.* **41** (1916), S. 18 und *Ann. de l'éc. norm.* (1920), welche Eigenschaften eine ganze Funktion hat, die Lösung einer linearen oder algebraischen Differentialgleichung ist. Vgl. Valiron, *Bull. de la Soc. Math.* **51** (1923) 33 siehe auch Ostrowski, *Math. Ann.* **94** (1925), 248. Weitere Probleme und ausführliche literarische Hinweise in dem Enzyklopädieartikel von E. Hilb, II, B, 5 „*Lineare Diffgl. im komplexen Gebiet*“.

Bei nichtlinearen Differentialgleichungen treten ganz andere Fragen in den Vordergrund, weil es hier neben den festen, d. h. nur von den Koeffizienten der Differentialgleichung abhängigen Singularitäten auch bewegliche, d. h. von den Anfangsbedingungen abhängige Singularitäten gibt.

Die Differentialgleichung 1. Ordnung  $y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$  ( $P$  und  $Q$  Polynome in  $y$  und analytisch und eindeutig in  $x$ ) hat nur dann keine beweglichen Singularitäten, wenn sie eine Riccati-sche ist:

$$y' = H_0(x) + H_1(x)y + H_2(x)y^2. \quad (H(x) \text{ analytisch})$$

Sind  $P$  und  $Q$  auch in  $x$  Polynome, so ist jedes eindeutige Integral nach Malmquist (*Acta Math.* **36** (1913), S. 297) auch rational, es sei denn die Gleichung eine Riccati-sche; entsprechend ist jedes endlich vieldeutige Integral eine algebraische Funktion. Für eine allgemeine algebraische Differentialgleichung 1. Ordnung  $F(x, y, y') = 0$  ( $F$  ein Polynom in  $y$  und  $y'$ , analytisch in  $x$ ) hat bereits Fuchs (*Berl. Ber.* 1884) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß das allgemeine Integral nur feste Singularitäten hat. Ausführliche Literatur: Enzyklopädieartikel von Hilb II B. 6, „*Nicht-lineare Differentialgleichungen*“. Dort finden sich auch eingehende Angaben über die Untersuchungen von Painlevé, Gambier, Boutroux usw. bei Differentialgleichungen höherer Ordnung.

## § 4. Randwertaufgaben.

Ein Integral einer linearen Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung ist eindeutig bestimmt durch die sogenannten Anfangsbedingungen: für  $x = x_0$  sollen  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  vorgeschriebene Werte  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  annehmen. Physikalische Fragen führen dazu, ein Integral, das in einem Intervall  $(a, b)$  gesucht wird, durch andere Bedingungen festzulegen z. B. ( $n = 2$ ) soll  $y$  für  $x = a$  und  $x = b$  vorgeschriebene Werte annehmen. Allgemeiner auch:  $\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a)$  und  $\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b)$  sollen vorgeschriebene Werte besitzen. Solche Aufgaben, die hauptsächlich für  $n = 2$  behandelt sind, heißen Randwertaufgaben.

Über Randwertaufgaben bringt Ausführliches das Kapitel Hahn-Lichtenstein, *Integralgleichungen*. Am Schluß des § 7 findet sich ein Hinweis auf die Literatur, soweit sie die Methoden betrifft, welche auf Sturm-Liouville aufbauend unabhängig von der Theorie der Integralgleichungen sind. Das Buch von Bôcher, *Leçons sur les méthodes de Sturm*, Paris 1917, ferner die Dissertationen von Betschler und Haupt, (Würzburg 1914) geben einen guten Einblick. Man leitet erst gewisse Oszillationseigenschaften der Eigenfunktionen ab (Anzahl der Nullstellen in  $(a, b)$ ) und gibt dann genauer noch eine asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen. Wird die  $n^{\text{te}}$  Eigenfunktion mit  $y_n$  bezeichnet, so wird (ungefähr)

$$y_n(x) = \alpha_n \sin \frac{n(x-a)\pi}{b-a} + \beta_n \cos \frac{n(x-a)\pi}{b-a} + \varepsilon_n(x).$$

Da man  $\varepsilon_n(x)$  noch genauer kennt, so kann man daraus schließen, daß sich jede mit quadratisch integrierbarer Ableitung versehene Funktion nach den Eigenfunktionen entwickeln läßt. Die Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen läßt sich auch unabhängig von der Theorie der Integralgleichungen beweisen, wie Prüfer, (*Math. Ann.* **95** (1926), S. 49) gezeigt hat, indem er einen alten Liouvilleschen Gedanken in strenge Form brachte. Andererseits kann man auch die obige asymptotische Darstellung für  $y_n$  und mithin auch die Oszillationseigenschaften aus der Theorie der Integralgleichungen entwickeln, wie Hammerstein, (*Math. Ann.* **93** (1925), 113) gezeigt hat. Die Sachlage ist also heute so, daß beide Methoden (Sturm-Liouville und Integralgleichungen) unabhängig voneinander alle wichtigen Probleme der Randwertaufgaben lösen können.

### Literaturverzeichnis.

#### Lehrbücher.

- Bieberbach, L., Theorie der Differentialgleichungen. 2. Aufl. Berlin 1926.
- Forsyth, A. R., Lehrbuch der Differentialgleichungen. 2. Aufl. Braunschweig. Neudruck 1924.
- Horn, J., Gewöhnliche Differentialgleichungen. (Sammlung Schubert.) Leipzig 1905.
- Hort, W., Die Differentialgleichungen des Ingenieurs. 2. Aufl. Berlin 1925.
- Liebmann, H., Lehrbuch der Differentialgleichungen. Berlin 1901.
- Schlesinger, L., Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. 3. Aufl. 1922.
- Heffter, Einleitung in die Theorie d. linearen Differentialgleichungen. 1894.
- Fricke, R., Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung. Leipzig.
- Mangoldt, H. v., Höhere Mathematik. 3 Bde. Leipzig.
- Schlömilch-Kneser, Kompendium der höheren Analysis. Braunschweig 1923.
- Schrutka, L., Höhere Mathematik. 2. Aufl. Wien.

#### Für Randwertaufgaben.

- Bôcher, M., Leçons sur la méthode de Sturm. Paris 1917.

## Kapitel XXII.

### Die Theorie der Randwertaufgaben im Gebiete der partiellen Differentialgleichungen.

Von W. Sternberg in Heidelberg.

#### Einleitung.

Man kann in der Theorie der Differentialgleichungen, mag es sich um gewöhnliche oder partielle handeln, zwei Hauptrichtungen unterscheiden.

I. Die in den gegebenen Differentialgleichungen auftretenden Funktionen sind analytisch, und es wird nach analytischen Lösungen gefragt, welche durch Bedingungen bestimmt werden, in denen ebenfalls nur analytische Funktionen vorkommen dürfen. Kurz gesagt: Alle gegebenen und alle gesuchten Funktionen sind analytisch. Die Variablen dürfen hier auch komplex sein. Der Begründer dieser Richtung ist Cauchy. Von ihm rührt der Nachweis für die Existenz der Lösung des nach ihm benannten Problems her, das im einfachsten Falle einer Gleichung 1. Ordnung so lautet: *Es soll eine in der Umgebung der Stelle  $x_i = x_i^{(0)}$  [ $i = 1, 2, \dots, n$ ] reguläre Lösung  $u(x_1, \dots, x_n)$  der Differentialgleichung*

$$p_1 = F(x_1, \dots, x_n; u, p_2, \dots, p_n) \quad \left[ p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \right]$$

*bestimmt werden, welche für  $x_1 = x_1^{(0)}$  in die willkürlich gegebene Funktion  $\varphi(x_2, \dots, x_n)$  übergeht. Dabei ist  $F$  in der Umgebung der Stelle  $x_i = x_i^{(0)}$ ,  $u = u^{(0)}$ ,  $p_i = p_i^{(0)}$  und  $\varphi$  in der Umgebung von  $x_i = x_i^{(0)}$  [ $i = 2, \dots, n$ ] regulär, ferner ist  $\varphi = u^{(0)}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i^{(0)}$  im Punkte  $x_i = x_i^{(0)}$*

Handelt es sich um eine Gleichung  $r$ -ter Ordnung, die nach  $\frac{\partial^r u}{\partial x_1^r}$  aufgelöst ist,

$$\frac{\partial^r u}{\partial x_1^r} = F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^r u}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^r u}{\partial x_n^{r-1}}\right),$$

so werden für  $x_1 = x_1^{(0)}$  die Werte von  $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{r-1} u}{\partial x_1^{r-1}}$  als willkürliche analytische Funktionen von  $x_2, \dots, x_n$  vorgeschrieben.

Das Cauchysche Problem wird komplizierter, wenn die Differentialgleichung in der allgemeinsten nicht nach einer Ableitung aufgelösten Form vorliegt, und andererseits dann, wenn die Werte der Lösung  $u$  sowie ihrer partiellen Ableitungen bis zur  $(r-1)$ -ten Ordnung längs einer beliebigen analytischen  $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit im  $n$ -dimensionalen Raume der  $x_1, \dots, x_n$  vorgeschrieben werden.

Die Theorie der analytischen Differentialgleichungen ist nicht Gegenstand dieses Referats.<sup>1)</sup> Das Problem von Cauchy ist aber trotzdem für uns von Bedeutung, weil es in entsprechend modifizierter Form auch bei einer bestimmten Klasse nichtanalytischer Differentialgleichungen auftritt.<sup>2)</sup>

II. Die Problemstellungen der zweiten Richtung sind hauptsächlich aus der mathematischen Physik hervorgegangen. Jetzt sind Differentialgleichungen vorgelegt, in denen Funktionen auftreten, welche nur mit gewissen *Stetigkeitseigenschaften* versehen sind, und es wird nach ebensolchen Lösungen gefragt. Die Variablen werden hier als reell vorausgesetzt.

Die Art der Bedingungen, durch die eine Lösung eindeutig festgelegt wird, erklärt die Bezeichnung *Randwertaufgabe*. Die *Theorie der Randwertaufgaben* und zwar für *partielle Differentialgleichungen* soll in diesem Artikel dargestellt werden. Ihr historischer Ausgangspunkt ist das berühmte Werk über Wärmeleitung von Fourier (*Théorie analytique de la chaleur*, Paris 1822). Fast ausschließlich wird es sich für uns um Differentialgleichungen 2. Ordnung, nur selten um solche höherer Ordnung handeln. An zusammenfassenden Darstellungen, die unsern Gegenstand betreffen, seien genannt: *Enzyklop. der math. Wiss.* II A 7b: H. Burkhardt u. Fr. Meyer, Potentialtheorie. *Dass.* II A 7c: A. Sommerfeld, Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. *Dass.* II C: L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. *Dass.* II C: L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Theorie

1) Vgl. hierüber insbesondere *Enzyklopädie d. math. Wiss.* II A 5, E. von Weber. S. auch Repert. I, Kap. XI, A. Guldberg.

2) S. die §§ 10, 11.



partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung vom elliptischen Typus. *Repert.* I<sub>2</sub>, Kap. XIV. Vgl. auch die Abschnitte über partielle Differentialgleichungen in den von L. Lichtenstein herausgegebenen neueren Bänden des *Jahrbuchs für die Fortschritte der Mathematik*.

### § 1. Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen.

Liegt die Differentialgleichung 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen

$$(1) \quad A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

vor, die in den Ableitungen 2. Ordnung linear ist, wobei ferner die Koeffizienten dieser Ableitungen Funktionen von  $x$  und  $y$  allein sind, so versteht man unter einer *Charakteristik* eine Kurve  $\varphi(x, y) = \text{konst.}$ , welche der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$(2) \quad A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

genügt. Die Charakteristiken können auch durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(3) \quad A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0$$

definiert werden. Hat die quadratische Gleichung in  $\lambda$

$$(4) \quad A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0$$

die Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , so zerlegt sich (2) in die beiden Gleichungen

$$(2^*) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Lösungen seien etwa  $\varphi = \varphi_1$  bzw.  $\varphi = \varphi_2$ . Demnach hat man die beiden Scharen von Charakteristiken  $\varphi_1(x, y) = \text{konst.}$  und  $\varphi_2(x, y) = \text{konst.}$  (Aus der partikulären Lösung  $\varphi_1$  der ersten Gleichung (2\*) ergibt sich die allgemeine Lösung in der Form  $\Phi(\varphi_1)$ , wo  $\Phi$  eine willkürliche Funktion ist. Aus  $\Phi(\varphi_1) = \text{konst.}$  folgt aber wieder  $\varphi_1 = \text{konst.}$ )

Man nennt (1) in einem gegebenen Gebiete  $T$  der  $(x, y)$ -Ebene *elliptisch* bzw. *hyperbolisch* bzw. *parabolisch*, je nachdem

$\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , also auch die beiden Scharen von Charakteristiken in  $T$  konjugiert komplex oder reell und verschieden oder reell und zusammenfallend sind. Die Bedingungen hierfür lauten, wenn man  $AC - B^2 = D$  setzt,  $D > 0$  bzw.  $D < 0$  bzw.  $D = 0$ .

Die Einteilung in drei verschiedene Klassen nach der Art der Charakteristiken ist eine zwingende Notwendigkeit. Denn zu Differentialgleichungen derselben Klasse gehören dieselben Arten von Randwertaufgaben und dieselben Lösungsmethoden, zu Differentialgleichungen verschiedener Klassen aber verschiedene. Eine weitere Bedeutung der Charakteristiken zeigt sich z. B. beim Cauchyschen Problem in folgenden Umstände (wobei wir für einen Augenblick voraussetzen, daß die in (1) auftretenden Funktionen analytisch, d. h. Potenzreihen ihrer Argumente sind). Indem man sich die Aufgabe stellt, eine Lösung  $u$  von (1) zu finden, die auf einer gegebenen analytischen Kurve  $s$  der  $(x, y)$ -Ebene nebst ihrer Ableitung  $\frac{\partial u}{\partial n}$  in Richtung der Kurvennormalen willkürlich vorgeschriebene analytische Werte annimmt (offenbar sind damit auch  $\frac{\partial u}{\partial x}$  und  $\frac{\partial u}{\partial y}$  bekannt), muß man voraussetzen, daß  $s$  keine Charakteristik ist und auch von keiner Charakteristik berührt wird. Dann gelingt es nämlich, die Ableitungen höherer Ordnung von  $u$ , die man zur Potenzreihenentwicklung braucht, sukzessive zu berechnen. Die drei Ableitungen 2. Ordnung ergeben sich aus einem System von drei Gleichungen, dessen Koeffizientendeterminante

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2,$$

also  $\neq 0$  ist, die Ableitungen höherer Ordnung aus Gleichungssystemen, deren Koeffizientendeterminanten Potenzen des obigen Ausdrucks, also ebenfalls  $\neq 0$  sind.<sup>1)</sup>

Ist andererseits  $s$  eine Charakteristik, so sind die Ableitungen höherer Ordnung durch  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial n}$  nicht bestimmt, und diese beiden Größen sind wiederum auf einer Charakteristik nicht unabhängig voneinander. Das Problem von Cauchy ist also jetzt nicht lösbar. Eine ähnliche Erscheinung zeigt sich, auch wenn die gegebenen und die gesuchten Größen nicht als analytisch vorausgesetzt werden, in der Theorie der hyperbolischen Gleichungen.

1) Siehe z. B. Horn, „Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen“. Leipzig 1910.

Die Gleichung 2. Ordnung mit  $n$  unabhängigen Variablen

$$(5) \quad \sum_{i,k=1}^n A_{ik}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

hat die Charakteristikengleichung

$$(6) \quad \sum_{i,k=1}^n A_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0.$$

Die Charakteristiken  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \text{konst.}$  sind  $(n-1)$ -dimensionale Flächen im  $n$ -dimensionalen Raume. Im Gegensatz zu  $n=2$  kann für  $n \geq 3$  die linke Seite von (6) im allgemeinen nicht in zwei lineare Faktoren zerlegt werden, so daß man nicht zwei Scharen von Charakteristiken unterscheiden kann. Die Einteilung der Differentialgleichungen vom Typus (5) in drei Klassen läßt sich aber trotzdem durchführen. Man nennt (5) in einem Gebiete  $T$  des  $n$ -dimensionalen Raumes 1. *elliptisch* bzw. 2. *hyperbolisch* bzw. 3. *parabolisch*, je nachdem die quadratische Form

$$\sum_{i,k=1}^n A_{ik} t_i t_k$$

der Variablen  $t_1, \dots, t_n$  in  $T$  1. *definit* oder 2. *noch vollständig, aber nicht definit* oder 3. *unvollständig* ist. Die Charakteristiken der elliptischen Gleichungen sind offenbar wiederum komplex, die der hyperbolischen und parabolischen reell.

Die Charakteristiken  $\varphi(x, y) = \text{konst.}$  der Gleichung  $r$ -ter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen

$$(7) \quad A_0 \frac{\partial^r u}{\partial x^r} + A_1 \frac{\partial^r u}{\partial x^{r-1} \partial y} + \dots + A_r \frac{\partial^r u}{\partial y^r} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{r-1} u}{\partial y^{r-1}}\right),$$

wo die  $A$  Funktionen von  $x$  und  $y$  allein sind, genügen der Gleichung

$$(8) \quad A_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^r + A_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{r-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \dots + A_r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^r = 0.$$

Hat die Gleichung

$$(9) \quad A_0 \lambda^r - A_1 \lambda^{r-1} + \dots + (-1)^r A_r = 0$$

die Wurzeln  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , so zerlegt sich (8) in die Gleichungen

$$(8^*) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad [i = 1, 2, \dots, r],$$

und man erhält  $r$  Scharen von Charakteristiken.

Die  $\lambda_i$  können teils reell, teils komplex, verschieden oder zusammenfallend sein. Sind alle  $\lambda_i$  untereinander verschieden, so ist die Gleichung (7) *elliptisch*, wenn alle  $\lambda_i$  komplex sind, was natürlich nur bei geradem  $r$  möglich ist, dagegen *hyperbolisch*, wenn alle  $\lambda_i$  reell sind, und schließlich *elliptisch hyperbolisch*, wenn einige  $\lambda$  komplex, einige reell sind. Sind nicht alle  $\lambda_i$  untereinander verschieden, so ergeben sich mehrere Möglichkeiten: Sind alle  $\lambda_i$  komplex, so hat (7) immer noch elliptischen Charakter und wird mit den Methoden elliptischer Differentialgleichungen behandelt. Sind alle  $\lambda_i$  reell, so kann man (7) als hyperbolisch-parabolisch bezeichnen. Sind einige  $\lambda$  reell, einige komplex, so ergeben sich kompliziertere Zwischentypen, die man wieder in Unterklassen einteilen kann.

Ist die *Differentialgleichung 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen in der allgemeinsten Form*

$$(10) \quad F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$$

gegeben, wo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = t$$

gesetzt ist, so sind die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial r} = A, \quad \frac{\partial F}{\partial s} = 2B, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \Gamma$$

zu bilden, und es tritt an Stelle von (3) jetzt

$$(11) \quad A dy^2 - 2B dx dy + \Gamma dx^2 = 0.$$

Unter einer Charakteristik von (10) versteht man eine einfache Mannigfaltigkeit von Flächenelementen 2. Ordnung  $x, y, u, \dots, t$ , welche einer Integralfläche von (10) angehört und (11) genügt.<sup>1)</sup> Setzt man  $A\Gamma - B^2 = \Delta$ , so heißt (10) in einem bestimmten Gebiete  $T$  der  $(x, y)$ -Ebene für eine bestimmte Integralfläche elliptisch oder hyperbolisch oder parabolisch,

1) Vgl. die ausführliche Darstellung bei Horn, l. c., III. Abschnitt, insbes. § 20.

je nachdem in diesem Gebiete  $\Delta > 0$  oder  $\Delta < 0$  oder  $\Delta = 0$  ist. Die Gleichung (10) kann also in einem und demselben Gebiete  $T$  für eine bestimmte Integralfäche elliptisch, für eine andere hyperbolisch, für eine dritte parabolisch sein (was in dem besondern Falle der Gleichung (1) unmöglich ist). So ist z. B. die Gleichung  $pr + t = 0$  für die Ebene  $u = x$  wegen  $p = 1$  elliptisch, und zwar im ganzen Bereiche der  $(x, y)$ -Ebene, für  $u = -x$  hyperbolisch, für  $u = \text{konst.}$  parabolisch.

Über die allgemeine Definition der Charakteristiken bei einer Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Variablen siehe z. B. E. von Weber, l. c., S. 389!

## § 2. Elementare Sätze der Potentialtheorie.

Die einfachste elliptische Differentialgleichung ist die Laplacesche Gleichung

$$(I) \quad \begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 && \text{in der Ebene} \\ \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 && \text{im Raume.} \end{aligned}$$

Die wichtigsten Lösungen dieser Gleichungen sind

$$\log \frac{1}{r} \quad [r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}],$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{1}{r} \quad [r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}],$$

wo etwa  $x, \dots$  die unabhängigen Variablen,  $\xi, \dots$  Parameter bedeuten. Jede Lösung der ersten Gleichung heißt *logarithmisches*, jede der zweiten Gleichung heißt *Newtonsches Potential*. Ist die Lösung in einem beschränkten Gebiete  $T$  der Ebene bzw. des Raumes nebst ihren partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung stetig, so heißt sie *regulär*,  $T$  heißt *Regularitätsgebiet*.

Ein Potential heißt *im unendlich fernen Punkte regulär*, wenn es sich in einer gewissen Umgebung desselben (ihn selbst zunächst nicht mitgerechnet) regulär verhält und für

$$R \rightarrow \infty \quad [R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{bzw.} \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}]$$

im logarithmischen Falle



$$(1_1) \quad \lim u(x, y) = c, \quad \left| R^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \quad \left| R^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad \text{beschränkt,}$$

im Newtonschen Falle

$$(1_2) \quad \lim u(x, y, z) = c, \quad \left| R^3 \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \quad \left| R^3 \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad \left| R^3 \frac{\partial u}{\partial z} \right|$$

beschränkt ist, wo  $c$  eine Konstante bedeutet. Es läßt sich zeigen (§ 3), daß beim logarithmischen Potential aus der Existenz von  $\lim u$  bereits die Regularität im Unendlichen folgt. Die Bedingungen  $(1_1)$  sind also nicht unabhängig voneinander, wohl aber die Bedingungen  $(1_2)$ . Die Potentiale  $\log \frac{1}{r}$  und  $\frac{1}{r}$  sind im unendlich fernen Punkte nicht regulär.

Ein mächtiges Hilfsmittel zur Behandlung von (I.) sind die *Greenschen Formeln*, welche auf dem *Integralsatz von Gauß* beruhen. Ist  $T$  ein schlichtes ebenes beschränktes (einfach oder mehrfach zusammenhängendes) Gebiet, dessen Rand  $S$  aus einer endlichen Anzahl von Kurvenstücken mit stetiger Tangente besteht und von jeder Parallelen zu einer der Koordinatenachsen nur in einer endlichen Anzahl von Punkten geschnitten wird, sind ferner die Funktionen  $A(x, y)$ ,  $\frac{\partial A}{\partial x}$ ,  $B(x, y)$ ,  $\frac{\partial B}{\partial y}$  in  $T + S$  stetig, so lauten die Integralformeln von Gauß

$$(2_1) \quad \begin{aligned} \iint_T \frac{\partial A}{\partial x} d\omega &= - \int_S A \cos(n, x) ds, \\ \iint_T \frac{\partial B}{\partial y} d\omega &= - \int_S B \cos(n, y) ds, \end{aligned}$$

wenn  $d\omega$  das Element von  $T$ ,  $ds$  das von  $S$  ist. Dabei ist auf  $S$  so zu integrieren, daß  $T$  zur Linken liegt, und die Normale  $n$  ist ins Innere von  $T$  gerichtet. Entsprechend hat man im Raume

$$(2_2) \quad \iiint_T \frac{\partial A}{\partial x} d\tau = - \iint_S A \cos(n, x) d\omega, \dots$$

Die Begrenzung  $S$  des beschränkten Raumgebietes  $T$  darf hierbei eine endliche Anzahl von Kanten und von konischen Punkten besitzen. Setzt man in  $(2_1)$   $A = u \frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $B = u \frac{\partial v}{\partial y}$  (da-

bei sollen  $u$  und  $v$  in  $T + S$  nebst ihren Ableitungen 1. und 2. Ordnung stetig sein) und addiert, so folgt

$$(3) \quad \int_T \int u \Delta v \, d\omega + \int_T \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\omega = - \int_S u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds.$$

Ebenso gilt die entsprechende durch Vertauschung von  $u$  und  $v$  entstehende Formel. Die Subtraktion beider Formeln liefert

$$(4) \quad \int_T \int (u \Delta v - v \Delta u) \, d\omega = - \int_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

Man bezeichnet (3) und insbesondere (4) als Formeln von Green. Sie behalten ihre Gültigkeit, wenn  $u$  und  $v$  bloß in  $T$  stetige Ableitungen bis zur 2. Ordnung besitzen, während

$$u, \frac{\partial u}{\partial n}, v, \frac{\partial v}{\partial n}$$

auch noch bei Annäherung an  $S$  stetig bleiben.

Aus (4) erhält man für  $v \equiv 1$

$$(5) \quad \int_T \int \Delta u \, d\omega = - \int_S \frac{\partial u}{\partial n} \, ds,$$

aus (3) für  $u \equiv v$

$$(6) \quad \int_T \int \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} d\omega = - \int_T \int u \Delta u \, d\omega - \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$

Ist  $u$  ein in  $T$  reguläres, in  $T + S$  nebst Normalableitung stetiges Potential, so ergibt sich aus (5)

$$(7) \quad \int_S \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = 0,$$

aus (6)

$$(8) \quad \int_T \int \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} d\omega = - \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$

Sind  $u$  und  $v$  in  $T$  reguläre Potentiale, so folgt aus (4)

$$(9) \quad \int_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0.$$

Die Formeln (7) bis (9) bleiben auch für nicht beschränkte Gebiete  $T$  gültig, falls die Potentiale  $u$  und  $v$  auch im unendlich fernen Punkte regulär sind.

Im Raume bzw. für das Newtonsche Potential gelten die den Formeln (3) bis (9) entsprechenden.

Setzt man in (4)  $v = \log \frac{1}{r}$ , wobei  $\xi, \eta$  die Integrationsvariablen sind und  $T$  zunächst wieder beschränkt vorausgesetzt wird, so folgt, wenn  $P(x, y)$  außerhalb  $T$  liegt,

$$\iint_T \Delta u \log \frac{1}{r} d\omega = \int_S \left\{ u \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds,$$

also, falls  $u$  ein reguläres Potential ist,

$$(10_1) \quad \int_S \left\{ u \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds = 0.$$

Liegt  $P(x, y)$  innerhalb  $T$ , so ergibt sich durch einen Grenzübergang die Fundamentalformel

$$(11_1) \quad u_P = \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ u \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds.$$

Liegt schließlich  $P(x, y)$  auf  $S$ , und zwar in einem gewöhnlichen, nicht singulären Punkte von  $S$ , so gilt

$$(12_1) \quad u_P = \frac{1}{\pi} \int_S \left\{ u \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds.$$

Für ein reguläres Newtonsches Potential  $u(x, y, z)$  ist entsprechend

$$\begin{matrix} (10_2) \\ (11_2) \\ (12_2) \end{matrix} \quad \iint_S \left\{ u \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega = \begin{cases} 0, & \text{wenn } P \text{ außerhalb } T \\ 4\pi u_P, & \text{wenn } P \text{ in } T \\ 2\pi u_P, & \text{wenn } P \text{ auf } S. \end{cases}$$

Erstreckt sich  $T$  ins Unendliche und ist  $u$  auch im unendlich fernen Punkte regulär mit  $\lim u = c$ , so findet man statt (11<sub>1</sub>)

$$(13_1) \quad u_P = \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ u \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds + c$$

und entsprechend (13<sub>2</sub>). Die Formeln (13<sub>1</sub>) und (13<sub>2</sub>) gelten auch für Potentiale der Form

$$u = M \log \frac{1}{R} + v \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{M}{R} + v,$$

wo  $M$  eine Konstante und  $v$  ein auch im unendlich fernen Punkte reguläres Potential mit  $\lim v = c$  ist.

Wendet man (11) auf einen ganz im Regularitätsgebiete von  $u$  liegenden, um  $P$  als Mittelpunkt mit dem Radius  $h$  beschriebenen Kreis (bzw. Kugel)  $K$  an, so erhält man

$$(14_1) \quad u_P = \frac{1}{2\pi h} \int_K u \, ds \quad \text{bzw.} \quad (14_2) \quad u_P = \frac{1}{4\pi h^2} \int_K \int u \, d\omega.$$

*Der Wert eines logarithmischen (Newtonschen) Potentials im Mittelpunkte eines Kreises (einer Kugel) des Regularitätsgebietes ist also ein Mittelwert der Randwerte.* Hieraus schließt man, daß ein in  $T$  reguläres, in  $T + S$  stetiges Potential im Regularitätsgebiete  $T$  kein Extremum haben kann, daß vielmehr Maximum und Minimum stets auf der Begrenzung  $S$  liegen müssen. Dieser Satz bleibt richtig, wenn  $T$  den unendlich fernen Punkt enthält, so daß ein im unendlich fernen Punkte reguläres Potential dort kein Extremum besitzen kann. Dagegen hat z. B. das Newtonsche Potential

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

das im unendlich fernen Punkte nicht regulär ist, dort das Minimum 0.

Sei das logarithmische Potential  $u(x, y)$  in dem einfach zusammenhängenden Gebiete  $T$  regulär. Verbindet man zwei Punkte  $P_0$  und  $P$  von  $T$  durch eine ganz in  $T$  verlaufende, im allgemeinen mit stetiger Tangente versehene Kurve und sieht  $P_0(x_0, y_0)$  als fest,  $P(x, y)$  als variabel an, so ist

$$v = - \int_{P_0}^P \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

eine eindeutige Funktion von  $x, y$  (vgl. Gl. 7). Sie genügt den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Daraus ergibt sich wegen  $\Delta u = 0$  auch  $\Delta v = 0$ . Das in  $T$  reguläre Potential  $v$  wird das zu  $u$  „konjugierte Potential“ genannt. Zu  $v$  ist  $-u$  konjugiert.

Man bezeichnet

$$(15_1) \quad U(x, y) = \int_T \varrho(\xi, \eta) \log \frac{1}{r} d\omega$$

als logarithmisches *Flächenpotential*,

$$(16_1) \quad V(x, y) = \int_S \kappa \log \frac{1}{r} ds$$

als *Linienpotential einer einfachen Belegung* oder *einfachen Schicht* und

$$(17_1) \quad W(x, y) = \int_S v \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} ds = \int_S \frac{v \cos(r, n)}{r} ds$$

als *Linienpotential einer Doppelschicht*. Die „Dichten“  $\varrho$  bzw.  $\kappa$  und das „Moment“  $v$  werden als beschränkte und integrabele Ortsfunktionen vorausgesetzt. Bei der Differentiation nach der Normalen in Formel (17<sub>1</sub>) gelten natürlich die Integrationsvariablen  $\xi, \eta$  als variabel. Für das Newtonsche Potential hat man entsprechend

$$(15_2) \quad U = \iiint_T \frac{\varrho}{r} d\tau,$$

$$(16_2) \quad V = \iint_S \frac{\kappa}{r} d\omega,$$

$$(17_2) \quad W = \iint_S v \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega = \iint_S \frac{v \cos(r, n)}{r^2} d\omega.$$

Vom „Aufpunkte“  $P(x, y)$  bzw.  $P(x, y, z)$  wird zunächst vorausgesetzt, daß er außerhalb des Integrationsgebietes  $T$  oder

$S$  variiert. Alsdann genügen  $U, V, W$  tatsächlich der Laplace-schen Gleichung, sind also Potentiale.

Die drei Potentiale  $U, V, W$  sind analytisch-reguläre Funktionen der Koordinaten des Aufpunktes, wenn dieser im Endlichen außerhalb des Integrationsgebietes variiert. Dies ergibt sich für das logarithmische Potential durch Entwicklung von

$\log \frac{1}{r}$  und  $\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n}$  nach Potenzen von  $x, y$  und entsprechend für das Newtonsche Potential

Nach (11<sub>1</sub>) bzw. (11<sub>2</sub>) kann jedes reguläre Potential als Aggregat aus einem Potential der einfachen Schicht und einem Potential der Doppelschicht dargestellt werden. *Daher ist jedes reguläre Potential im ganzen Regularitätsgebiete eine analytisch-reguläre Funktion seiner Argumente.*

Um das Verhalten der Potentiale im Unendlichen zu studieren, wendet man die Transformation der reziproken Radien an

$$x_1 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (\text{entsprechend im Raume}).$$

Man findet: Ein *logarithmisches Potential*  $u(x, y)$  ist dann und nur dann im unendlich fernen Punkte der  $(x, y)$ -Ebene regulär, wenn es durch die obige Transformation in ein im Nullpunkte der  $(x_1, y_1)$ -Ebene reguläres Potential  $u\left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)$  übergeht. Ein *Newtonsches Potential* ist dann und nur dann im unendlich fernen Punkte des  $(x, y, z)$ -Raumes regulär, wenn es in diesem Punkte einen bestimmten Grenzwert  $c$  hat und durch die Transformation der reziproken Radien in eine Funktion von  $x_1, y_1, z_1$  übergeführt wird mit der Eigenschaft, daß

$$\frac{u\left(\frac{x_1}{R_1^2}, \frac{y_1}{R_1^2}, \frac{z_1}{R_1^2}\right) - c}{R_1}$$

ein im Nullpunkte des  $(x_1, y_1, z_1)$ -Raumes reguläres und dort verschwindendes Potential ist.

Das Potential  $W$  der Doppelschicht ist auch im unendlich fernen Punkte regulär, nicht aber die Potentiale  $U$  und  $V$ .

Das Verhalten der Potentiale  $U, V, W$  für den Fall, daß der Aufpunkt  $P$  sich dem Integrationsgebiete unbegrenzt nähert oder auch in diesem selbst variiert, wird durch folgende Sätze bestimmt:



Das Potential  $U$  ist eine stetige Funktion der Koordinaten des Aufpunktes, auch wenn dieser im Innern oder auf der Begrenzung von  $T$  liegt. Dasselbe gilt für die Ableitungen erster Ordnung. Diese kann man durch Differentiation unter dem Integralzeichen bestimmen. Die Ableitungen zweiter Ordnung sind unter der Voraussetzung, daß die Dichte  $\rho$  nebst ihren Ableitungen erster Ordnung in  $T + S$  stetig ist, noch für die Punkte von  $T$ , aber nicht mehr beim Durchgange durch  $S$  stetig. Für die Punkte von  $T$  gilt die Gleichung von Poisson.

$$(18_1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\pi\rho, \text{ bzw.}$$

$$(18_2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

Auf  $S$  ist weder die Gleichung von Laplace noch die von Poisson gültig.

Das Potential  $V$  ist auch beim Durchgange des Aufpunktes durch  $S$  stetig. Um etwas über die Normalableitungen aussagen zu können, muß man weitere Voraussetzungen über  $S$  und  $\kappa$  machen. Besitzt  $S$  stetige Krümmung und ist  $\kappa$  stetig — der Einfachheit halber nehmen wir jetzt und im folgenden bei den Potentialen  $V$  und  $W$  an, daß  $S$  geschlossen ist, — so existieren die Grenzwerte der Normalableitung  $\frac{\partial V_i}{\partial n_s}$  und  $\frac{\partial V_a}{\partial n_s}$  bei Annäherung von innen bzw. von außen her an einen Punkt  $s$  von  $S$ . Sie sind im allgemeinen voneinander verschieden und genügen den Gleichungen

$$(19) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial n_s} - \frac{\partial V_a}{\partial n_s} \right) = -\pi\kappa_s, \text{ bzw. } = -2\pi\kappa_s.$$

$$(20) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial n_s} + \frac{\partial V_a}{\partial n_s} \right) = \int_S \kappa \frac{\partial \left( \log \frac{1}{r_s} \right)}{\partial n_s} dt, \text{ bzw.}$$

$$= \iint_S \kappa \frac{\partial \left( \frac{1}{r_{s\omega}} \right)}{\partial n_s} d\omega.^1)$$

1) Wir bezeichnen jetzt den Punkt, der die Integrationsvariablen repräsentiert, mit  $t$  bzw.  $\omega$ , ferner die Entfernung der Punkte  $s$  und  $t$  (bzw.  $\omega$ ) mit  $r_{st}$  (bzw.  $r_{s\omega}$ ).

Das Potential  $W$  der Doppelschicht besitzt, wenn  $S$  stetige Normale hat und  $v$  eine stetige Ortsfunktion ist, bei Annäherung des Aufpunktes  $P$  an einen Punkt  $s$  von  $S$  Grenzwerte  $W_i$  und  $W_a$ . Sie sind im allgemeinen voneinander verschieden und genügen den Relationen

$$(21) \quad \frac{1}{2}(W_i - W_a) = \pi v_s, \text{ bzw. } 2\pi v_s,$$

$$(22) \quad \frac{1}{2}(W_i + W_a) = W_s.$$

Setzt man  $S$  als stetig gekrümmt voraus, so gilt die Limesgleichung

$$(23) \quad \lim_{\delta=0} \left\{ \left( \frac{\partial W}{\partial n} \right)_{P_1} - \left( \frac{\partial W}{\partial n} \right)_{P_2} \right\} = 0.$$

Dabei sind  $P_1$  und  $P_2$  zwei Punkte auf der Normalen von  $S$  im Punkte  $s$  in gleichen Abständen  $\delta$  und natürlich zu verschiedenen Seiten von  $s$ .

Aus (23) folgt keineswegs, daß die Grenzwerte der Normalableitung  $\frac{\partial W_i}{\partial n_s}$  und  $\frac{\partial W_a}{\partial n_s}$  jeder für sich existieren.<sup>1)</sup> Wohl aber ergibt sich: Existiert der eine der beiden Grenzwerte, so existiert auch der andere und ist dem ersten gleich.

### § 3. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie.

Die Sätze des vorigen Paragraphen ermöglichen uns die Lösung der Randwertaufgaben der Potentialtheorie.

#### A. Formulierung und Eindeutigkeitssätze.

Sei  $T$  irgendein Gebiet (d. h. „zusammenhängende“ Menge „innerer“ Punkte) in der Ebene oder im Raume, das sich auch ins Unendliche erstrecken und mehrfach zusammenhängend sein darf,  $S$  die Begrenzung von  $T$ . Dann lautet die erste Randwertaufgabe: *Es ist ein in  $T$  reguläres, in  $T + S$  stetiges Potential  $u$  zu bestimmen, welches auf  $S$  vorgeschriebene Werte  $f$  annimmt. Die Werte  $f$  sollen eine stetige Ortsfunktion bilden.*

1) Hierzu wären weitergehende Voraussetzungen über  $v$  nötig. S. z. B. E. Schmidt, „Bemerkung zur Potentialtheorie“, *Schwarz-Festschrift, Berlin* (1914).

Die Aufgabe kann höchstens eine Lösung haben; denn wären zwei Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  vorhanden, so wäre  $u_1 - u_2 = v$  ein in  $T$  reguläres, in  $T + S$  stetiges, auf  $S$  verschwindendes Potential. Dieses müßte aber in  $T$  identisch verschwinden, weil es sonst in  $T$  ein Maximum oder ein Minimum hätte, was (s. o.) nicht möglich ist. Daher können nicht zwei verschiedene Lösungen existieren.

Sei spezieller  $T$  ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet, das von einer Kurve (Fläche) stetiger Krümmung begrenzt wird. Die gegebenen Randwerte brauchen bloß abteilungsweise stetig sein. Das gesuchte Potential  $u$  soll jetzt in  $T$  regulär, in jedem die Unstetigkeitspunkte von  $f$  nicht enthaltenden Bereiche in  $T + S$  stetig, bei Annäherung an die Unstetigkeitspunkte beschränkt und bei Annäherung an die anderen Punkte von  $S$  gleich  $f$  sein. Auch jetzt gilt der Eindeutigkeitssatz (S. z. B. L. Lichtenstein, l. c., Potentialtheorie, Nr. 12, wo auch noch andere Eindeutigkeitssätze angegeben sind).

Sei  $T$  ein Gebiet, das den Bedingungen der Anwendbarkeit der Greenschen Formeln (s. o.) genügt,  $S$  seine Begrenzung. Sei  $f$  eine stetige Ortsfunktion, welche die Integralbedingung

$$\int_S f ds = 0 \quad \text{bzw.} \quad \iint_S f d\omega = 0$$

erfüllt. Dann lautet die zweite Randwertaufgabe: *Es ist ein in  $T$  reguläres, bei Annäherung an  $S$  nebst Normalableitung stetiges Potential  $u$  zu bestimmen, dessen Normalableitung auf  $S$  die gegebenen Werte  $f$  annimmt.*

Diese Aufgabe hat bis auf eine additive Konstante höchstens eine Lösung. Sind nämlich  $u_1$  und  $u_2$  zwei Lösungen, so wendet man auf  $u_1 - u_2 = v$  die Formel (8) des § 2 an. Wegen  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$  auf  $S$  ergibt sich dann leicht  $v = \text{konst.}$  in  $T + S$ .

Die dritte Randwertaufgabe lautet: *Es ist ein in  $T$  reguläres, bei Annäherung an  $S$  nebst Normalableitung stetiges Potential  $u$  zu bestimmen, das auf  $S$  der Bedingung*

$$k \frac{\partial u}{\partial n} - hu = f$$

*genügt.*

Dabei sind  $k$  und  $h$  ebenso wie  $f$  gegebene stetige Ortsfunktionen. Die erste und zweite Randwertaufgabe können als

spezielle Fälle der dritten für  $k = 0$ ,  $h = 1$  bzw.  $k = 1$ ,  $h = 0$  angesehen werden.

Wird noch vorausgesetzt, daß  $k$  ständig dasselbe Vorzeichen hat (nirgends verschwindet) und daß  $h$  ständig dasselbe Vorzeichen wie  $k$  hat, so ergibt sich wieder mit Hilfe der Greenschen Formeln die Eindeutigkeit der Lösung. Werden aber bezüglich der Vorzeichen von  $h$  und  $k$  keine Voraussetzungen gemacht, so gilt der Eindeutigkeitssatz nicht mehr allgemein. Hier liefert nun die Integralgleichungstheorie, und zwar gleichzeitig bezüglich der Eindeutigkeits- und bezüglich der Existenzfrage, einen befriedigenden Satz (s. u.).

Sei  $S$  eine (einzige) geschlossene Kurve bzw. Fläche. Dann begrenzt  $S$  zwei Gebiete, ein Gebiet  $T_i$ , das Innere, und ein Gebiet  $T_a$ , das Äußere, welches den unendlich fernen Punkt enthält. In diesem Falle können wir also ein „inneres“ und ein „äußeres“ Randwertproblem stellen.

### B. Existenzsätze.

#### a) Kreis und Kugel. Poissonsche Integrale. Folgerungen.

Die erste Randwertaufgabe für ein spezielles Gebiet, nämlich den Kreis, ist von Poisson durch das nach ihm benannte Integral gelöst worden. Die Lösung des inneren Problems für den Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius  $l$  ist

$$(1_1) \quad u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_S f \left\{ \frac{\cos(r, n_s)}{r} - \frac{1}{2l} \right\} ds = \frac{1}{2\pi} \int_S f \frac{l^2 - R^2}{lr^2} ds,$$

wo wie immer  $P(x, y)$  der Aufpunkt,  $Q(\xi, \eta)$  der auf der Peripherie  $S$  liegende Integrationspunkt,

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

ist. Die Randwerte  $f$  sollen abteilungsweise stetig sein. Die Lösung des äußeren Problems ist

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_S f \frac{R^2 - l^2}{lr^2} ds,$$

unterscheidet sich also von der des inneren rein formal nur durch das Vorzeichen. Der exakte Beweis, daß  $u$  bei Annäherung an  $S$  die Werte  $f$  wirklich annimmt, ist zuerst von

H. A. Schwarz geführt worden (*Ges. Abh.* 2, S. 144—171 und S. 218—253).

Die Lösung des inneren Problems für die Kugel um den Nullpunkt mit Radius  $l$  ist

$$(1_2) \quad u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_S \int f \left\{ \frac{\cos(r, n)}{r^2} - \frac{1}{2lr} \right\} d\omega \\ = \frac{1}{4\pi} \int_S \int f \frac{l^2 - R^2}{lr^3} d\omega.$$

Ändert man hier das Vorzeichen und läßt  $P(x, y, z)$  im Außenraum  $T_a$  der Kugel variieren, so liefert das Integral nicht die Lösung des äußeren Problems in dem bisherigen Sinne; denn  $u$  ist im Gegensatz zum zweidimensionalen Problem im unendlich fernen Punkte nicht mehr regulär. Vielmehr ist  $u$  jetzt das in  $T_a$  mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes reguläre, in  $T_a + S$  mit Einschluß des unendlich fernen Punktes stetige, in diesem Punkte selbst verschwindende Potential, das auf  $S$  die Werte  $f$  annimmt.

Aus (1<sub>1</sub>) lassen sich wichtige Folgerungen ziehen, wobei der Einfachheit halber  $l = 1$  angenommen wird:

*Jedes reguläre Potential darf in der Umgebung irgendeines regulären Punktes, den man zum Nullpunkte machen kann, in eine Reihe der Form (2) entwickelt werden.*

$$(2) \quad u(R, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi. \\ [n = 0, 1, 2, \dots]$$

Dabei sind Polarkoordinaten  $R, \varphi$  eingeführt.

*Die Entwicklung ist nur auf eine Art möglich.*

Die Reihe darf beliebig oft gliedweise nach  $R$  und  $\varphi$  differenziert werden. Sie ist das Analogon zur Cauchyschen Potenzreihenentwicklung in der Funktionentheorie.

Weiter ergibt sich die der Laurentschen Entwicklung der Funktionentheorie entsprechende Entwicklung im Kreisinge

$$(3) \quad u = \frac{1}{2} (a_0 + a'_0 \log R) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n R^n + a_{-n} R^{-n}) \cos n\varphi + (b_n R^n + b_{-n} R^{-n}) \sin n\varphi.$$

(Über die Koeffizientenbestimmung s. z. B. Sternberg, *Potentialtheorie*, Berlin u. Leipzig (1926) Bd. 2, § 8.)

Die Radien der beiden Kreise seien  $l_1$  und  $l_2$  ( $l_1 > l_2$ ). Ist  $l_2 = 0$ , so erhält man die Entwicklung in der Umgebung einer isolierten singulären Stelle. Aus (3) folgert man: *Ist die logarithmische Potentialfunktion  $u$  in der Umgebung des endlichen Punktes  $O$  (diesen selbst höchstens ausgenommen) regulär und bleibt sie bei Annäherung an  $O$  beschränkt, so ist sie auch in  $O$  selbst regulär.* Die Koeffizienten  $a'_0$ ,  $a_{-n}$ ,  $b_{-n}$  müssen dann nämlich verschwinden. Der Satz bleibt gültig für den unendlich fernen Punkt, wie man durch Anwendung der Transformation der reziproken Radien beweist. Hieraus folgt auch, daß die Existenz von  $\lim_{R=\infty} u$  für die Regularität im Unendlichen hinreichend ist (s. § 2).

Der Entwicklung (2) entspricht im Raume die Entwicklung nach Kugelfunktionen (Heine, *Lehrbuch der Kugelfunktionen*, Halle 1881; Wangerin, *Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen*, Bd. 2, Berlin und Leipzig 1921).

Mit Benutzung des Poissonschen Integrals sowie der Sätze über die Lage der Extrema kann man die beiden wichtigen Theoreme von Harnack beweisen:

I. Ist die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$ , deren Glieder  $u_n(x, y)$  in  $T$  reguläre, in  $T + S$  stetige Potentiale sind, auf  $S$  gleichmäßig konvergent, so ist sie in  $T + S$  gleichmäßig konvergent und stellt ein in  $T$  reguläres, in  $T + S$  stetiges Potential  $u$  dar. Die durch gliedweise Differentiation der obigen Reihe entstehenden Reihen konvergieren in jedem ganz in  $T$  liegenden Bereiche gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen von  $u$ .

II. Sind die Potentiale  $u_1(x, y)$ ,  $u_2(x, y)$ , ... in  $T$  regulär und nicht negativ, konvergiert ferner die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$  wenigstens in einem Punkte von  $T$ , so konvergiert sie gleichmäßig in jedem ganz in  $T$  liegenden Bereiche und stellt ein in  $T$  reguläres Potential dar.



## b) Beliebige Gebiete. Greensche Funktion.

Einen Existenzbeweis der Lösungen der Randwertaufgaben für allgemeine Gebiete hatte zuerst Dirichlet versucht. Seine Methode, die Riemann das „*Dirichletsche Prinzip*“ nannte, wurde jedoch von Weierstraß als nicht exakt nachgewiesen. Für eine bestimmte Klasse ebener Gebiete hat dann H. A. Schwarz die Existenz der Greenschen Funktion (s. u.) bewiesen. Das Gebiet  $T$  wurde als beschränkt und einfach zusammenhängend, die Begrenzung  $S$  überall nach außen konvex vorausgesetzt. Schwarz approximiert  $T$  durch Polygone, deren Greensche Funktionen er schon früher gefunden hatte (*Ges. Abh.* 2, 80), und zeigte, daß die Greenschen Funktionen dieser Polygone gegen eine Grenzfunktion konvergieren, die er mit der Greenschen Funktion von  $T$  identifizieren konnte (*Ges. Abh.* 2, 108). Um allgemeinere Gebiete behandeln zu können, wandte er das „alternierende Verfahren“ an (*Ges. Abh.* 2, 133 ff., 144 ff., 303 ff.). C. Neumann hat die erste Randwertaufgabe sowohl in der Ebene wie im Raume durch die „Methode des arithmetischen Mittels“ gelöst (*Math. Ann.* 11, 264 ff.). H. Poincaré hat das Problem durch Einführung eines Parameters in die Randbedingung wesentlich verallgemeinert und weitergeführt (*Acta math.* 20 (1897) und *Rend. di Palermo* 8 (1894)). J. Fredholm hat die Randwertaufgaben auf Integralgleichungen zurückgeführt (S. 1129). E. R. Neumann (*Math. Ann.* 55 und 56, *Jablonowskipreisschriften* Nr. 37, 41) und J. Plemelj (*Jablonowskipreisschrift* Nr. 40) haben neue Behandlungsweisen der Randwertprobleme dargelegt. D. Hilbert und R. Courant haben das Dirichletsche Prinzip in einwandfreier Form exakt begründet und die Randwertaufgaben für Gebiete sehr allgemeiner Natur gelöst. Schließlich hat O. Perron den Existenzsatz auf völlig neue Art bewiesen (S. 1132).

Die zur ersten Randwertaufgabe gehörige *Greensche Funktion*  $G(x, y; \xi, \eta)$  ist eine Funktion zweier Punkte  $P(x, y)$  und  $Q(\xi, \eta)$  mit folgenden Eigenschaften: Sie stellt als Funktion von  $Q$  ein mit Ausschluß von  $P$  in  $T$  reguläres, in  $T + S$  stetiges Potential dar. Sie wird in  $P$  logarithmisch unendlich derart, daß

$$(4_1) \quad G(P, Q) - \log \frac{1}{r} = w(P, Q) \quad [r = PQ]$$

ein auch in  $P$  reguläres Potential ist. Sie verschwindet, wenn  $Q$  auf  $S$  fällt.

Im Raume tritt an Stelle von (4<sub>1</sub>)

$$(4_2) \quad G(P, Q) - \frac{1}{r} = w(P, Q).$$

Die Bestimmung von  $w(P, Q)$  ist offenbar ein spezieller Fall der Randwertaufgabe. Es ist auch umgekehrt mit der Greenschen Funktion die Lösung der Randwertaufgabe bestimmt, also das allgemeine Problem auf ein spezielles zurückgeführt (s. Gl. 6).

Ähnlich wird die Greensche Funktion  $G^{II}(P, Q)$  für die zweite Randwertaufgabe definiert. Da hier aber eine reguläre Lösung  $u = \text{const.}$  des Randwertproblems mit der homogenen Bedingung  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  existiert, womit es zusammenhängt, daß die Werte  $\frac{\partial u}{\partial n} = f$  des unhomogenen Problems nicht willkürlich gewählt

werden dürfen, sondern der Bedingung  $\int_S f ds = 0$  genügen müssen, tritt eine Schwierigkeit auf. Man gelangt zur „erweiterten“ Greenschen Funktion. Die Normalableitung  $\frac{\partial G^{II}(P, Q)}{\partial n_Q}$  verschwindet nicht, wenn  $Q$  mit einem Punkte  $s$  von  $S$  zusammenfällt, sondern es ist

$$\frac{\partial G^{II}(P, s)}{\partial n_s} = \frac{2\pi}{l},$$

wobei  $l$  die Länge von  $S$  ist. Ferner erfüllt  $G^{II}$  noch die Bedingung

$$\int_S G^{II}(P, s) ds = 0.$$

Die räumliche Funktion  $G^{II}(P, Q)$  genügt den Bedingungen

$$\frac{\partial G^{II}(P, s)}{\partial n_s} = \frac{4\pi}{F},$$

wobei  $F$  der Flächeninhalt von  $S$  ist, sowie

$$\iint_S G^{II}(P, s) d\omega = 0.$$

Auch für die dritte Randwertaufgabe existiert eine Greensche Funktion  $G^{III}(P, Q)$ . Diese ist eine gewöhnliche, wenn die homogene Randwertaufgabe mit  $k \frac{\partial u}{\partial n} - hu = 0$  keine reguläre Lösung hat, eine erweiterte, wenn eine solche Lösung existiert.

Die Greenschen Funktionen sind sämtlich in ihren beiden Argumentpunkten symmetrisch, d. h. es ist

$$(5) \quad G(P, Q) = G(Q, P),$$

was man durch Anwendung der Greenschen Formeln mit Hilfe mehrerer Grenzübergänge beweist.

Die Lösung  $u$  der ersten Randwertaufgabe kann mittels  $G(P, Q)$  in der Form

$$(6) \quad u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial G(P, s)}{\partial n_s} f(s) ds$$

dargestellt werden, wo  $f$  als abteilungsweise stetig vorausgesetzt wird. Man beweist (6) wiederum mit Benutzung der Greenschen Formeln. Hierbei wird allerdings von der Existenz einer stetigen Normalableitung  $\frac{\partial G}{\partial n_s}$  Gebrauch gemacht, welche aus der Definition von  $G$  keineswegs hervorgeht. Nun stellen aber die Randwerte der Funktion  $w(P, Q)$ , d. h. die Werte  $-\log \frac{1}{r}$ , eine Randfunktion dar, welche sicherlich zweimal (sogar beliebig oft) stetig differenzierbar ist. Daraus folgt, daß die Ableitungen  $\frac{\partial w}{\partial \xi}$  und  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$  bei Annäherung an  $S$  stetig bleiben<sup>1)</sup>, also auch  $\frac{\partial w}{\partial n}$ , mithin schließlich  $\frac{\partial G}{\partial n}$ .

Für die Lösung der zweiten Randwertaufgabe hat man die Darstellung

$$(7) \quad u(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_S G^{II}(P, s) f(s) ds + \frac{1}{l} \int_S u(s) ds.$$

Analoge Formeln erhält man bei den räumlichen Problemen.

An die Greensche Funktion  $G$  knüpft die Theorie der konformen Abbildung an.<sup>2)</sup> Vgl. Rep. I<sub>2</sub>, Kap. XV.

Einige der oben namhaft gemachten Methoden zur Lösung der Randwertaufgaben mögen kurz skizziert werden.

C. Neumann bildet zur Lösung der ersten Randwertaufgabe die Funktionen

1) S. z. B. L. Lichtenstein, Enzyklopädieartikel II über Potentialtheorie, S. 243.

2) L. Lichtenstein, l. c. S. 253.

$$f_0(s) = f(s)$$

$$f_m(s) = \frac{1}{\pi} \int_S f_{m-1}(t) \frac{\partial \left( \log \frac{1}{r_{st}} \right)}{\partial n_t} dt \quad [m = 1, 2, \dots]$$

und

$$u_m(P) = \frac{1}{\pi} \int_S f_m(t) \frac{\partial \left( \log \frac{1}{r_{Pt}} \right)}{\partial n_t} dt \quad [m = 0, 1, 2, \dots].$$

Die Funktionen  $u_m(P)$  sind Potentiale von Doppelbelegungen. Dann stellt der Grenzwert der in  $T + S$  gleichmäßig konvergenten Reihe

$$(u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \dots = u$$

ein Potential dar, welches auf  $S$  die Werte  $f(s) - C$  annimmt, wo  $C$  eine gewisse Konstante ist. Demnach wird  $u + C$  die Lösung des Problems. Die Begrenzung  $S$  von  $T$  wird als stetig gekrümmt vorausgesetzt. Analog wird das räumliche Problem mittels Potentialen von Doppelbelegungen behandelt.

Die Fredholmsche Lösung<sup>1)</sup> mittels Integralgleichungen<sup>2)</sup> führt auf besonders elegante Art zum Ziele; sie hat außerdem den Vorzug großer Allgemeinheit, insofern sie auch auf hyperbolische und parabolische Differentialgleichungen (s. u.) angewandt werden kann. Sei  $T$  wiederum von einer Kurve  $S$  mit stetiger Krümmung begrenzt und ferner einfach zusammenhängend und beschränkt. Die Voraussetzung stetiger Krümmung von  $S$  wird gemacht, damit die Kerne der auftretenden Integralgleichungen von der Art sind, daß die Fredholmsche Theorie angewandt werden kann.<sup>3)</sup> Fredholm macht den Ansatz

$$(8) \quad u = \int_S \frac{\nu(t) \cos(r, n_t)}{r} dt,$$

benutzt also ebenfalls ein Potential einer Doppelbelegung. Das unbekannte Moment  $\nu$  wird so bestimmt, daß die Randbedingung

$$u_i = f$$

1) *Acta math.* **27** (1903).

2) Die Theorie der Integralgleichungen ist dargestellt in Kap. XXIV dieses Bandes.

3) Vgl. z. B. W. Sternberg, „Potentialtheorie“ (1926), Bd. II, S. 103.

erfüllt ist, wo  $f$  abteilungsweise stetig sein darf. Man erhält für  $v$  die Integralgleichung

$$(9) \quad u_i = \pi v(s) + \int_s \frac{v(t) \cos(r_{st}, n_i)}{r_{st}} dt = f(s)$$

mit dem Kern

$$(10) \quad K(s, t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(r_{st}, n_i)}{r_{st}}.$$

Mit Benutzung der wesentlichen Eigenschaften des Potentials der Doppelbelegung (insbes. Gl. (21) und (23) des § 2) ergibt sich, daß die zu (9) gehörige homogene Integralgleichung ( $f(s) \equiv 0$ ) keine Lösung besitzt, d. h. daß  $\lambda = -1$  kein Eigenwert von  $K(s, t)$  ist.<sup>1)</sup> Nach der Fredholmschen Theorie hat daher (9) eine und nur eine Lösung  $v$ , welche, in (8) eingesetzt, die Lösung der Randwertaufgabe liefert. In ähnlicher Weise wird das äußere Problem erledigt.

Bei der zweiten Randwertaufgabe macht man den Ansatz

$$(11) \quad u = \int_s \kappa(t) \log \frac{1}{r} dt,$$

stellt also  $u$  als Potential einer einfachen Schicht dar und erhält zur Bestimmung von  $\kappa$  wegen

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = f$$

die Integralgleichung

$$(12) \quad \kappa(s) - \int_s K(t, s) \kappa(t) dt = -\frac{f(s)}{\pi},$$

wobei  $K(t, s)$  aus dem durch (10) gegebenen Kerne  $K(s, t)$  durch Vertauschung von  $s$  mit  $t$  hervorgeht. Da hier die zugehörige homogene Integralgleichung eine Lösung hat, muß  $f(s)$ , wenn (12) überhaupt Lösungen besitzen soll, die Integralbedingung

$$\int_s f(s) ds = 0$$

befriedigen. Wir setzen voraus, daß dies der Fall ist (vgl. Gl. 7 des § 2). Dann hat die allgemeine Lösung von (12) die Form

1) Dabei wird die Voraussetzung des einfachen Zusammenhanges von  $T$  benutzt.

$\kappa + C\bar{\kappa}$ , wo  $\kappa$  irgendeine spezielle Lösung von (12),  $C$  eine Konstante und  $\bar{\kappa}$  die (bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte) Lösung der homogenen Gleichung ist. Setzt man die allgemeine Lösung von (12) in (11) ein, so erhält man die bis auf einen konstanten Summanden bestimmte Lösung der Randwertaufgabe. Auch das äußere Problem hat eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte Lösung.

Was die dritte Randwertaufgabe mit der Bedingung

$$k \frac{\partial u_i}{\partial n} - h u_i = f$$

betrifft, so nehmen wir an, daß  $k$  auf  $S$  nirgends verschwindet. Wir können dann durch  $k$  dividieren, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $k \equiv 1$  setzen, so daß

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} - h u = f$$

wird. Die Funktionen  $h$  und  $f$  seien abteilungsweise stetig. Man setzt wieder

$$u = \int_S \kappa(t) \log \frac{1}{r} dt$$

und erhält für  $\kappa$  die Integralgleichung

$$-\pi \kappa(s) + \int_S \kappa(t) \left\{ \frac{\cos(\mathbf{r}_{st}, \mathbf{n}_s)}{r_{st}} - h(t) \log \frac{1}{r_{st}} \right\} dt = f(s).$$

Die Fredholmsche Theorie liefert das Ergebnis: Entweder hat das vorgelegte inhomogene Problem eine eindeutig bestimmte Lösung oder das zugehörige homogene Problem mit der Randbedingung  $\frac{\partial u_i}{\partial n} - h u_i = 0$  besitzt eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen. Im letzteren Falle hat das inhomogene Problem dann und nur dann Lösungen, wenn  $f$  gewissen Integralbedingungen genügt, und die Lösung ist nicht mehr eindeutig.

Der erstere Fall tritt jedenfalls dann ein, wenn auf  $S$  überall  $h \geq 0$  ist.

Die drei räumlichen Probleme werden in analoger Weise gelöst.

Will man für mehrfach zusammenhängende Gebiete die Randwertaufgaben mittels Integralgleichungen lösen, so s. man z. B. J. Plemelj, *Jablonowski-Preisschrift* Nr. 40.



Über weitere Randwertaufgaben s. H. Poincaré, *Sechs Vorträge aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik*, Leipzig (1910); E. Picard, *C. R.* **156** (1913) 1119—1124 und *Rendic. di Palermo* **37** (1914); R. Bär, *Diss.*, Würzburg (1915).

Bisher haben wir die Begrenzung  $S$  von  $T$  als stetig gekrümmt vorausgesetzt. Wir müssen noch kurz auf Gebiete allgemeinerer Art eingehen. R. Courant (*J. f. Math.* **144** (1914)), L. Lichtenstein (*Ber. d. Berl. math. Ges.* **15** (1916)) und O. Perron (*Math. Zs.* **18** (1923)) haben Gebiete zugrunde gelegt, bei denen schließlich nichts weiter vorausgesetzt wird, als daß die Begrenzung keine isolierten Punkte enthalten darf. Diese Voraussetzung aber beruht nicht auf einem Mangel der Methode, sondern liegt in der Natur der Sache. Denn ist z. B.  $T$  das Innere eines Kreises unter Wegnahme des Mittelpunktes,  $S$  also die Peripherie und dazu der Mittelpunkt, so können die Werte eines in  $T$  regulären, in  $T + S$  stetigen Potentials auf  $S$  nicht willkürlich vorgeschrieben werden. Vielmehr ist der Wert des Potentials im Mittelpunkte gleich dem arithmetischen Mittel der Peripheriewerte.

Die Methode von O. Perron (s. o.), dessen Formulierung sich durch besondere Allgemeinheit auszeichnet, bezieht sich auf die erste Randwertaufgabe in der Ebene (dürfte aber auf die andern Randwertprobleme und in den Raum übertragbar sein): Sei  $T$  ein beliebiges beschränktes ebenes Gebiet. Es braucht nicht schlicht zu sein, was bisher stillschweigend angenommen wurde; es soll aber keine Windungspunkte enthalten. Dagegen sind Windungspunkte auf dem Rande  $S$  zulässig. Auf  $S$  ist eine beschränkte Funktion  $f$  gegeben, ihre obere bzw. untere Limesfunktion heiße  $\bar{f}$  bzw.  $\underline{f}$ . Gesucht wird eine in  $T + S$  beschränkte in  $T$  reguläre Potentialfunktion  $u$ , deren Limesfunktionen  $\bar{u}$  und  $\underline{u}$  auf  $S$  die Bedingung

$$\underline{f} \leq \underline{u} \leq \bar{u} \leq \bar{f}$$

erfüllen. (Die Limesfunktionen  $\bar{u}$  und  $\underline{u}$  sind in bezug auf  $T + S$  zu verstehen.) Der Existenzbeweis für  $u$  gestaltet sich folgendermaßen: Sei  $v$  irgendeine in  $T + S$  definierte beschränkte Funktion und  $K$  ein beliebiger Kreis in  $T$ . Dann bedeutet  $\mathfrak{M}_K v$  diejenige Funktion, die außerhalb und auf der Peripherie von  $K$  mit  $v$  übereinstimmt, innerhalb von  $K$  aber gleich dem über die Peripherie erstreckten und mit den Peripheriewerten von  $v$

gebildeten Poissonschen Integral ist. (Es kommen nur solche Funktionen  $v$  in Betracht, die wenigstens im Lebesgueschen Sinne integrierbar sind). Ist z. B.  $v$  stetig, so ist  $\mathfrak{M}_K v$  in  $K$  natürlich die eindeutig bestimmte Lösung der ersten Randwertaufgabe mit den Peripheriewerten von  $v$  als Randwerten. Die Bedingung, daß  $u$  in  $T$  ein reguläres Potential sein soll, kann nun offenbar so formuliert werden, daß für jeden Kreis  $K$  in  $T$   $u = \mathfrak{M}_K u$  sein muß. Jetzt bezeichne „Oberfunktion“  $\psi$  („Unterfunktion“  $\varphi$ ) jede in  $T + S$  stetige Funktion, die den Ungleichungen genügt

$$\begin{aligned}\psi &\geq \mathfrak{M}_K \psi & (\varphi &\leq \mathfrak{M}_K \varphi) & \text{für jeden Kreis } K \text{ in } T, \\ \psi &\geq \bar{f} & (\varphi &\leq \underline{f}) & \text{auf } S.\end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß jede Oberfunktion an jeder Stelle von  $T + S$  mindestens so groß ist wie jede beliebige Unterfunktion. An jeder Stelle  $P$  von  $T + S$  hat also die Menge der Oberfunktionen eine endliche untere Grenze  $u(P)$ . Die so in  $T + S$  definierte Funktion  $u(P)$  löst die Randwertaufgabe. Zunächst wird bewiesen, daß  $u$  in  $T$  ein reguläres Potential ist, und zwar sogar ohne jede Voraussetzung über den Rand. Hierauf wird gezeigt, daß  $u$  die Randbedingungen erfüllt, unter der Voraussetzung, daß  $S$  keine isolierten Punkte enthält. — Übrigens ist in einem Randpunkte, wo  $f$  stetig ist, offenbar auch  $u$  stetig und nimmt den Wert  $f$  an.

Natürlich ist jetzt die Lösung im allgemeinen nicht mehr eindeutig. Man kann z. B. ebensogut an jeder Stelle  $P$  die obere Grenze der Werte der Unterfunktionen bilden. Auch die hierdurch in  $T + S$  definierte Funktion löst die Randwertaufgabe und ist im allgemeinen, d. h. ohne spezielle Voraussetzungen über  $f$ , von  $u(P)$  verschieden.

#### § 4. Die allgemeine lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen.

Die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen hat die Form

$$(1) \quad L(u) \equiv A \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D \frac{\partial u}{\partial \xi} + E \frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu = G,$$

wo  $A, \dots, G$  stetige Funktionen von  $\xi, \eta$  allein sind. Ferner mögen  $A, B, C$  stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung,

$D, E$  solche erster Ordnung besitzen. Die Gleichung (1) ist in einem Gebiete  $I$  der  $(\xi, \eta)$ -Ebene elliptisch, wenn in diesem Gebiete überall  $AC - B^2 > 0$  ist, was wir jetzt voraussetzen.

Sind  $\varphi(\xi, \eta) = \text{const.}$ ,  $\psi(\xi, \eta) = \text{const.}$  die beiden Scharen der konjugiert komplexen Charakteristiken, so kann (1) durch die Transformation

$$\begin{aligned} (2) \quad x + iy &= \varphi(\xi, \eta) \\ x - iy &= \psi(\xi, \eta) \end{aligned}$$

auf die Normalform

$$(3) \quad N(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = g$$

gebracht werden, deren Charakteristiken

$$\begin{aligned} x + iy &= \text{const.}, \\ x - iy &= \text{const.} \end{aligned}$$

sind (Zurückführung auf die Normalform zuerst bei Laplace, hierauf P. du Bois-Reymond, „*Beiträge zur Integration der partiellen Differentialgleichungen*“. Leipzig 1864).

Für  $a = b = c = g = 0$  erhält man wieder die Potentialgleichung.

Die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  ergeben sich als Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen, wobei die gegebenen Koeffizienten  $A, B, C$  als analytisch vorausgesetzt werden (eine andere Zurückführung ohne diese Voraussetzung s. u.).

Wie bei der Potentialgleichung, so spielt auch bei der allgemeinen Gleichung (1) die Greensche Formel eine fundamentale Rolle. Sie lautet, wenn der zu  $L(u)$  „adjungierte Differentialausdruck“

$$(4) \quad \frac{\partial^2(Av)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2(Bv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(Cv)}{\partial y^2} - \frac{\partial(Dv)}{\partial x} - \frac{\partial(Ev)}{\partial y} + F(v) \equiv M(v)$$

gesetzt wird,

$$(5) \quad \iint_T (v L(u) - u M(v)) dx dy = \int_S (Q dy - P dx),$$

wo die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} (6) \quad P &= B \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + C \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( E - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) uv \\ Q &= A \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( D - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) uv \end{aligned}$$

eingeführt sind. Hierbei ist  $T$  ein beschränktes Gebiet, welches von einer endlichen Anzahl von Kurvenstücken mit stetiger Tangente begrenzt wird. Die Funktionen  $u$  und  $v$  sollen in  $T + S$  nebst Ableitungen erster Ordnung, in  $T$  nebst Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig sein. Das Randintegral ist so zu durchlaufen, daß die begrenzte Fläche zur Linken liegt. Die Formel (5) stellt die Verallgemeinerung von Gl. (4) des § 2 dar.

Es ist auch umgekehrt  $L(u)$  zu  $M(v)$  adjungiert.

Etwas einfacher als der allgemeine Differentialausdruck  $L(u)$  ist der „sich selbst adjungierte“, für den  $L(u)$  mit  $M(u)$  identisch wird. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn die Identitäten

$$(7) \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = D, \quad \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = E$$

gelten. Alsdann nimmt  $L(u)$  die Form an

$$(8) \quad L(u) = M(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} \right) + F u.$$

Zu  $N(u)$  adjungiert ist der Differentialausdruck

$$(9) \quad R(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv.$$

Die Greensche Formel lautet jetzt

$$(10) \quad \iint_T (v N(u) - u R(v)) dx dy = - \int_S \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_S uv (a dy - b dx).$$

In dem ersten Integral der rechten Seite bezeichnet  $\frac{\partial}{\partial n}$  die Differentiation in Richtung der „inneren“ Normalen.

Für die elliptisch vorausgesetzte Gleichung (1) oder auch für (3) können nun dieselben Randwertaufgaben wie für  $\Delta u = 0$  gestellt werden. Die erste Randwertaufgabe lautet: *Es ist eine in  $T$  reguläre (d. h. nebst Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige), in  $T + S$  stetige Lösung von  $N(u) = g$  zu finden, die auf  $S$  die Werte  $f$  annimmt, wo  $f$  eine stetige Ortsfunktion ist.* Falls  $f$  nur abteilungsweise stetig ist, so ist die Randwertaufgabe wie in der Potentialtheorie zu modifizieren.

Die Randwertaufgabe hat sicher höchstens eine Lösung, wenn in  $T$  überall

$$(11) \quad c < 0$$

ist. Ist in  $T$  identisch

$$(11a) \quad c = 0,$$

so kann eine in  $T$  reguläre, in  $T + S$  stetige Lösung in  $T$  weder ein Maximum noch ein Minimum haben, woraus wieder die Eindeutigkeit folgt. (Lichtenstein, *Palermo Rend.* **33** (1912).)

Der Eindeutigkeitssatz gilt ferner, wenn in  $T + S$

$$(12) \quad \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - 2c \geq 0$$

ist, sowie auch, wenn

$$(13) \quad \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - c \geq 0$$

ist. (Lichtenstein, Enzyklopädieartikel über partielle Differentialgleichungen S. 1298.)

Um die Existenz der Lösung  $u$  der Randwertaufgabe zu beweisen, benutzt man bei „hinreichend kleinen“ Gebieten die Methode der sukzessiven Annäherungen, die auch auf nicht-lineare Differentialgleichungen anwendbar und in § 8 kurz skizziert ist. Bei Gebieten beliebiger Größe kann man folgendermaßen verfahren: Ist  $G(P, Q)$  die zu  $T$  und der ersten Randwertaufgabe gehörige Greensche Funktion der Potentialtheorie und  $U$  das in  $T$  reguläre, in  $T + S$  stetige Potential, welches auf  $S$  dieselben Werte  $f$  wie die gesuchte Lösung  $u$  annimmt (die Existenz von  $G$  und  $U$  ist durch die Ergebnisse des § 3 gesichert), so findet man für  $u$  durch wiederholte Anwendung der Greenschen Formeln des § 2 zunächst eine Integro-Differentialgleichung und hierauf durch partielle Integration

$$(14) \quad u(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_T \left[ -\frac{\partial(aG)}{\partial \xi} - \frac{\partial(bG)}{\partial \eta} + cG \right] u d\xi d\eta \\ - \frac{1}{2\pi} \iint_T G \cdot g d\xi d\eta + U(P)$$

Das ist eine unhomogene Integralgleichung für  $u$ , auf welche die Theorie von Fredholm angewandt werden kann. Diese Theorie liefert das Resultat: Entweder hat die vorgelegte Randwertaufgabe eine und nur eine Lösung, oder das zugehörige homogene Problem [ $g \equiv 0$ ,  $f \equiv 0$ ] hat eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen.

Der erstere Fall tritt sicher dann ein, wenn eine der Bedingungen (11) oder (12) oder (13) erfüllt ist.

Im letzteren Falle hat das vorgelegte unhomogene Problem im allgemeinen keine Lösung. Sind doch Lösungen vorhanden, was stattfindet, wenn  $f$  und  $g$  gewissen Integralbedingungen genügen, so hängt die Lösung von willkürlichen Konstanten ab, ist also nicht mehr eindeutig.

Im ersteren Falle, wo also eine eindeutig bestimmte Lösung existiert, ist damit auch die Existenz der Greenschen Funktion bewiesen. Das ist eine Funktion zweier Punkte  $P(x, y)$  und  $Q(\xi, \eta)$ , welche als Funktion von  $Q$  eine in  $T$ , abgesehen vom Punkte  $P$ , reguläre, in  $T + S$  stetige, auf  $S$  verschwindende Lösung von  $N(u) = 0$  darstellt. Ferner sollen

$$(15) \quad w(P, Q) = G(P, Q) - \log \frac{1}{r}, \quad [r = \overline{PQ}]$$

sowie

$$\frac{\left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right|}{|\log r|}$$

auch in  $Q$  beschränkt bleiben.

Die Ableitungen  $\frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}$ , folglich auch  $\frac{\partial G}{\partial \xi}, \frac{\partial G}{\partial \eta}$  und schließlich  $\frac{\partial G}{\partial n}$  bleiben bei Annäherung an  $S$  stetig.

Ist  $H(P, Q)$  die zur adjungierten Gleichung  $R(v) = 0$  gehörige Greensche Funktion (existiert die Greensche Funktion für  $N(u) = 0$ , so auch die für  $R(v) = 0$ ), so gilt die Identität

$$(16) \quad G(P, Q) = H(Q, P),$$

die man aus (10) durch Grenzübergang ableiten kann. Bei selbstadjungierten Gleichungen z. B. bei der Potentialgleichung sind  $G$  und  $H$  identisch, und man hat das Symmetriegesetz

$$G(P, Q) = G(Q, P).$$

Da die Greensche Funktion  $H$  ebenso wie  $G$  eine bei Annäherung an  $S$  stetige Normalableitung besitzt, so gilt die der Formel (6) des § 3 entsprechende

$$(17) \quad u(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_T \int H(P, Q) g(Q) d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial H(P, s)}{\partial n_s} f(s) ds.$$



Die Greensche Funktion  $G$  kann auch in der Form

$$(18) \quad G(P, Q) = \log \frac{1}{r} \cdot U(P, Q) + V(P, Q)$$

dargestellt werden, wo  $U$  und  $V$  nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich in  $T$  stetig sind und  $U$  der Gleichung  $N(U) = 0$ , sowie der Identität  $U(P, P) = 1$  genügt. Jede in obiger Form darstellbare Lösung der Gleichung  $N(u) = 0$  heißt „Grundlösung“. Die Greensche Funktion ist demnach die auf  $S$  verschwindende Grundlösung.

Eine Grundlösung der allgemeineren Gleichung (1), wo

$$AC - B^2 \equiv 1$$

vorausgesetzt wird, was offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, ist eine in der Form

$$(19) \quad G(P, Q) = -\log \{ C(P)(x - \xi)^2 - 2B(P)(x - \xi)(y - \eta) + A(P)(y - \eta)^2 \} + w(P, Q)$$

darstellbare Lösung, wobei  $w$ , sowie

$$\frac{\left| \frac{\partial w}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial w}{\partial \eta} \right|}{|\log r|}$$

auch im Punkte  $P$  beschränkt bleiben. Die Bestimmung einer Grundlösung von (1) kann auf eine Integralgleichung reduziert werden. S. E. E. Levy, *Palermo Rend.* **24** (1907). Hier werden sogar Grundlösungen der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung  $2p$ -ter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen, sowie auch Grundlösungen von elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Variablen bestimmt. Vgl. ferner Lichtenstein, *J. f. Math.* **142** (1913). Hat man eine Grundlösung von (1) gewonnen, so kann (1) auf die Normalform (3) gebracht werden (Lichtenstein *J. f. Math.* **142**). Die Koeffizienten  $A, B, C$  werden nur nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung als stetig vorausgesetzt, nicht als analytisch.

Randwertaufgaben etwa der Gleichung (3) für allgemeinere Gebiete, z. B. für ein von einer Jordanschen Kurve  $S$  begrenztes Gebiet  $T$ , kann man behandeln, indem man eine unendliche Folge ineinander geschachtelter gegen  $T$  konvergierender Gebiete  $T_i$  [ $i = 1, 2, \dots$ ] zu Hilfe nimmt, welche von stetig gekrümmten

Kurven  $S_i$  [ $i = 1, 2, \dots$ ] begrenzt werden. Sind  $a, b, c, f$  sowie die Ableitungen erster Ordnung von  $a, b$  in einem  $T + S$  in seinem Innern enthaltenden Bereiche (oder anders ausgedrückt, in  $T + S$  und noch etwas darüber hinaus) stetig und ist in  $T + S$  ständig  $c < 0$ , so existieren jedenfalls die Greenschen Funktionen  $G_1, G_2, \dots$ . Die Reihe

$$G_1 + (G_2 - G_1) + (G_3 - G_2) + \dots$$

kann als konvergent nachgewiesen und ihr Grenzwert mit der Greenschen Funktion  $G$  von  $T$  identifiziert werden. Ist auch ständig  $c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} < 0$ , so existiert auch die Greensche Funktion  $H(P, Q)$ . Von hier aus gelangt Lichtenstein zur Lösung der ersten Randwertaufgabe, zunächst für stetige und mittels eines Grenzüberganges auch für abteilungsweise stetige Randwerte (*J. f. Math.* **142**). Werden die Voraussetzungen  $c < 0$ ,  $c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} < 0$  fallen gelassen, so schreibt man (3) in der Form

$$\Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + ku = g + (k - c)u,$$

wo  $k$  eine Konstante ist, welche den Bedingungen

$$k < 0, \quad k - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} < 0$$

genügt, im übrigen beliebig gewählt werden kann, und erhält für  $u$  eine Fredholmsche Integralgleichung (Lichtenstein, l. c.). Daher ergibt sich wieder ebenso wie im Falle einer stetig gekrümmten Begrenzung: Entweder hat das unhomogene Problem eine und nur eine Lösung, oder das zugehörige homogene Problem besitzt eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen.

Die zweite und dritte Randwertaufgabe der Gleichung (3) können in ähnlicher Weise wie die erste behandelt werden, wie es ja auch bei der Potentialgleichung ausgeführt wurde (Picard, *Ann. d. l'Ec. Norm.* **14**, 1907. S. a. Hilbert, *Gött. Nachr.* **1904** oder „*Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*“ Leipzig, 2. Aufl. 1924, ferner Lichtenstein *J. f. Math.* **143**, sowie *Enzykl. „Elliptische Differentialgleichungen“* S. 1303 bis 1305.)

### § 5. Lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Variablen.

Die allgemeine lineare Gleichung mit drei unabhängigen Variablen lautet

$$(1) \quad \sum_{i,k=1}^3 A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = D,$$

wobei die  $A_{ik}$ , die  $B_i$ , sowie  $C$  und  $D$  Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$  allein sind. Sie ist in  $T$  elliptisch, wenn für alle Punkte von  $T$

$$(2) \quad \sum_{i,k=1}^3 A_{ik} t_i t_k$$

eine definite Form der Variablen  $t_1, t_2, t_3$  ist, was wir voraussetzen. Die Gleichung

$$(3) \quad \Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} + hu = g$$

ist hier eine spezielle Gleichung, d. h. (1) kann im allgemeinen nicht (vgl. im Gegensatz hierzu den Fall von zwei unabhängigen Variablen) in (3) transformiert werden

Die spezielle Gleichung (3) kann in ähnlicher Weise wie die Normalform (3) des § 3 behandelt werden. Für die Gleichung (1) sind aber neue Kunstgriffe nötig. Diese Gleichung ist gleichzeitig von L. Lichtenstein und W. Sternberg untersucht worden. Dabei werden die Funktionen  $A_{ik}$  nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, die  $B_i$  nebst ihren Ableitungen erster Ordnung,  $C$  und  $D$  als stetig vorausgesetzt. (Lichtenstein *Enzyklopädie* II S. 1300ff., *Math. Zs.* **20** (1924). Sternberg *Math. Zs.* **21** (1924)). Sternberg führt das Studium von (1) auf das der selbstadjungierten homogenen Gleichung

$$(4) \quad L(u) \equiv \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = 0$$

zurück, welche in den Koeffizienten der Ableitungen zweiter Ordnung mit (1) übereinstimmt, bestimmt Lösungen von (4), welche die den Potentialen einer einfach oder doppelt belegten Fläche charakteristischen Eigenschaften besitzen, und löst schließlich die erste und die zweite Randwertaufgabe durch ein Verfahren, welches dem Fredholmschen Verfahren in der Potentialtheorie entspricht. In der Potentialtheorie benutzt man bei der

Lösung der Randwertaufgaben das Verhalten der Potentiale im Unendlichen<sup>1)</sup>. Bei der Anwendung dieses Verfahrens auf (4) entsteht eine Schwierigkeit, da die  $A_{ik}$  nur in einem beschränkten Gebiete  $T$  definiert sind. Daher setzt Sternberg die gegebenen Koeffizienten über  $T$  hinaus zweckmäßig fort, so daß  $L(u)$  außerhalb einer genügend großen Kugel um den Nullpunkt mit  $\Delta u$  identisch wird.

Die Methoden von Lichtenstein und von Sternberg zur Behandlung von (1) können auf elliptische Gleichungen mit beliebig (endlich) vielen unabhängigen Variablen ausgedehnt werden, so daß nunmehr in der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen derselbe Grad von Allgemeinheit erreicht ist, wie in der Theorie der hyperbolischen Gleichungen durch die Untersuchungen von Hadamard (siehe § 11).

## § 6. Lineare elliptische Differentialgleichungen mit Parameter.

Viele Randwertprobleme der theoretischen Physik führen zu einer Differentialgleichung mit Parameter, z. B. die nicht stationären Probleme der Wärmeleitung und der Elastizitätstheorie. Die elastischen Schwingungen einer homogenen Membran sind bestimmt durch die hyperbolische Differentialgleichung mit drei unabhängigen Variablen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

wo  $w$  die Elongation aus der Gleichgewichtslage,  $x, y$  die Raumkoordinaten,  $t$  die Zeit bedeutet. Die Wärmeleitung in einer homogenen ebenen Platte wird durch die parabolische Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

geregelt, wobei  $w$  die Temperatur bedeutet. Das von der Platte eingenommene Gebiet wird mit  $T$ , der Rand mit  $S$  bezeichnet. Wir setzen  $S$  als stetig gekrümmt voraus, um die Theorie der Integralgleichungen bequem anwenden zu können. Als Randbedingungen seien vorgeschrieben

$$(2) \quad w \Big|_S = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_S = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial w}{\partial n} - h w \Big|_S = 0,$$

1) Vgl. z. B. die Darstellung der Lösung der Randwertaufgaben bei Horn „Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen“.

als Anfangsbedingung

$$(3) \quad w|^{t=0} = f(x, y),$$

wo  $f(x, y)$  eine willkürlich gegebene Funktion ist.

Nach der „Methode der partikularen Lösungen“ setzt man

$$w(x, y, t) = u(x, y) \cdot T(t)$$

und findet

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \text{const.} = -\lambda.$$

$$(4) \quad T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$

$$T(t) = e^{-\lambda t}.$$

$$(5) \quad \Delta u + \lambda u = 0.$$

Dabei soll  $u$  derselben Randbedingung wie  $w$  genügen. Sei etwa  $u|_S = 0$ .

Es gibt (s. u.) unendlich viele Werte des Parameters  $\lambda$ , für welche die Gleichung (5) auf  $S$  verschwindende Lösungen besitzt. Sind diese Werte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , die zugehörigen Lösungen  $u_1, u_2, \dots$ , so setzt man

$$(6) \quad w(x, y, t) = c_1 u_1(x, y) e^{-\lambda_1 t} + c_2 u_2(x, y) e^{-\lambda_2 t} + \dots$$

Die Reihe (6), in welcher  $c_1, c_2, \dots$  zu bestimmende Konstanten sind, stellt, wenn sie konvergiert und zweimal nach  $x, y$ , sowie einmal nach  $t$  differenziert werden darf, eine der Randbedingung  $w|_S = 0$  genügende Lösung von (1) dar. Die Anfangsbedingung (3) liefert

$$(7) \quad w(x, y, 0) = c_1 u_1(x, y) + c_2 u_2(x, y) + \dots = f(x, y),$$

woraus  $c_1, c_2, \dots$  bestimmt werden müssen.

Vor allem hat man hier zu prüfen, welche Bedingungen die Funktion  $f$  erfüllen muß, damit sie in die unendliche, nach den Funktionen  $u_1, u_2, \dots$  fortschreitende Reihe (7) entwickelt werden darf. Es ergeben sich also die beiden Hauptfragen der Existenz der  $\lambda_n$  und  $u_n(x, y)$ , sowie der Entwicklung einer willkürlichen Funktion, dazu noch die Frage der Konvergenz und der gliedweisen Differenzierbarkeit der Reihe (6).

Eine allgemeinere lineare selbstadjungierte elliptische Differentialgleichung mit Parameter ist

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda k u \equiv D(u) + \lambda k u = 0.$$

Dabei sei  $p$  in  $T + S$  nebst Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig und ständig positiv (nicht Null),  $k$  in  $T + S$  stetig. Die Gleichung (8) enthält (5) als speziellen Fall für  $p \equiv 1$ ,  $k \equiv 1$ . Randbedingung ist etwa

$$(9) \quad u|_S = 0.$$

Wir wollen die eben aufgeworfenen Fragen für die Gleichung (8) erledigen.

Die zu der Gleichung

$$(10) \quad D(G) = 0$$

und der Randbedingung (9) gehörige Greensche Funktion  $G(P, Q)$  existiert sicher, weil die erste Randwertaufgabe wegen Erfüllung der Bedingung (11a) des § 4 eindeutig lösbar ist.

Dann kann eine der Differentialgleichung (8) und der Randbedingung (9) genügende, mit gewissen Stetigkeitseigenschaften ausgestattete Funktion mittels der Greenschen Formeln in der Form

$$(11) \quad u(P) = \frac{\lambda}{2\pi} \iint_T G(P, Q) k(Q) u(Q) d\xi d\eta$$

dargestellt werden. Umgekehrt genügt eine Lösung der Integralgleichung (11) der Differentialgleichung (8) und der Randbedingung (9). Die  $\lambda$  sind also die Eigenwerte, die  $u$  die Eigenfunktionen einer Integralgleichung mit dem symmetrischen Kerne  $G(P, Q)$ . Die Hilbert-Schmidtsche Theorie der Integralgleichungen lehrt die Existenz unendlich vieler Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  und zugehöriger Eigenfunktionen  $u_1, u_2, \dots$ .

Ist in  $T + S$  überall  $k > 0$ , so sind alle Eigenwerte positiv. (Ist  $k < 0$ , so sind alle Eigenwerte negativ.) Man kann (11) in eine orthogonale Integralgleichung überführen. Ist  $k$  in  $T + S$  nicht von konstantem Vorzeichen, so existieren unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte. Die Gleichung (11) kann dann in eine polare Integralgleichung transformiert werden.

1)  $k > 0$ . Sei  $f(x, y)$  eine in  $T + S$  stetige, mit stetigen Ableitungen erster Ordnung und stückweise stetigen Ableitungen zweiter Ordnung versehene Funktion, welche die gegebene Randbedingung erfüllt

$$f|_S = 0.$$



Dann kann  $f$  in der Form

$$(12) \quad f(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_T G(P, Q) k(Q) l(Q) d\xi d\eta$$

dargestellt werden, wo

$$(13) \quad D(f) = -l,$$

also stückweise stetig ist. Eine solche Funktion  $f$  nennt A. Kneser<sup>1)</sup> „quellenmäßig“ dargestellt. Nach dem Entwicklungssatz der Theorie der Integralgleichungen darf aber eine quellenmäßig darstellbare Funktion in eine Reihe der Art (7) nach den Eigenfunktionen in  $T + S$  entwickelt werden, und diese Entwicklung ist gleichmäßig und absolut konvergent.

Daraus folgt auch die Konvergenz der Reihe (6), da ja  $e^{-\lambda_n t} \leq 1$  ist.

Macht man noch weitere Voraussetzungen über  $f$ , nämlich daß auch  $D(f)$  stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und der gegebenen Randbedingung

$$D(f)|^S = 0$$

genügt, so läßt sich die gliedweise Differentiierbarkeit von (6) beweisen (vgl. Westfall, *Diss. Gött.* § 12, 1905).

Die Koeffizienten  $c_1, c_2, \dots$  werden auf „Fouriersche Art“ bestimmt

$$(14) \quad c_n = \iint_T f(Q) u_n(Q) k(Q) d\xi d\eta.$$

Denn die Eigenfunktionen  $u_1, u_2, \dots$  sind orthogonal

$$(15) \quad \iint_T u_n(Q) u_m(Q) k(Q) d\xi d\eta = 0 \quad [n \leq m]$$

und können außerdem als „normiert“

$$(16) \quad \iint_T u_n^2(Q) k(Q) d\xi d\eta = 1$$

angesehen werden.

2)  $k$  hat in  $T + S$  kein konstantes Vorzeichen. S. Hilbert, *Gött. Nachr.* 1906; Lichtenstein, *Math. Zs.* **3** (1919). Von

1) *Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik*, Braunschweig 2. Aufl. 1925.

Lichtenstein wird die Methode der unendlich vielen Variablen benutzt, wodurch die Integralgleichungen entbehrlich werden. Unter der Voraussetzung, daß die Funktion  $l = -D(f)$  in  $I + S$  stetig ist und stückweise stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt, läßt sich wieder  $f$  in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe entwickeln, und zwar erhält man

$$(17) \quad f(P) = \sum_n \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} u_n(P) \iint_T f(Q) u_n(Q) k(Q) d\xi d\eta.$$

Anstelle von (16) tritt jetzt

$$(18) \quad \iint_T u_n^2(Q) k(Q) d\xi d\eta = \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}.$$

Die Differentialgleichung

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (q + \lambda k) u = 0,$$

wo  $q$  eine in  $I + S$  stetige Funktion ist, kann unter der Voraussetzung  $q < 0$  ebenso wie (8) behandelt werden. Es existiert nämlich die der Differentialgleichung

$$(20) \quad L(G) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial G}{\partial y} \right) + qG = 0$$

genügende, auf  $S$  verschwindende Greensche Funktion, da die erste Randwertaufgabe wegen  $q < 0$  (vgl. die Bedingung (11) des § 4) eindeutig lösbar ist. In dem Falle, daß die Bedingung  $k > 0$  erfüllt ist, kann man, wenn  $q$  nicht überall  $< 0$  sein sollte,

$$q + \lambda k = q - ck + (\lambda + c)k$$

setzen und die positive Konstante  $c$  so groß wählen, daß überall  $q - ck < 0$  ist.

Sind andere Randbedingungen, z. B.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial n} - hu = 0$$

auf  $S$  vorgeschrieben, so muß zuerst geprüft werden, ob die betreffende unhomogene Randwertaufgabe für die Differentialgleichung (10) bzw. (20) eindeutig lösbar ist. In diesem Falle existiert die Greensche Funktion, und das weitere Verfahren ist dem obigen analog. Im anderen Falle aber muß eine Green-

sche Funktion im „erweiterten Sinne“ benutzt werden, wodurch sich das Verfahren etwas komplizierter gestaltet.

Die obigen Ergebnisse können sinngemäß auf räumliche Gebiete und die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda u = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( p \frac{\partial u}{\partial z} \right) + (q + \lambda k) u = 0$$

übertragen werden, da die grundlegenden Hilfsmittel, nämlich Greensche Formeln und Integralgleichungen, anwendbar bleiben.

Im Falle  $k > 0$  (orthogonale Integralgleichung) können (s. o.) den Randbedingungen der Eigenfunktionen genügende Funktionen mit stetigen ersten und stückweise stetigen zweiten Ableitungen nach den Eigenfunktionen gemäß (7) entwickelt werden.

Die folgenden weitergehenden Entwicklungssätze für das zweidimensionale Problem sind von A. Kneser abgeleitet worden (*Palermo Rend.* 27, 1909), wobei die Differentialgleichung  $\Delta u + \lambda u = 0$  zugrunde gelegt und das Gebiet  $T$  speziell als kreisförmig (Kreis um den Anfangspunkt) angenommen wird. Randbedingung sei irgendeine der drei obigen. Von der Funktion  $f$  wird nur vorausgesetzt, daß sie selbst, sowie ihre Ableitungen erster und zweiter Ordnung stückweise stetig sind. Sie braucht auch die Randbedingungen der Eigenfunktionen nicht zu erfüllen. Die auf Fouriersche Art gebildete Reihe der Eigenfunktionen  $\sum_n c_n u_n(x, y)$  stellt dann in  $T$ , jedoch mit Aus-

schluß derjenigen Linien (sie werden als stetig gekrümmt angenommen), auf denen  $f$  unstetig wird, die Funktion  $f$  dar. In einem Punkte einer Unstetigkeitslinie von  $f$  stellt die Entwicklung im allgemeinen das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte dar, die  $f$  annimmt, wenn man von der einen bzw. von der andern Seite her an den betreffenden Punkt heranrückt. Nur in einem Punkte, wo der Radiusvektor  $r$  (d. h. die Entfernung vom Kreismittelpunkt) ein Extremum hat, stellt die Entwicklung einen der beiden Grenzwerte selbst dar. Im Falle der Randbedingungen  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  und  $\frac{\partial u}{\partial n} - hu = 0$  gilt die Entwicklung auch noch auf  $S$ . Im Falle der Randbedingung  $u = 0$

jedoch kann für eine auf  $S$  nicht verschwindende Funktion  $f$  die Entwicklung auf  $S$  selbstverständlich nicht mehr richtig sein. Die Resultate von Kneser sind Verallgemeinerungen bekannter Sätze aus der Theorie der Fourierschen Reihen.

Die Schwingungen einer homogenen elastischen Platte genügen der Differentialgleichung vierter Ordnung (Kirchhoff „*Ges. Abhandlungen*“ S. 259 ff.).

$$(21) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \Delta \Delta w = 0,$$

wobei  $a$  eine Konstante ist. Setzt man

$$(22) \quad w = u(x, y) \begin{cases} \sin a\lambda^2 t \\ \cos a\lambda^2 t, \end{cases}$$

so erhält man für  $u$

$$(23) \quad \Delta \Delta u - \lambda^4 u = 0.$$

Die Platte wird als kreisförmig angenommen (Kreis um den Nullpunkt). Randbedingungen seien etwa (hier müssen, da die Differentialgleichung von vierter Ordnung ist, gleichzeitig zwei Bedingungen erfüllt sein)

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Es existiert eine Greensche Funktion  $K(P, Q)$ . Die Eigenwerte bzw. die Eigenfunktionen von  $K$  sind die  $\lambda_n^4$  bzw. die  $u_n(P)$ . Aus dem allgemeinen Entwicklungssatz der Theorie der Integralgleichungen ergibt sich zunächst die Möglichkeit der Fourierschen Entwicklung einer willkürlichen Funktion  $f$ , die stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung besitzt und die gegebenen Randbedingungen erfüllt. Nach W. Sternberg (*Diss.* Breslau 1912) darf man auch Funktionen entwickeln, welche nebst ihren Ableitungen bis zur vierten Ordnung bloß stückweise stetig sind und die Randbedingungen nicht zu erfüllen brauchen. Ist  $L$  eine geschlossene Kurve (es wird nach Einführung von Polarkoordinaten  $r, \varphi$  vorausgesetzt, daß  $L$  von den Linien  $r = \text{const.}$  und  $\varphi = \text{const.}$  nur in einer endlichen Anzahl von Punkten geschnitten wird, und daß, falls  $\varphi = \varphi(r)$  die Gleichung von  $L$  ist, die Funktion  $\varphi(r)$  nebst ihren Ableitungen bis zur vierten Ordnung im allgemeinen stetig ist; nur in den Punkten, wo  $r$

ein Extremum erreicht, darf  $\frac{d\varphi}{dr}$  unendlich groß werden), auf der die Funktion  $f$  selbst unstetig wird, während  $f$  im übrigen stetig bleibt, und ist

$$f = \begin{cases} H & \text{innerhalb } L \\ G & \text{außerhalb } L, \end{cases}$$

so stellt die Reihe der Eigenfunktionen die Funktion  $f$  im ganzen Kreisgebiet mit Ausschluß von  $L$  dar; auf  $L$  wird im allgemeinen  $\frac{G+H}{2}$ , in den Punkten von  $L$ , wo  $r$  ein Extremum hat, wird entweder  $G$  oder  $H$  dargestellt. Besteht die Unstetigkeitslinie  $L$  aus zwei Stücken, von denen das eine,  $L_1$ , eine Kurve mit denselben Stetigkeitseigenschaften wie oben  $L$ , das andere,  $L_2$ , ein Kreisbogen um den Nullpunkt ist, und treten in den beiden Punkten  $C$  und  $D$ , wo  $L_1$  und  $L_2$  zusammenstoßen, Ecken auf, so gilt im allgemeinen der obige Entwicklungssatz. Jedoch wird in den Ausnahmepunkten  $C, D$  durch die Reihe der Eigenfunktionen der Wert  $\frac{H+3G}{4}$  dargestellt.

A. Hammerstein hat (*Sitzber. d. Berlin. Akad.* 1925) neue Entwicklungssätze für allgemeine Gebiete bewiesen. Der Rand  $S$  des Gebietes  $T$  bestehe aus einer stetigen und abteilungsweise stetig differentiierbaren Kurve. Der symmetrische Kern

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} + w(P, Q),$$

wo  $w$  nebst Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in  $T+S$  stetig ist, genüge der Differentialgleichung  $\Delta G = 0$ . Die Eigenwerte  $\lambda_n$  von  $G$  seien alle positiv. Die normierten Eigenfunktionen heißen  $\varphi_n(x, y)$ . Sei  $\varrho$  eine beliebige kleine positive Zahl. Nimmt man von  $T$  einen zu  $S$  parallelen Streifen der Breite  $\varrho$  weg, so entstehe  $T_1$ . Um einen beliebigen Punkt  $Q(\xi, \eta)$  von  $T_1$  schlägt man den Kreis  $K$  mit Radius  $\varrho$ . Dann ist für alle Punkte  $P$  in  $T$  außerhalb  $K$  und alle Punkte  $Q$  in  $T_1$

$$G(P, Q) = \sum_n a_n \frac{\varphi_n(P) \varphi_n(Q)}{\lambda_n},$$

wo

$$a_n = \frac{2}{\varrho \sqrt{\lambda_n}} J_1(\varrho \sqrt{\lambda_n})$$

[ $J_1$  = Besselsche Funktion 1. Ordnung],

und die Reihe konvergiert in oben genanntem Gebiete absolut und gleichmäßig. Es ist  $a_n$  bei festem  $\varrho$  von der Größenord-

nung  $\frac{1}{\lambda_n^{\frac{3}{4}}}$ , woraus die konvergenzverbessernde Wirkung hervorgeht. Bei festem  $n$  ist  $\lim_{q \rightarrow 0} a_n = 1$ .

### § 7. Asymptotisches Verhalten der Eigenwerte. Asymptotische Darstellung der Lösungen von Differentialgleichungen.

*Asymptotische Verteilung der Eigenwerte der Differentialgleichung*

$$(1) \quad \Delta u + \lambda u = 0$$

bei den Randbedingungen  $u = 0$  oder  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ .

Ist  $J$  der Flächeninhalt des Gebietes  $T$ , so gilt, mag es sich um die erste oder die zweite Randbedingung handeln, die Limesgleichung

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi n}{\lambda_n} = J.$$

Das Verhältnis  $\frac{\lambda_n}{n}$  ist also asymptotisch nur von dem Flächeninhalt des Gebietes, nicht von seiner Form abhängig. Der entsprechende Satz gilt für räumliche Gebiete. Dieser für die Hohlraumstrahlung wichtige Satz war von H. A. Lorentz vorausgesagt worden, wurde aber zuerst von H. Weyl bewiesen (*Math. Ann.* **71** (1911), *J. f. Math.* **141** (1912) u. **143** (1913)).

Für die Eigenwerte der allgemeinen Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (q + \lambda k) u = 0,$$

wo außer  $p > 0$  wieder  $q < 0$  und  $k > 0$  vorausgesetzt wird, erhält man als Verallgemeinerung von (2)

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi n}{\lambda_n} = \int_T \int \frac{k}{p} d\omega.$$

In methodischer Hinsicht sei bemerkt, daß Weyl in seinen Arbeiten Integralgleichungen benutzt.

R. Courant (*Math. Zs.* **15** (1922)) hat die obigen Limesgleichungen auf sehr elegante Art ohne Integralgleichungen bewiesen, indem er von Variationsproblemen ausging. Seine Fehler-



abschätzung ist schärfer als die von Weyl. Ist  $A(\lambda)$  die Anzahl der unterhalb  $\lambda$  gelegenen Eigenwerte, so wird

$$(5) \quad A(\lambda) = \frac{J}{4\pi} \cdot \lambda + O(\sqrt{\lambda} \log \lambda)$$

(wo 0 das bekannte durch E. Landau eingebürgerte Symbol ist). Aus (5) folgt leicht (2).

Das Verfahren von Courant kann auch auf die Eigenwerte von Differentialgleichungen höherer Ordnung z. B.

$$\Delta \Delta u + \lambda u = 0$$

angewandt werden.

Über das asymptotische Verhalten der Eigenfunktionen der obigen Randwertaufgaben weiß man im Gegensatz zu dem Falle gewöhnlicher Differentialgleichungen nur sehr wenig. (Einige Sätze s. bei Courant *Gött. Nachr.* 1923.)

Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen von partiellen Differentialgleichungen vgl. Sternberg (*Math. Ann.* 86 (1922)). Die Lösungen von

$$(6) \quad \Delta u + (A(x, y, \varrho) + \varrho^2) u = 0,$$

wo  $\varrho$  ein positiver Parameter,  $A(x, y, \varrho)$  eine in  $T + S$  nebst Ableitungen  $\frac{\partial A}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial A}{\partial y}$  stetige, bei wachsendem  $\varrho$  beschränkte Funktion ist, werden mit denen von

$$(7) \quad \Delta w + \varrho^2 w = 0$$

verglichen. Ist  $u$  irgendeine Lösung von (6), welche in  $T + S$  stetige Ableitungen erster und in  $T$  stetige Ableitungen zweiter Ordnung hat, so genügt  $u$  einer Integralgleichung

$$(8) \quad u = w + \frac{1}{2\pi} \int_T \int G(P, Q, \varrho) A(Q, \varrho) u(Q, \varrho) d\omega,$$

wobei  $w$  eine mit denselben Stetigkeitseigenschaften versehene Lösung von (7) und  $G$  eine „Grundlösung“ von (7) z. B.

$$(9) \quad G = -K_0(\varrho \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2})$$

[ $K_0$  = Besselsche Funktion 0<sup>ter</sup> Ordnung, 2. Art]

ist. Umgekehrt ist jede Lösung von (8) Lösung von (6). Für große  $\varrho$  hat (8) eine und nur eine Lösung, da die zugehörige

homogene Integralgleichung keine Lösung besitzt. Ist  $w$  bei wachsendem  $\varrho$  in  $T + S$  gleichmäßig beschränkt, so gilt gleichmäßig in  $T + S$

$$(10) \quad u = w + O\left(\frac{1}{\varrho^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Im übrigen gibt es beliebig viele Funktionen  $u$ , die sich derselben Funktion  $w$  asymptotisch nähern. Denn es gibt ja beliebig viele  $u$ , die mit wachsendem  $\varrho$  in  $T + S$  gleichmäßig gegen 0 konvergieren.

Über das asymptotische Verhalten der Eigenfunktionen von Integralgleichungen gilt folgender Satz (A. Hammerstein *Math. Ann.* 95 (1925)):

Sei

$$K(P, Q) = -\frac{\log r}{2\pi} + H(P, Q),$$

wo  $H$  in  $P, Q$  symmetrisch ist und im Bereiche  $T + S$  stetige partielle Ableitungen bis zur vierten Ordnung besitzt. Dann gibt es zu jeder zu einem positiven Eigenwerte  $\lambda_n$  gehörigen normierte Eigenfunktion  $\varphi_n$  der Integralgleichung

$$\varphi_n(P) - \lambda_n \iint_T K(P, Q) \varphi_n(Q) d\omega = 0$$

eine Lösung  $w_n$  der Differentialgleichung,

$$\Delta w_n + \lambda_n w_n = 0,$$

so daß die Differenz  $\varphi_n - w_n$  in  $T + S$  gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

## § 8. Nichtlineare elliptische Differentialgleichungen.

Es liege vor die elliptische Differentialgleichung

$$(1) \quad \Delta u = F(x, y, u, p, q) \quad \left[ p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

Die Funktion  $F$  sei in einem Bereiche  $T + S$  der Variablen  $x, y$ , sowie für

$$|u| \leq L, \quad |p| \leq L, \quad |q| \leq L,$$

wo  $L$  eine positive Konstante ist, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. Anstatt der Existenz und Stetig-

keit der Ableitungen nach  $u, p, q$  genügt es, eine Lipschitzbedingung

$$|F(x, y, u_2, p_2, q_2) - F(x, y, u_1, p_1, q_1)| \\ < k\{|u_2 - u_1| + |p_2 - p_1| + |q_2 - q_1|\}$$

vorauszusetzen, wo wiederum  $k$  eine positive Konstante bedeutet. Schließlich sei ständig  $\frac{\partial F}{\partial u} > 0$ , bzw.  $F$  mit  $u$  monoton zunehmend. Dann kann die erste Randwertaufgabe höchstens eine Lösung besitzen (E. Le Roy *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **14** (1897), 399). Die Existenz der Lösung hat für ein Gebiet, dessen Flächeninhalt „hinreichend klein“ ist, E. Picard mit der Methode der sukzessiven Approximationen bewiesen (*J. de Math.* (4) **6** (1890), 145). Diese Methode ist zuerst von H. A. Schwarz (*Ges. Abh.* **1**, 241) für Existenzbeweise in der Theorie der Differentialgleichungen nutzbar gemacht, dann sehr häufig auch von anderen, insbesondere von E. Picard für diesen Zweck herangezogen worden. Das Gebiet  $T$  soll so beschaffen sein, daß die erste Randwertaufgabe für  $\Delta u = 0$  und  $\Delta u = g(x, y)$  lösbar ist. Die Näherungsfunktionen werden nun sukzessive definiert als Lösungen der Randwertaufgaben

$$\Delta u_1 = 0$$

$$\Delta u_2 = F\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$$

$$\vdots$$

$$\Delta u_n = F\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)$$

$$\vdots$$

$$u_i^S = f \ [i = 1, 2, \dots].$$

Die Randwertaufgabe für die nichtlineare Differentialgleichung (1) ist also auf Randwertaufgaben für lineare Differentialgleichungen zurückgeführt. Hierauf wird die Konvergenz von

$$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots$$

bewiesen, wobei die Voraussetzung der „hinreichenden Kleinheit“ von  $T$  wesentlich ist, und schließlich gezeigt, daß die Grenzfunktion

$$u = \lim u_n$$

wirklich die Lösung der Randwertaufgabe darstellt.

Um die Existenz der Lösung für Gebiete beliebiger Größe zu beweisen, benutzt Picard das alternierende Verfahren, und zwar für die speziellere, die Ableitungen erster Ordnung nicht enthaltende Differentialgleichung

$$(2) \quad \Delta u = F(x, y, u),$$

wobei noch die Voraussetzungen gemacht werden, daß  $F$  ständig positiv und bei wachsendem  $u$  monoton zunehmend, bzw.  $\frac{\partial F}{\partial u} > 0$  ist (Picard *J. de Math.* (4) **6** (1890), 173). Eine andere Methode für Gebiete beliebiger Größe bei Picard *J. de Math.* (5) **2** 1896 (vgl. a. *Enzyklop.* IIa 7c Nr. 6 Sommerfeld). L. Bieberbach löst die erste Randwertaufgabe der Gleichung (2) für beliebig große Gebiete direkt durch sukzessive Approximationen, ohne andere Verfahren zu Hilfe nehmen zu müssen (*Math. Ann.* **77** (1916), 173 ff., wobei besonders ausführlich die Gleichung  $\Delta u = e^u$  behandelt wird.) L. Lichtenstein (*J. f. Math.* **145** (1915), 24 ff.) untersucht die Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{1}{2} \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u}$$

mit anderen Methoden, wobei vorausgesetzt wird, daß  $F$  für alle  $x, y$  in  $T + S$  und alle reellen  $u$  stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und ferner die Ungleichung  $F > 0$  gilt, sowie  $\frac{\partial F}{\partial u}$  und  $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$  beschränkt bleiben. Von Lichtenstein wird nicht nur die erste, sondern auch die dritte Randwertaufgabe gelöst.

Von besonderem Interesse wegen funktionentheoretischer Anwendungen ist die spezielle Differentialgleichung

$$(3) \quad \Delta u = k e^u,$$

wo  $k$  eine Funktion von  $x$  und  $y$  oder spezieller eine Konstante ist und  $k > 0$  vorausgesetzt wird. Es handelt sich hier nicht um die Lösung der bisher untersuchten Randwertaufgaben; diese können ja, da (3) ein spezieller Fall von (2) ist, als gelöst angesehen werden. Es handelt sich vielmehr um eine Lösung, die auf einer gegebenen geschlossenen Riemannschen Fläche im allgemeinen regulär ist, jedoch in einer endlichen Anzahl von Punkten bestimmte logarithmische Unstetigkeiten hat. Solche Lösungen werden bei dem Problem der Uniformisierung der zu der betreffenden Riemannschen Fläche gehörigen algebraischen Funk-

tionen durch automorphe Funktionen gebraucht. Sie wurden zuerst durch Picard bestimmt (*J. d. Math.* (4) **6**, **9**, (5) **4**, sowie *J. f. Math.* **130** (1905)). S. ferner Poincaré (*J. d. Math.* (5) **4**), Lichtenstein (*Acta Math.* **40** (1915); *Gött. Nachr.* (1917)), L. Bieberbach (*Math. Ann.* **77** (1916)).

S. Bernstein behandelt die erste Randwertaufgabe für die Differentialgleichung

$$(4) \quad A(x, y, p, q) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y, p, q) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y, p, q) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda D(x, y, u, p, q) = 0,$$

wo  $A, B, C, D$  analytisch-reguläre Funktionen ihrer Argumente mit der Bedingung  $AC - B^2 > 0$  sind (durch diese Ungleichung ist der elliptische Charakter der Differentialgleichung gekennzeichnet) und  $\lambda$  ein reeller Parameter ist (*Math. Ann.* **62** (1906); **69** (1910); *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **27** (1910) **29** (1912)).

S. Bernstein (l. c.) hat auch das folgende für die Variationsrechnung wichtige Problem behandelt: Es liege vor die Differentialgleichung

$$(5) \quad F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$$

$$\left[ r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right],$$

wo  $F$  in einem gewissen Gebiete  $R$  eine analytisch-reguläre Funktion ihrer acht Argumente ist. Sei  $T$  ein beschränktes von einer analytisch-regulären Kurve  $S$  begrenztes Gebiet der  $(x, y)$ -Ebene, welches in  $R$  enthalten ist. Sei  $u(x, y)$  eine in  $T + S$  analytisch-reguläre Lösung von (5) derart, daß für alle  $(x, y)$  aus  $T + S$  die Wertverbindung  $x, y, u, \dots t$  in  $R$  liegt und die Bedingung

$$(6) \quad 4 \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} - \left( \frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 > 0$$

erfüllt ist. Die Randwerte  $u|_S = f(s)$  bilden eine analytisch-reguläre Funktion von  $s$ . Ist nun  $g(s)$  irgendeine andere willkürliche analytische Funktion von  $s$ ,  $\varepsilon$  ein reeller Parameter, so wird nach der Existenz von in  $T + S$  stetigen in  $T$  regulären Lösungen  $\bar{u}$  von (5) gefragt, die auf  $S$  die Werte  $f + \varepsilon g$  annehmen, falls  $|\varepsilon|$  genügend klein ist. Solche Lösungen  $\bar{u}$  sind jedenfalls vorhanden, wenn die „Jacobische Differentialgleichung“

$$(7) \quad \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} v = 0$$

(die Argumente von  $F$  sind  $x, y, u, \dots t$ , und für  $u$  ist die obige Lösung von (5) zu nehmen), welche wegen (6) sicher in  $T + S$  elliptisch ist, keine in  $T$  reguläre, in  $T + S$  stetige, auf  $S$  verschwindende Lösung  $v$  hat (natürlich abgesehen von  $v \equiv 0$ ). Dies hat Bernstein (l. c.) unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen, völlig allgemein Lichtenstein (*Monatsh. f. Math. u. Phys.* **28** (1917); *Math. Zs.* **5** (1919)) bewiesen.

## § 9. Die Natur der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen.

In § 2 wurde bereits hervorgehoben, daß jedes reguläre d. h. nebst Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige Potentia eine analytisch-reguläre Funktion seiner Argumente ist. Daher sind auch die Lösungen der Randwertaufgaben in  $T$  (aber im allgemeinen nicht auf  $S$ ) analytische Funktionen, selbst wenn die Randwerte bloß als stückweise stetig vorausgesetzt werden.

Picard (*J. Éc. polyt.* **60** (1890) 89ff.; *Acta Math.* **25** (1902), 121ff.) hat dieselbe Eigenschaft für Lösungen der allgemeineren Gleichung

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

$$[AC - B^2 > 0]$$

worin  $A, \dots F$  als analytische Funktionen von  $x$  und  $y$  vorausgesetzt werden müssen, bewiesen, und zwar mit der Methode der sukzessiven Approximationen. Der entsprechende Satz gilt für die Lösungen rein elliptischer linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung mit analytischen Koeffizienten (Picard, *Paris, C. R.* **121**<sup>2</sup> (1895), 12ff.). E. E. Levy hat ihn später mittels Integralgleichungen bewiesen (*Palermo Rend.* **24** (1907), 297ff.).

S. Bernstein (*Math. Ann.* **59** (1904), **60** (1905)) zeigte, daß jede nebst den partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

wo  $F$  eine analytische Funktion ihrer sämtlichen Argumente darstellt, in  $x$  und  $y$  analytisch ist. Holmgren hatte denselben Satz für Lösungen mit stetigen Ableitungen bis zur dritten Ordnung bewiesen (*Math. Ann.* **57** (1903)).



S. Bernstein (*Math. Ann.* **59**, **60**) bewies für die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0,$$

wo  $F$  in einem Gebiete  $R$  eine analytische Funktion ihrer sämtlichen Argumente ist, den Satz: Jede nebst Ableitungen bis zur dritten Ordnung stetige, dem Gebiete  $R$  angehörende Lösung, für die

$$4 \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} - \left( \frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 > 0$$

wird, ist eine analytische Funktion von  $x$  und  $y$ . Auch in den Arbeiten von Bernstein und Holmgren ist die Methode der sukzessiven Approximationen benutzt, die ja bei nichtlinearen Gleichungen häufig angewandt wird.

Weiter reichende Sätze und zwar ohne sukzessive Approximationen hat M. Gevrey auf elegante und elementare Art gewonnen (*Ann. Éc. Norm.* (3) **35** (1918), 129 ff.; *C. R.* **157** (1913), **158** (1914)). Seine Resultate beziehen sich auf elliptische, hyperbolische und parabolische Gleichungen und können auch auf Differentialgleichungen höherer Ordnung und solche mit drei und mehr unabhängigen Variablen ausgedehnt werden.

L. Lichtenstein (*Enzyklopädieartikel über partielle Differentialgleichungen* S. 1323) untersuchte die Gleichung

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

wo  $A, \dots, F$  analytische Funktionen der fünf Argumente  $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  sind, und zeigte, daß jede nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige Lösung, für die  $AC - B^2 > 0$  wird, auch stetige Ableitungen dritter Ordnung hat, also nach dem Satze von Bernstein über die allgemeine Gleichung  $F(x, \dots, t) = 0$  analytisch ist.

# § 10. Hyperbolische Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln.

Die lineare Differentialgleichung

$$(1) \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

ist hyperbolisch in einem Gebiete der  $(x, y)$ -Ebene, wo

$$(2) \quad AC - B^2 < 0$$

ist, was wir jetzt voraussetzen. Die durch

$$(3) \quad Cdx^2 - 2Bdxdy + Ady^2 = 0$$

definierten Charakteristiken bilden jetzt zwei reelle Scharen

$$(4) \quad \varphi(x, y) = \text{konst.} \quad \psi(x, y) = \text{konst.}$$

Mittels der Transformation

$$(5) \quad \xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

wird (1) auf die „Normalform“ gebracht, welche, wenn wieder  $x, y$  statt  $\xi, \eta$  geschrieben wird, lautet

$$(6) \quad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = g.$$

War (1) homogen, also  $G = 0$ , so wird auch  $g = 0$ .

Die nur in Bezug auf die Ableitungen 2. Ordnung lineare hyperbolische Gleichung

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = H\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

wird durch (5) auf die Normalform

$$(7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

reduziert.

Die Charakteristiken von (6) oder (7) sind die Parallelen zu den Koordinatenachsen

$$x = \text{konst.}, \quad y = \text{konst.}$$

Der zu  $L(u)$  adjungierte Differentialausdruck ist

$$(8) \quad M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (av) - \frac{\partial}{\partial y} (bv) + cv.$$

Im folgenden wird angenommen, daß  $a$  und  $b$  nebst Ableitungen erster Ordnung, sowie  $c$  und  $g$  in den in Betracht kommenden Gebieten stetig sind, bzw. daß  $F$  stetige Ableitungen nach  $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  besitzt, oder wenigstens als Funktion von  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  einer Lipschitzbedingung genügt.

In der Theorie der hyperbolischen Gleichungen werden in erster Linie die beiden folgenden Aufgaben gestellt:

I. Gegeben sind auf einem mit stetiger Tangente versehenen Kurvenbogen  $\alpha\beta$ , der von jeder Charakteristik in höchstens einem Punkte geschnitten wird, zwei willkürliche stetige Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ . Gesucht ist eine Lösung von (6) bzw. (7), welche in dem Rechteck, das von den durch  $\alpha$  und  $\beta$  gezogenen Charakteristiken gebildet wird, nebst den Ableitungen erster Ordnung stetig ist und auf  $\alpha\beta$  nebst Normalableitung die vorgeschriebenen Werte  $u = f_1, \frac{\partial u}{\partial n} = f_2$  annimmt. (Problem von Cauchy).

Aus der Differentialgleichung selbst ergibt sich dann übrigens auch die Stetigkeit von  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ . Offenbar ist auf  $\alpha\beta$  sowohl  $y$  eine eindeutige Funktion von  $x$  wie  $x$  eine eindeutige Funktion von  $y$ . Ferner ist klar, daß mit  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial n}$  auch  $\frac{\partial u}{\partial x}$  und  $\frac{\partial u}{\partial y}$  als bekannt angesehen werden können.

II. Gegeben sind auf zwei Charakteristiken  $\alpha\beta$  bzw.  $\alpha\gamma$  zwei willkürliche stetige Funktionen  $f_1$  bzw.  $f_2$ , die im Punkte  $\alpha$  dieselben Werte annehmen. Gesucht ist eine im Charakteristiken-Rechteck nebst Ableitungen erster Ordnung stetige Lösung, die auf den beiden Charakteristiken die vorgeschriebenen Werte  $u = f_1$  bzw.  $u = f_2$  annimmt. (Picard-Goursatsches Problem.)

Um die obigen Aufgaben zunächst für die lineare Gleichung (6) zu behandeln, verfährt man nach Riemann folgendermaßen. Sei im Falle des Cauchyschen Problems  $C(\xi, \eta)$  irgendein Punkt im Innern oder auf dem Rande des obengenannten Charakteristiken-Rechtecks. Man zieht durch  $C$  die Charakteristiken, welche die Kurve  $\alpha\beta$  in den Punkten  $A$  und  $B$  schneiden, und wendet die Greensche Formel (5) des § 4 auf die Fläche  $ACB$  an. Dann wird

$$(9) \iint (v L(u) - u M(v)) dx dy = - \int_{AB} (Q dy - P dx) + \int_{CB} Q dy - \int_{AC} P dx.$$

Dabei ist (vgl. Gl. (6) des § 4)

$$P = \frac{1}{2} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + b u v$$

$$Q = \frac{1}{2} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + a u v.$$

Sei nun  $v$  eine mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehene Lösung der adjungierten Gleichung  $M(v) = 0$ . Dann ergibt sich, wenn man noch auf die Integrale  $\int_{CB}$  und  $\int_{AC}$  partielle

Integration anwendet, um  $\frac{\partial u}{\partial y}$  bzw.  $\frac{\partial u}{\partial x}$  herauszuschaffen,

$$(10) \quad u(C)v(C) = \frac{1}{2} (u(A)v(A) + u(B)v(B)) \\ - \int_{AB} (Q dy - P dx) - \iint v L(u) dx dy \\ - \int_{CB} u \left( \frac{\partial v}{\partial y} - a v \right) dy + \int_{AC} u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - b v \right) dx$$

(Mit  $u(C)$  bzw.  $u(A) \dots$  wird der Wert von  $u$  im Punkte  $C$  bzw.  $A \dots$  bezeichnet.)

Nun möge  $v(x, y) = G(x, y; \xi, \eta)$  als Funktion des Punktes  $D(x, y)$ , der in  $ACB$  variiert, eine Lösung von  $M(v) = 0$  sein mit folgenden Bedingungen

$$(11) \quad \frac{\partial G}{\partial y} - a G = 0 \text{ längs } CB, \text{ also für } x = \xi \\ \frac{\partial G}{\partial x} - b G = 0 \text{ längs } AC, \text{ also für } y = \eta.$$

Ferner sei  $G(\xi, \eta; \xi, \eta) \equiv 1$ . Wir wollen  $G$  *Riemannsche Funktion* nennen. (Über die Existenz von  $G$  s. u.)

Aus (11) folgt

$$G = e^{\int_{\xi}^y a dy} \quad \text{für } x = \xi \\ G = e^{\int_{\eta}^x b dx} \quad \text{für } y = \eta.$$

Nun ergibt sich

$$(12) \quad u(C) = \frac{1}{2} (u(A)G(A, C) + u(B)G(B, C)) \\ - \int_{AB} (Qdy - Pdx) - \iint g(D)G(D, C) dx dy.$$

Ist also  $G(D, C)$  bekannt, so ist auch der Wert von  $u$  in dem beliebigen Punkte  $C$  bekannt, da ja längs  $AB$  die Werte von  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  gegeben, also die Differentialausdrücke  $Q$  und  $P$  bekannt sind.

Eine ähnliche Darstellung erhält man im Falle des Picard-Goursatschen Problems nämlich, wenn  $\beta_1$  und  $\gamma_1$  die Schnittpunkte der durch  $C$  gehenden Charakteristiken mit  $\alpha\beta$  und  $\alpha\gamma$  sind

$$(13) \quad u(C) = u(\alpha)G(\alpha, C) + \int_{\alpha}^{\beta_1} G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + bu\right)dx + \int_{\alpha}^{\gamma_1} G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + au\right)dy \\ - \iint g(D)G(D, C) dx dy.$$

Hierbei ist zu beachten, daß mit  $u$  auf  $\alpha\beta$  auch  $\frac{\partial u}{\partial x}$  und mit  $u$  auf  $\alpha\gamma$  auch  $\frac{\partial u}{\partial y}$  bekannt sind.

Die Bestimmung von  $G$  ist ein spezieller Fall des Picard-Goursatschen Problems, speziell insofern, als die Werte der Lösung  $G$  der Gleichung  $M(G) = 0$  für  $x = \xi$  bzw.  $y = \eta$  nicht willkürliche Funktionen, sondern durch die Koeffizienten  $a, b$  der gegebenen Gleichung bestimmte Funktionen sind.

Sei  $H(x, y; \xi, \eta)$  die zur adjungierten Gleichung  $M = 0$  gehörige Riemannsche Funktion, d. h. also diejenige Lösung von  $L(u) = 0$ , welche den Bedingungen

$$\frac{\partial H}{\partial y} + aH = 0 \quad \text{für } x = \xi \\ \frac{\partial H}{\partial x} + bH = 0 \quad \text{für } y = \eta$$

genügt und für die ferner  $H(\xi\eta; \xi, \eta) \equiv 1$  ist.

Dann gilt

$$(14) \quad G(x_1, y_1; x_2, y_2) \equiv H(x_2, y_2; x_1, y_1).$$

Zum Beweise setzt man in der Greenschen Formel  $u = H$ ,  $v = G$  und integriert über das durch  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  bestimmte Charakteristiken-Rechteck.

Nimmt man die Existenz von  $G$  als bewiesen an, so folgt aus (12) bzw. (13) die *Eindeutigkeit der Lösung der Randwertaufgaben* für die lineare Gleichung (6). Wären nämlich zwei Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  vorhanden, so wäre  $u_1 - u_2 = U$  eine Lösung der homogenen Gleichung  $L(U) = 0$ , welche nebst Normalableitung auf  $\alpha\beta$  verschwinden, bzw. welche auf  $\alpha\beta$  und  $\alpha\gamma$  verschwinden müßte. Dann ergäbe sich aber das Verschwinden von  $U$  in dem beliebigen Punkte  $C$ , also die Identität von  $u_1$  und  $u_2$ .

Auch die Lösung der Randwertaufgaben der nichtlinearen Gleichung (7) ist eindeutig, wie durch Zurückführung auf lineare Gleichungen gezeigt werden kann (O. Niccoletti, *Nap. Atti* (2) 8 (1896)).

Wir kommen jetzt zur Frage der *Existenz der Lösungen*.

Hierzu muß man vor allem die Gleichungen  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$  und

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(x, y)$  integrieren. Die einfachste hyperbolische Gleichung ist nämlich

$$(15) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung ist

$$(16) \quad u = X(x) + Y(y),$$

wo  $X$  bzw.  $Y$  willkürliche Funktionen von  $x$  bzw.  $y$  allein sind. Es ist leicht, diese willkürlichen Funktionen sowohl im Falle I wie im Falle II den Randbedingungen anzupassen.

Im Falle II, wo die Randbedingungen

$$u|_{y=\eta} = f_1(x), \quad u|_{x=\xi} = f_2(y) \quad [f_1(\xi) = f_2(\eta)]$$

sind, findet man

$$u(x, y) = f_1(x) + f_2(y) - f_1(\xi).$$

Im Falle I, wo längs  $\alpha\beta$  die Bedingungen  $u = f_1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$  zu erfüllen sind, kann man  $\frac{\partial u}{\partial x}$  und  $\frac{\partial u}{\partial y}$  berechnen und erstere Ableitung als Funktion von  $x$ , letztere als Funktion von  $y$  darstellen. Man findet etwa auf  $\alpha\beta$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_3(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_4(y).$$



Aus  $X'(x) = f_3(x)$ ,  $Y'(y) = f_4(y)$  folgt

$$u(x, y) = \int f_3(x) dx + \int f_4(y) dy.$$

Die hier noch auftretende willkürliche Konstante wird dadurch festgelegt, daß auf  $\alpha\beta$  ja auch  $u$  selbst gegeben ist.

Was nun die inhomogene Gleichung

$$(17) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(x, y)$$

betrifft, so ist ihr allgemeines Integral gleich dem Aggregat aus irgendeinem partikulären Integral  $U$  und dem allgemeinen Integral  $X(x) + Y(y)$  der zugehörigen homogenen Gleichung (15).

Als partikuläres Integral benutzt man im Falle II am besten

$$U(x, y) = \int_{\xi}^x ds \int_{\eta}^y g(s, t) dt.$$

$U$  erfüllt die Bedingungen  $U|_{x=\xi} = 0$ ,  $U|_{y=\eta} = 0$ .

Im Falle I nimmt man

$$U(x, y) = \iint g(s, t) ds dt,$$

wo das Integrationsgebiet von den durch den variablen Punkt  $(x, y)$  gehenden Charakteristiken und dem von ihnen auf  $\alpha\beta$  ausgeschnittenen Kurvenbogen begrenzt wird.

Durch Zurückführung auf (15) sind also die Randwertaufgaben auch für (17) gelöst.

Wir können nun zu der allgemeinen Gleichung (7) übergehen und wenden wieder die Methode der sukzessiven Approximationen an (E. Picard, *J. de math.* (4) **6** (1890), *Bull. Soc. Math.* **22** (1894); Goursat, *Ann. de Toulouse* (2) **6** (1904)). Die Näherungsfunktionen  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  sind gegeben als diejenigen Lösungen der Gleichungen

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} &= F\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \\ &\vdots \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} &= F\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

welche sämtlich die für die gesuchte Lösung  $u$  von (7) vorgeschriebenen Randbedingungen (I oder II) erfüllen müssen. Die erste der Gleichungen (18) hat die Form (15), die andern haben die Form (17), so daß  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  nach dem Vor-  
ausgehenden sukzessive bestimmt werden können. Hierauf wird die Reihe

$$(19) \quad u_1 + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) + \dots$$

gebildet und ihre gleichmäßige Konvergenz bewiesen. Die Grenzfunktion  $\lim u_n = u$  ist die gesuchte Lösung.

Im Falle I beweist Picard die Konvergenz der Reihe nur unter der Voraussetzung, daß das Stück  $AB$  des Bogens  $\alpha\beta$  „hinreichend klein“ ist.

O. Nicoletti (*Napoli Atti* (2) 8 (1896)) hat dann den Konvergenzbeweis, ausgehend von dem ganzen Bogen  $\alpha\beta$  von beliebiger Größe, geführt.

Im Falle II ergibt sich schon bei Picard die Konvergenz für das ganze Charakteristiken-Rechteck, ohne Einschränkungen hinsichtlich der Größe.

Da (6) ein spezieller Fall von (7) ist, so ist (6) ebenfalls erledigt und damit auch die Existenz der Riemannschen Funktion bewiesen.

Hierdurch ist auch der Eindeutigkeitsbeweis zum Abschluß gebracht.

Die lineare Gleichung (6) gestattet auch eine Behandlung mit Integralgleichungen, die zuerst A. Myller durchgeführt hat (*Math. Ann.* 68 (1910) 75 ff.). Dabei handelt es sich um eine erhebliche Verallgemeinerung der Aufgabe II: Gegeben sind zwei Kurven  $(C_1)$  und  $(C_2)$  mit den Gleichungen

$$y = f_1(x) \quad \text{bzw.} \quad y = f_2(x),$$

welche von keiner Charakteristik in mehr als einem Punkte geschnitten werden. Gesucht ist eine Lösung von (6), für welche auf

$$(C_1) \quad \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_1 u + \delta_1 = 0$$

$$(C_2) \quad \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_2 u + \delta_2 = 0$$

ist, wobei  $\alpha_1, \dots, \delta_2$  gegebene Ortsfunktionen sind. Bei der Bestimmung dieser Lösung werden Volterrasche Integralgleichungen verwandt.

Ebenfalls mit Benutzung von Integralgleichungen lassen sich hyperbolische Differentialgleichungen mit Parameter auf das asymptotische Verhalten der Lösung bei wachsendem Parameter hin untersuchen (W. Sternberg, *Math. Ann.* **86** (1922)).

Die Lösungen der Differentialgleichung

$$(20) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (C(x, y; \varrho) + \varrho^2) u = 0,$$

wo  $\varrho$  ein positiver Parameter,  $C$  eine Funktion ist, welche in dem Charakteristiken-Rechteck  $x_0 \leq x \leq x_1$ ,  $y_0 \leq y \leq y_1$  nebst ihren Ableitungen erster Ordnung nach  $x$ ,  $y$  stetig und bei wachsendem  $\varrho$  gleichmäßig beschränkt ist, werden mit denen von

$$(21) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \varrho^2 w = 0$$

verglichen. Ist  $u$  die durch die Bedingungen (Aufgabe II)

$$u|_{y=y_0} = f_1(x, \varrho), \quad u|_{x=x_0} = f_2(y, \varrho)$$

eindeutig bestimmte Lösung von (20) und ist  $w$  die durch dieselben Bedingungen

$$w|_{y=y_0} = f_1(x, \varrho), \quad w|_{x=x_0} = f_2(y, \varrho)$$

bestimmte Lösung von (21), so gilt gleichmäßig im obigen Rechteck die Limesgleichung

$$u(x, y; \varrho) = w(x, y; \varrho) + O\left(\frac{1}{\varrho^{\frac{1}{2}}}\right),$$

also jedenfalls  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} (u - w) = 0$ .

Dabei ist vorausgesetzt, daß  $w$  bei wachsendem  $\varrho$  im Rechteck gleichmäßig beschränkt ist, was übrigens keine Einschränkung der Allgemeinheit des Satzes bedeutet.

Ähnliches gilt für Lösungen, die entsprechend Aufgabe I bestimmt werden.

### § 11. Hyperbolische Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Variabeln.

Die einfachste hyperbolische Gleichung mit drei unabhängigen Variablen ist

$$(1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Die Elastizitätstheorie führt zu der Aufgabe (siehe § 6), eine Lösung dieser Gleichung zu finden, welche auf dem Rande  $S$  eines gegebenen Gebietes  $T$  der  $(x, y)$ -Ebene verschwindet oder einer anderen homogenen Randbedingung genügt und für  $t=0$  in eine gegebene willkürliche Funktion  $f(x, y)$  übergeht. Diese Aufgabe, mit der Methode der Partikularlösungen behandelt (§ 6), führte auf elliptische Differentialgleichungen mit Parameter. Eine ganz analoge Behandlung gestattet die hyperbolische Gleichung mit vier unabhängigen Variablen.

$$(2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Wir wollen aber jetzt in Verallgemeinerung der Resultate des vorigen Paragraphen die Lösung des Cauchyschen Problems für hyperbolische Gleichungen mit drei und mehr unabhängigen Variablen besprechen.

Das Cauchysche Problem ist für (1) von Volterra (*Acta Math.* **18** (1894)), für (2) schon früher von Kirchhoff gelöst worden. Ihre Methoden können aber nicht auf allgemeinere hyperbolische Gleichungen und auch nicht auf beliebig viele unabhängige Variablen ausgedehnt werden. Dagegen hat Hadamard (*Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **21** (1904), **22** (1905); *Acta Math.* **31** (1908)), eine Methode dargelegt, welche als die Verallgemeinerung der Riemannschen (s. insbes. Gl. (12) des § 10) anzusehen ist und auf die allgemeine lineare hyperbolische Gleichung mit  $n$  unabhängigen Variablen

$$(3) \quad F(u) \equiv \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + lu = g$$

angewandt werden kann. Die *Methode von Hadamard* beruht auf der Greenschen Formel und der „fundamentalen Lösung“ oder „Grundlösung“.

Wir setzen vorläufig nichts über den Charakter des Differentialausdruckes  $F(u)$  voraus. Er kann elliptisch oder hyperbolisch oder parabolisch sein. Es sei

$$(4) \quad G(v) = \sum \frac{\partial^2 (a_{ik} v)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum \frac{\partial (a_i v)}{\partial x_i} + l v$$

der zu  $F(u)$  adjungierte Differentialausdruck. Ist  $T$  ein Gebiet des  $n$ -dimensionalen Raumes der  $x_1, \dots, x_n$  mit der Begrenzung  $S$ , so bezeichnen wir mit  $\pi_1, \dots, \pi_n$  Größen, die proportional den Richtungskosinus der nach  $T$  gerichteten Normalen von  $S$  sind. Es sei

$$(5) \quad A = \sum_{i,k} a_{ik} \pi_i \pi_k$$

die quadratische Form der  $\pi_1, \dots, \pi_n$ , deren Koeffizienten mit denen der Ableitungen 2. Ordnung in (3.) übereinstimmen, ihre Diskriminante sei

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Auf einer Charakteristik ist  $A = 0$ .

Zur Abkürzung setzen wir

$$(6) \quad L = \sum_i \left( - \sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} + a_i \right) \pi_i$$

und schreiben symbolisch

$$(7) \quad \frac{d}{d\nu} = \sum_i \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \pi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \left\{ \sum_k a_{ik} \pi_k \right\} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Speziell ist  $\frac{dx_i}{d\nu} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \pi_k$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ . Die Richtung,

deren Richtungskosinus proportional  $\frac{dx_1}{d\nu}, \dots, \frac{dx_n}{d\nu}$  sind, wird „Konormale“ genannt. Offenbar ist  $\frac{du}{d\nu} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\nu}$  für irgend-

eine Funktion  $u$ , so daß  $\frac{d}{d\nu}$  tatsächlich den Differentialquotienten in einer bestimmten Richtung, eben der Konormalen, darstellt.

(Bei der Potentialgleichung ist übrigens die Konormale mit der Normalen identisch.) Die Greensche Formel lautet

$$(8) \quad \int \cdots \int_T [v F(u) - u G(v)] dx_1 \dots dx_n \\ = \int \cdots \int_S \left( u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} - Luv \right) dS.$$

Was nun die Grundlösungen betrifft, so sind uns diese schon bei den elliptischen Differentialgleichungen, insbesondere bei der Potentialgleichung, begegnet, nämlich  $\log \frac{1}{r}$  und  $\frac{1}{r}$ . Um zum Begriff und zur Existenz der Grundlösungen bei der allgemeinen Gleichung (3) zu gelangen, schließt Hadamard zunächst den parabolischen Fall, wo  $\Delta = 0$  ist, aus. Er bezeichnet die zur quadratischen Form

$$A = \sum a_{ik} t_i t_k$$

adjungierte Form, noch dividiert durch  $\Delta$ , mit

$$H = \sum h_{ik} t_i t_k$$

(die Beziehung zwischen  $A$  und  $H$  ist bekanntlich reziprok. Die Diskriminante von  $H$  ist die zu  $\Delta$  inverse Determinante). Man geht nun aus von den Differentialgleichungen

$$(9) \quad dx_i = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p_i} ds; \quad dp_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x_i} ds, \quad [i = 1, 2, \dots, n]$$

wobei

$$A = \sum a_{ik} p_i p_k \quad \text{gesetzt ist,}$$

zur Bestimmung der  $x_i$  und  $p_i$  als Funktionen von  $s$ . Als Anfangswerte werden vorgeschrieben

$$(10) \quad x_i|_{s=0} = \xi_i, \quad p_i|_{s=0} = p_{0i}.$$

Da die Gleichungen (9) ihre Form nicht ändern, wenn man  $s$  durch  $\lambda s$  und  $p_i$  durch  $\frac{p_i}{\lambda}$  ersetzt, so hat ihre Lösung die Form

$$(11) \quad x_i = f_i(sp_{01}, sp_{02}, \dots, sp_{0n}; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ sp_i = g_i(sp_{01}, \dots, sp_{0n}; \xi_1, \dots, \xi_n).$$

Die Gleichungen (11) stellen bei variabelm  $s$ , aber festen  $\xi_i$  und  $p_{0i}$  eine Kurve im  $n$ -dimensionalen Raume der  $x_1, \dots, x_n$



dar, welche durch den Punkt  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  geht, den man für  $s=0$  erhält. Bei veränderlichen Werten der Parameter  $p_{0i}$  bekommt man eine unendliche Schar von Kurven. Wir wollen die Anfangswerte  $p_{0i}$  der Bedingung  $A=0$ , d. h.

$$\sum a_{ik}(\xi_1, \dots, \xi_n) p_{0i} p_{0k} = 0$$

unterwerfen. Dann ist die Bedingung  $A=0$  für jeden Punkt einer solchen Kurve erfüllt. Die Schar dieser speziellen Kurven durch den Punkt  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  bildet also eine Charakteristikenfläche. Wir erhalten das „charakteristische Konoid“ mit Spitze  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ . In speziellen Fällen kann es ein Kegel sein. Im Falle der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$$

z. B. hat man

$$A = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2, \quad H = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2.$$

Daher ist  $u(x_1, x_2, x_3) = 0$  eine Charakteristik, wenn

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 0$$

ist. Das gilt z. B. für die Ebene

$$u = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0,$$

wenn  $a^2 + b^2 - c^2 = 0$  ist (diese Ebene ist eine reguläre Charakteristik), aber auch für den Kegel

$$(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 - (x_3 - \xi_3)^2 = 0$$

(er stellt eine Charakteristik mit singulärem Punkte dar). Die Schar der charakteristischen Ebenen durch  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  umhüllt den charakteristischen Kegel. Die Gleichungen (9) haben jetzt die spezielle Form

$$dp_1 = dp_2 = dp_3 = 0, \quad dx_1 = p_1 ds, \quad dx_2 = p_2 ds, \quad dx_3 = -p_3 ds.$$

Daher wird

$$p_1 = \text{konst.}, \quad p_2 = \text{konst.}, \quad p_3 = \text{konst.},$$

d. h. von  $s$  unabhängig

$$x_1 = \xi_1 + p_1 s, \quad x_2 = \xi_2 + p_2 s, \quad x_3 = \xi_3 - p_3 s.$$

Die obigen Gleichungen stellen bei festen  $\xi_i$ , aber variablen  $p_i$  die Gesamtheit der Geraden durch  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  dar. Legt man den  $p_i$  die Bedingung  $A = 0$  auf, so erhält man

$$(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 - (x_3 - \xi_3)^2 = s^2 A = 0,$$

also tatsächlich den charakteristischen Kegel mit der Spitze  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Wir bezeichnen die Gleichung des charakteristischen Konoids allgemein mit

$$(12) \quad \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0.$$

Es ist imaginär, wenn die Differentialgleichung (3) elliptisch ist (z. B.  $\Gamma = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2$  für die Potentialgleichung), reell, wenn die Differentialgleichung hyperbolisch ist.

Eine „Grundlösung“ ist nun eine Lösung, die auf dem charakteristischen Konoid eine vorgeschriebene Unstetigkeit aufweist. Hadamard beweist bei *ungeradem*  $n$  die Existenz einer Lösung der Form

$$(13) \quad u = \frac{V}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}},$$

z. B.

$$n = 3, \quad u = \frac{V}{\Gamma^{\frac{1}{2}}}.$$

Dabei ist  $V$  in der Umgebung von  $Q(\xi_1, \dots, \xi_n)$  regulär. Diese Lösung ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Bei *geradem*  $n$  erhält man jedoch eine Lösung der Form

$$(14) \quad u = \frac{V}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} + V_0 \log \Gamma,$$

wo  $V$  und  $V_0$  in der Umgebung des Punktes  $Q$  regulär sind. Diese Lösung ist nicht mehr eindeutig; denn man kann ja eine beliebige reguläre Lösung  $U$  von  $F(U) = 0$  hinzufügen, da

$$U = \frac{U \cdot \Gamma^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}}$$

geschrieben werden kann. Bis auf einen Summanden der Form  $\frac{n-2}{U \Gamma^{\frac{n-2}{2}}}$  ist aber  $V$  bestimmt. Natürlich kann auch mit einem

willkürlichen konstanten Faktor multipliziert werden. Der verfügbare konstante Faktor wird in beiden Fällen, mag  $n$  gerade oder ungerade sein, so gewählt, daß  $V$  bei Koinzidenz von  $P(x_1, \dots, x_n)$  mit  $Q(\xi_1, \dots, \xi_n)$  den Wert  $\frac{1}{\sqrt{|J|}}$  annimmt. Bei ungeradem  $n$  ist  $u$  dadurch völlig festgelegt.

Im elliptischen Falle wird  $u$  nur im Punkte  $Q(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , im hyperbolischen Falle, auf den wir uns von jetzt an beschränken, aber längs des ganzen reellen charakteristischen Konoids  $\Gamma = 0$  singulär.

Die im Falle  $n = 2$  des vorigen Paragraphen definierte Riemannsche Funktion ist nicht etwa eine Grundlösung, sondern vielmehr mit  $V_0$ , dem Faktor von  $\log \Gamma$  identisch (Hadamard, *Acta Math.* **31**, 338).

Der Differentialausdruck  $F(u)$  möge den „normalen“ hyperbolischen Typus haben, d. h. die quadratische Form  $A$  enthält, wenn sie in eine Summe von Quadraten transformiert wird,  $n - 1$  Quadrate von demselben Vorzeichen und ein Quadrat von entgegengesetztem Vorzeichen. Das charakteristische Konoid setzt sich dann aus zwei getrennten Schalen zusammen und teilt den Raum in drei Gebiete, eins innerhalb einer jeden der beiden Schalen, das dritte außerhalb (Coulon, *Thèse*, Paris 1902). Wir nehmen an (was man eventuell durch Multiplikation mit  $-1$  erreicht), es seien  $n - 1$  Quadrate negativ, eines positiv. Alsdann ist  $\Gamma$  positiv, wenn  $Q(\xi_1, \dots, \xi_n)$  innerhalb des von  $P(x_1, \dots, x_n)$  ausgehenden charakteristischen Konoids und also auch umgekehrt  $P$  innerhalb des von  $Q$  ausgehenden liegt.

Es handelt sich nun um die Lösung des Problems von Cauchy, wo eine Lösung  $u$  von (3) durch ihre Werte und die ihrer Ableitungen erster Ordnung auf einer gegebenen  $(n - 1)$ -dimensionalen Fläche  $S$  zu bestimmen ist. (Es genügt übrigens, die Ableitung nach der Konormalen vorzuschreiben.)

Das „innere“ Problem besagt, daß  $S$  nur eine Schale des von irgendeinem genügend nahen Punkte  $Q$  ausgehenden charakteristischen Konoids  $\Gamma = 0$  schneidet und daß diese Schale auf  $S$  einen geschlossenen ganz innerhalb  $\Gamma = 0$  liegenden Flächenteil begrenzt. Das tritt dann und nur dann ein, wenn die Tangentialebene jedes beliebigen Punktes von  $S$  außerhalb des von diesem Punkte ausgehenden charakteristischen Konoids liegt.

Das „äußere“ Problem, wo die Fläche  $S$  beide Schalen des von einem genügend nahen Punkte  $Q$  ausgehenden charakteristischen Konoids schneidet, ist im allgemeinen nicht lösbar.

Es ist nur dann lösbar, wenn die auf  $S$  gegebenen Werte der Lösung und ihrer Ableitungen gewissen Bedingungen genügen. (Hadamard, *Acta Math.* **31**, S. 306).

Bei hyperbolischen Gleichungen von nicht normalem Typus kann man das Cauchysche Problem ebensowenig stellen wie bei elliptischen Gleichungen (Hadamard, l. c. 353).

Bei der Lösung des Cauchyschen (inneren) Problems der Gleichung vom normalen Typus müssen die beiden Fälle  $n$  gerade und  $n$  ungerade getrennt behandelt werden.

I.  $n$  ungerade. Es soll der Wert von  $u$  in einem beliebigen  $S$  genügend nahen Punkte  $Q$  bestimmt werden. Das von  $Q$  ausgehende charakteristische Konoid  $\Gamma = 0$  schneidet  $S$  längs einer  $(n - 2)$ -fachen Mannigfaltigkeit, die auf  $S$  einen Teil  $S_Q$  begrenzt. Ferner begrenzen  $\Gamma$  und  $S_Q$  ein Gebiet  $T$  des  $n$ -dimensionalen Raumes. Auf  $T$  wird die Greensche Formel (8) angewandt, wobei  $u$  eine mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehene Lösung von (3) und  $v(P, Q)$  die fundamentale Lösung der adjungierten Gleichung  $G(v) = 0$  bedeutet (sie ist wegen ungeradem  $n$  eindeutig bestimmt). Da  $v$  längs eines Teils der Begrenzung von  $T$ , nämlich längs  $\Gamma$  unstetig wird und  $\Gamma$  überdies den singulären Punkt  $Q$  hat, ist die Benutzung der Greenschen Formel nicht ohne weiteres zulässig. Es sind mehrere Grenzübergänge erforderlich. Als zweckmäßig erweist sich die Einführung eines gewissen Integralsymbols, das die Lösung unseres Problems bequem darzustellen gestattet. Das Integral

$$(15) \quad \int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx \quad [0 < \alpha < 1; A(b) \neq 0]$$

hat keinen Sinn.  $A(x)$  möge eine erste Ableitung besitzen oder wenigstens die Bedingung von Lipschitz

$$|A(b) - A(x)| < k |b - x|$$

erfüllen. Dann kann man zu obigem Integral einen Ausdruck  $\frac{B(x)}{(b-x)^\alpha}$  hinzufügen, so daß der Grenzwert von

$$(16) \quad \int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx + \frac{B(x)}{(b-x)^\alpha}$$

für  $x \rightarrow b$  existiert. Dieser Grenzwert wird

$$(17) \quad \int_a^b \frac{A(x) - A(b)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx - \frac{A(b)}{\alpha(b-a)^\alpha}.$$

Die einzige Bedingung, welche  $B(x)$  erfüllen muß, lautet

$$A(b) + \alpha B(b) = 0.$$

Im übrigen ist  $B(x)$  völlig willkürlich. (Vgl. Hadamard, *Acta math.* 31.) Der Grenzwert (17) ist, wie man sieht, von der Wahl der Hilfsfunktion  $B(x)$  unabhängig und durch das gegebene Integral (15) allein völlig bestimmt. Hadamard nennt ihn den „endlichen Teil des Integrals“ und bezeichnet ihn symbolisch mit

$$(18) \quad \int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx.$$

Ähnlich ist es mit

$$(19) \quad \int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\alpha}} dx \quad [0 < \alpha < 1; A(b) \neq 0]$$

wo  $p$  eine positive ganze Zahl ist und  $A(x)$  Ableitungen bis zur  $p$ -ten Ordnung besitzt.

Durch Hinzufügung eines geeigneten Ausdrucks der Form

$$\frac{B(x)}{(b-x)^{p-1+\alpha}},$$

wo  $B(x)$  gewisse Bedingungen erfüllt, gelingt die Herstellung eines Grenzwertes, der von  $B(x)$  unabhängig, nur von (19) selbst abhängig ist. Bezeichnung ist wieder

$$(20) \quad \int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\alpha}} dx.$$

Der Exponent  $p + \alpha$  ist keine ganze Zahl, da ja  $0 < \alpha < 1$  mit Ausschluß der Grenzen vorausgesetzt wird. Das Integral

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^p} dx,$$

wobei also der Exponent  $p$  nunmehr eine ganze Zahl ist, läßt sich nicht so wie das obige Integral (19) behandeln. Man kann zwar durch Hinzufügung geeigneter Ausdrücke

$$\frac{B(x)}{(b-x)^{p-1}} + B_1(x) \log(b-x)$$

wieder zu einem Grenzwert kommen; aber dieser ist dann nicht mehr durch das Integral eindeutig bestimmt, sondern hängt von der Wahl von  $B(x)$  ab.

Das Verfahren kann leicht auf mehrfache Integrale ausgedehnt werden. Sei  $T$  ein Gebiet im  $n$ -dimensionalen Raume der  $x_1, \dots, x_n$ , das ganz oder teilweise von einer  $(n-1)$ -dimensionalen Fläche  $\sigma$  mit der Gleichung  $\Gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$  begrenzt wird. Es handelt sich um das Integral

$$(21) \quad \int \dots \int_T \frac{A(x_1, \dots, x_n)}{\Gamma^{p+\alpha}} d\tau.$$

Man führt auf  $\sigma$  krummlinige Koordinaten  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  ein und fügt als  $n$ -te Koordinate  $\Gamma$  hinzu. Das Volumenelement wird dann

$$d\tau = K d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-1} d\Gamma,$$

wo  $K$  die Funktionaldeterminante der  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ ,  $\Gamma$  nach den  $x_1, \dots, x_n$  ist. Diese Transformation gilt in einer genügend nahen Umgebung der Fläche  $\sigma$ . Das Integral (21) hat, da  $A \neq 0$  auf der Fläche  $\sigma$  vorausgesetzt wird, keinen Sinn. Man zerlegt es in zwei Integrale, von denen das erste ein nicht von  $\sigma$  begrenztes Integrationsgebiet besitzt und daher einen Sinn hat, das zweite ein der Fläche  $\sigma$  genügend nahes und teilweise von ihr begrenztes Integrationsgebiet besitzt. Auf das zweite Integral kann nun die obige Transformation angewandt werden. Dann versteht man unter dem „endlichen Teile“ des Integrals (21) den Wert

$$(22) \quad \left[ \int \dots \int \frac{A}{\Gamma^{p+\alpha}} d\tau \right] = \int \dots \int d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-1} \left[ \int \frac{K A d\Gamma}{\Gamma^{p+\alpha}}, \right]$$

wodurch der mehrdimensionale Fall auf den eindimensionalen zurückgeführt ist. Von der Fläche  $\sigma$  wird vorausgesetzt, daß



sie nur solche singuläre Punkte besitzt, in deren Umgebung  $\Gamma$  bei Annäherung eines Punktes  $(x_1, \dots, x_n)$  aus  $T$  an  $\sigma$  bloß von erster Ordnung in bezug auf die Entfernung des Punktes  $(x_1, \dots, x_n)$  von  $\sigma$  unendlich klein wird. (Diese Voraussetzung ist jedenfalls für die Spitze des charakteristischen Konoids erfüllt.)

Unter Anwendung der Greenschen Formel und der obigen Integralsymbole findet Hadamard die Lösung  $u$  des Problems in der Form

$$\begin{aligned} (-1)^{n_1} \pi \Omega_{2n_1-2} u(Q) &= (-1)^{n_1} \frac{\Omega_{2n_1-1}}{C_{n_1-1}} u(Q) \\ (23) \quad &= - \sqrt{\int \dots \int_T v(P, Q) g(P) dx_1, \dots, dx_n} \\ &\quad + \sqrt{\int \dots \int_{S_Q} \left( u \frac{dv}{dv} - v \frac{du}{dv} - Luv \right) dS}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $n = 2n_1 + 1$ ,  $\Omega_{m-1}$  bedeutet den Flächeninhalt der Hypersphäre vom Radius 1 im  $m$ -dimensionalen Raume, ferner

ist  $C_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \left(m - \frac{1}{2}\right)$ . Demnach ist  $u$  mittels der Grundlösung  $v$  durch die Werte von  $u$  und  $\frac{du}{dv}$  auf  $S$  dargestellt.

II.  $n$  gerade. In diesem Falle tritt eine erhebliche Schwierigkeit auf, da

$$v = \frac{V}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} + V_0 \log \Gamma$$

jetzt im Nenner einen ganzzahligen Exponenten  $\frac{n-2}{2}$  hat, so daß die Integralsymbole  $\sqrt{\int \dots}$  nicht angewandt werden können. Hadamard führt daher diesen Fall auf den einer ungeraden Anzahl unabhängiger Variabler durch Hinzufügung einer neuen Hilfsvariablen zurück. Schließlich wird diese wieder herausgeschafft, und man erhält ein Resultat, das erheblich komplizierter ist als im Falle eines ungeraden  $n$ , nämlich

$$(24) \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{n_1} \frac{\Omega_{n_1-2}}{2C_{n_1-1}} u(Q) = - \int_T \cdots \int g V_0 dx_1, \dots dx_n \\ & + \int_{S_Q} \cdots \int \left( u \frac{dV_0}{dv} - V_0 \frac{du}{dv} - Lu V_0 \right) dS \\ & + (-1)^{n_1} 2 \left\{ \frac{1}{(n_1-2)!} \frac{d^{n_1-2}}{d\gamma^{n_1-2}} \left[ \int_{\sigma_\gamma} \cdots \int g V d\sigma_\gamma \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{s_\gamma} \cdots \int \left( V \frac{du}{dv} + Lu V \right) ds_\gamma \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{(n_1-1)!} \frac{d^{n_1-1}}{d\gamma^{n_1-1}} \int_{s_\gamma} \cdots \int u \left( \Gamma \frac{dV}{dv} \right. \right. \\ & \left. \left. - (n_1-1) V \frac{d\Gamma}{dv} + V_0 \Gamma^{n_1-1} \right) ds_\gamma \right\}_{\gamma=0}. \end{aligned} \right.$$

Dabei haben  $\Gamma, S, S_Q, T$  dieselbe Bedeutung wie bei ungeradem  $n$ ,  $\sigma_\gamma$  ist der im Innern von  $T$  gelegene Teil der Fläche  $\Gamma = \gamma$ , wo  $\gamma$  eine kleine positive Zahl bedeutet,  $s_\gamma$  ist der Schnitt der Fläche  $\sigma_\gamma$  mit  $S_Q$ . Ferner ist  $n_1 = \frac{n}{2}$ .

In (24) treten im Gegensatz zu (23) keine Integralsymbole  $\int \cdots$  auf. Diese sind ja überflüssig, da unter dem Integralzeichen nicht die auf  $\Gamma = 0$  singuläre Grundlösung  $v$  selbst, sondern nur ihre regulären Bestandteile  $V$  und  $V_0$  vorkommen.

Für  $n = 2$  kann man  $V \equiv 0$  setzen;  $V_0$  ist die Riemannsche Funktion, und man bekommt die Formel (12) des § 10.

## § 12. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung.

Die Differentialgleichung

$$(1) \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = H\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ist parabolisch in einem Gebiete der  $(x, y)$ -Ebene, wo

$AC - B^2 = 0$  ist, was wir jetzt voraussetzen. Die Charakteristiken

$$A dy^2 - 2 B dx dy + C dx^2 = 0$$

bilden die reelle doppelt zu zählende Schar

$$\varphi(x, y) = \text{konst.}$$

Durch die Transformation

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = y$$

wird die obige Gleichung in die Normalform übergeführt, welche, wenn man statt  $\xi, \eta$  wieder  $x, y$  schreibt, lautet

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Die Charakteristiken sind nun die Geraden

$$(3) \quad y = \text{konst.}$$

Ein Spezialfall von (2) ist

$$(4) \quad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Eine noch speziellere Gleichung ist

$$(5) \quad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y).$$

Die zu (5) gehörige homogene Gleichung

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ist die Gleichung der Wärmeleitung in einem homogenen Stabe.

Die Gleichung der Wärmeleitung in  $n + 1$  Variablen lautet

$$(5a) \quad \Delta u - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1, \dots, x_n, y) \quad \left[ \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right].$$

Mit (5) und (6) beschäftigen wir uns in diesem Paragraphen, mit den allgemeineren Gleichungen im nächsten.

In der Theorie der Wärmeleitung, wo  $y$  die Zeit bedeutet, stellt man sich z. B. die Aufgabe, eine Lösung von (6) zu bestimmen, die den Randbedingungen

$$u|_{x=a} = 0, \quad u|_{x=b} = 0$$

und der Anfangsbedingung

$$u|_{y=0} = g(x)$$

genügt. Die Werte von  $u$  sind also auf den drei Seiten eines offenen Rechtecks gegeben, als dessen eine Seite man die  $X$ -Achse nimmt, während die beiden anderen Seiten Parallelen zur  $Y$ -Achse sind. Diese Aufgabe kann man mit der Methode der partikularen Lösungen (vgl. § 6) behandeln.

Man setzt

$$u(x, y) = X(x) Y(y)$$

und findet

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \text{konst.} = -\lambda$$

oder

$$X''_n + \lambda_n X_n = 0, \quad Y'_n + \lambda_n Y_n = 0,$$

daher

$$Y_n = e^{-\lambda_n y}$$

$$X_n = \sin \sqrt{\lambda_n} (x - a),$$

wobei die  $\lambda_n$  der transzendenten Gleichung

$$\sin \sqrt{\lambda_n} (b - a) = 0$$

genügen. Schließlich ist die gesuchte Lösung

$$u(x, y) = \sum_n c_n e^{-\lambda_n y} \sin \sqrt{\lambda_n} (x - a),$$

wobei die  $c_n$  durch die Bedingung

$$u(x, 0) = \sum_n c_n \sin \sqrt{\lambda_n} (x - a) = g(x)$$

bestimmt werden.

Die  $\lambda_n$  können als Eigenwerte, die  $\sin \sqrt{\lambda_n} (x - a)$  als Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns angesehen werden. Ist  $g(x)$  nebst Ableitungen bis zur zweiten Ordnung für  $a \leq x \leq b$  stetig und erfüllt  $g(x)$  die Randbedingungen  $g(a) = g(b) = 0$ , so darf  $g(x)$  in die Fouriersche Reihe  $\sum c_n \sin \sqrt{\lambda_n} (x - a)$  entwickelt werden. Dies ergibt sich z. B. aus dem allgemeinen Entwicklungssatze der Theorie der Integralgleichungen. (Es ge-

nügt sogar, von  $g(x)$  erheblich weniger vorauszusetzen, vgl. etwa *Enzyklop. der math. Wiss.* II, 1 Nr. 12.)

Wir wollen auf die Methode der Partikularlösungen nicht weiter eingehen, sondern nunmehr die parabolischen Gleichungen mit der *Methode der Grundlösungen und der Greenschen Formeln* behandeln, die ja bereits auf elliptische und hyperbolische Gleichungen mit größtem Erfolge angewandt wurde. Dabei gelingt es, der Randwertaufgabe eine gegenüber der obigen erheblich verallgemeinerte Fassung zu geben (E. E. Levi, *Ann. di Mat.* (III) **14** (1908), 187—264; Holmgren, *Ark. f. Mat.* **3** (1906—1907), 1—4.)

Der zu  $L(u)$  adjungierte Differentialausdruck ist

$$(7) \quad M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Es sei  $S$  eine, abgesehen von einer endlichen Anzahl von Punkten, mit stetiger Tangente versehene geschlossene Kurve, die von jeder Parallelen zur  $X$ - oder zur  $Y$ -Achse nur in einer endlichen Anzahl von Punkten geschnitten wird,  $T$  das von  $S$  begrenzte beschränkte Gebiet. Sei  $u$  eine Funktion, die nebst ihren Ableitungen  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  in  $T + S$  stetig ist. Dasselbe gelte für  $v$ . Dann lautet die Greensche Formel als Spezialfall von Gleichung (5) des § 4

$$(8) \quad \int_T \int (v L(u) - u M(v)) dx dy = \int_S \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \int_S v u dx.$$

Das Randintegral über  $S$  ist so zu durchlaufen, daß  $T$  zur Linken liegt.

Der Formel (6) des § 2 entspricht hier

$$(9) \quad \int_T \int u L(u) dx dy = - \int_T \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy + \int_S u \left( \frac{\partial u}{\partial x} dy + \frac{1}{2} u dx \right).$$

Aus (9) ergibt sich leicht folgender Eindeutigkeitssatz: Es sei  $s$  eine offene Kurve mit denselben Eigenschaften wie  $S$ . Ihre Endpunkte  $A(a, y_0)$  und  $B(b, y_0)$ , wobei  $a < b$ , sollen auf derselben Charakteristik  $y = y_0$  liegen, während  $s$  im übrigen unterhalb dieser Charakteristik liegt. Dann kann es nicht zwei verschiedene, den obigen Stetigkeitsbedingungen genügende Lösungen von (5) geben, welche auf  $s$  dieselben Werte annehmen.

Denn sind  $u_1$  und  $u_2$  zwei solche Lösungen, so setze man  $u_1 - u_2 = u$  und wende auf das von  $S$ , d. h. von  $s$  und  $AB$  begrenzte Gebiet  $T$  die Formel (9) an. Da in  $T$  ständig  $L(u) = 0$ , auf  $s$  aber  $u = 0$ , auf  $AB$  endlich  $dy = 0$  ist, folgt

$$\int_T \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_{BA} u^2 dx = - \frac{1}{2} \int_a^b u^2 dx,$$

woraus sich unmittelbar  $u = 0$  in  $T + S$  ergibt, w. z. b. w.

Der Eindeutigkeitssatz kann auf ein Gebiet allgemeinerer Beschaffenheit ausgedehnt werden. Sei  $T$  irgendein beschränktes Gebiet (aus „inneren“ Punkten bestehende „zusammenhängende“ Punktmenge),  $S$  seine Begrenzung (die Menge derjenigen Grenzpunkte von  $T$ , die nicht zu  $T$  gehören). Zu  $S$  gehöre das Stück  $AB$  einer Charakteristik  $y = y_0$ , der übrige Teil von  $S$  liege unterhalb dieser Charakteristik und heiße  $s$ . Dann gilt der Eindeutigkeitssatz ebenso wie oben (vgl. E. E. Levi, l. c. S. 192 ff.). Hier kann  $s$  z. B. ein Jordansches Kurvenstück sein. Aus dem Eindeutigkeitssatz ergibt sich der Satz über die Lage der Extrema, welcher das Analogon zu dem entsprechenden Satze der Potentialtheorie ist: Das Gebiet  $T$  und der Rand  $S$  seien von der eben angegebenen Art. Sei  $u$  eine in  $T + S$  stetige, in  $T$  nebst den Ableitungen erster Ordnung stetige Lösung der homogenen Gleichung (6) (aus der Differentialgleichung ergibt sich dann auch die Stetigkeit von  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ). Dann nimmt  $u$  sowohl ihr Maximum wie ihr Minimum auf  $s$  an, (d. h. das Maximum (Minimum) von  $u$  auf  $s$  ist größer (kleiner) oder gleich den Werten von  $u$  in  $T$  oder auf  $AB$ ); vgl. Levi l. c. S. 194.

Auf Grund dieses Satzes kann man den Satz von Harnack aus der Potentialtheorie auf die Wärmeleitungsgleichung übertragen: Konvergiert eine Reihe von regulären (d. h. nebst Ableitungen erster Ordnung stetigen) Lösungen der Gleichung (6) gleichmäßig auf  $s$ , so konvergiert sie gleichmäßig in  $T + S$ . Ihr Grenzwert ist eine reguläre Lösung von (6).

Für die Gleichung (5a) gelten analoge Sätze wie für (5) und werden auf entsprechende Art bewiesen.



Sei  $T$  ein beschränktes Gebiet des  $(n+1)$ -dimensionalen Raumes der  $x_1, \dots, x_n, y$ , das von einer  $n$ -dimensionalen mit stetiger Normale versehenen Fläche  $S$  begrenzt wird. Sind  $(x_i, n)$ ,  $(y, n)$  die Winkel der nach  $T$  gerichteten Normalen von  $S$  mit den Koordinaten-Achsen, so lautet die Greensche Formel

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_T \left\{ \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right\} u dx_1 \dots dx_n dy \\ = - \int \cdots \int_T \left\{ \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right\} u dx_1 \dots dx_n dy \\ + \int_S u \left\{ \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(x_i, n) + \frac{1}{2} u \right\} dS. \end{aligned}$$

Ist nun  $s$  eine  $n$ -dimensionale Fläche, welche zusammen mit der Charakteristik  $y = \text{konst.} = y_0$  ein Gebiet  $T$  begrenzt, und ganz unterhalb  $T$  liegt (d. h. auf  $s$  ist ständig  $y < y_0$ , und nur längs des Schnittes mit der Charakteristik ist  $y = y_0$ ), so ist eine reguläre (d. h. nebst den in (5a) auftretenden Ableitungen stetige) Lösung von (5a) in ganz  $T$  durch ihre Werte auf  $s$  eindeutig bestimmt. Das ergibt sich aus der Greenschen Formel.

Aus dem Eindeutigkeitssatze folgert man wieder den Satz über die Lage der Extrema einer Lösung der homogenen Gleichung

$$\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Auch der Satz von Harnack bleibt gültig.

Indem wir nun zu den Existenzsätzen für die Lösungen von (5) übergehen, betrachten wir nur noch Gebiete der folgenden Art: Das Gebiet  $T$  liegt zwischen den Charakteristiken  $y = 0$  und  $y = y_0$ . Es wird oben begrenzt von  $y = y_0$ , außerdem von zwei Kurven  $s_1$  und  $s_2$  mit den Gleichungen  $x = \xi_1(y)$  und  $x = \xi_2(y)$ , wo  $\xi_1$  und  $\xi_2$  eindeutige stetige Funktionen sind, die abgesehen von einer endlichen Anzahl von Punkten stetige Ableitungen besitzen und ferner von jeder Charakteristik höchstens in einem Punkte geschnitten und nirgends von einer Charakteristik berührt werden (d. h.  $\xi'_1(y)$  und  $\xi'_2(y)$  werden nicht  $\infty$ ), die endlich höchstens mit Ausnahme von  $y = 0$  der Bedingung  $\xi_1(y) < \xi_2(y)$  genügen. Diese beiden Kurven stoßen

entweder auf der  $X$ -Achse zusammen: Gebiet erster Art;  $\xi_1(0) = \xi_2(0)$ . Oder aber es tritt zu der Begrenzung noch ein Stück  $k$  der  $X$ -Achse hinzu: Gebiet zweiter Art;  $\xi_1(0) < \xi_2(0)$ .

Die Rolle der „Grundlösung“ spielt im Falle der Wärmeleitungsgleichung die Funktion

$$(10) \quad v(x, y; x', y') = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y' - y}} e^{\frac{-(x' - x)^2}{4(y' - y)}} & \text{für } y \leq y' \\ 0 & \text{für } y > y'. \end{cases}$$

Sie genügt als Funktion von  $(x', y')$  der Gleichung (6), als Funktion von  $(x, y)$  der adjungierten Gleichung (7). Sie wird singular, wenn  $x = x'$ ,  $y = y'$  ist.

Allgemeiner kann man Funktionen der Art

$$(11) \quad h_{\alpha\beta}(x, y; x', y') = \begin{cases} \frac{(x' - x)^\alpha}{(y' - y)^\beta} e^{-\frac{(x' - x)^2}{4(y' - y)}} & \text{für } y \leq y' \\ 0 & \text{für } y > y' \end{cases}$$

benutzen. Es ist  $v = h_{0, \frac{1}{2}}$ .

Für  $y = y'$ ,  $x \neq x'$  werden die Funktionen (11) mit allen ihren Ableitungen 0.

Es ist

$$(12) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} h_{1, \frac{3}{2}} = v \frac{x' - x}{2(y' - y)}.$$

Wir wenden nun die Greensche Formel (8) an, indem wir für  $u$  irgendeine reguläre Lösung von (5), für  $v$  die Grundlösung (10) nehmen und das Integrationsgebiet oben durch die Charakteristik  $y = y'$  begrenzen. Das Integrationsgebiet heiße  $T(y')$ . Mittels eines Grenzüberganges, indem man zuerst

$$y = y' - \varepsilon \quad [\varepsilon > 0]$$

als obere Grenzlinie nimmt und dann  $\varepsilon$  gegen 0 konvergieren läßt, erhält man die fundamentale Formel

$$(13_1) \quad \int_{s(y')} \left\{ \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + uv dx \right\} - \iint_{T(y')} v f dx dy = \begin{cases} 2\sqrt{\pi} u(x', y') \\ \sqrt{\pi} u(x', y') \\ 0 \end{cases}$$

Es gilt  $(13_1)$ ,  $(13_2)$  oder  $(13_3)$ , je nachdem  $(x', y')$  in  $T$ , auf  $s$  oder außerhalb  $T + S$  liegt.

Diese Formel ist das Analogon zu den Formeln (10), (11), (12) des § 2.

Der Punkt  $(x', y')$  liege in  $T$ . Das in (13) auftretende Linienintegral  $\int_{s(y')}$  genügt, wie leicht ersichtlich, für sich allein der homogenen Gleichung (6),  $u(x', y')$  genügt der unhomogenen Gleichung (5). Daher ist auch

$$(14) \quad U(x', y') = \int \int_{T(y')} v(x, y; x', y') f(x, y) dx dy$$

eine Lösung der unhomogenen Gleichung (5). Sie spielt in der Theorie der Wärmeleitungsgleichung eine ähnliche Rolle, wie im Falle der Gleichung  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  das logarithmische Potential der Flächenbelegung.

Da man nun also das partikuläre Integral (14) der Gleichung (5) zur Verfügung hat, kann man die Randwertaufgabe von (5) auf die von (6) reduzieren. Es ist also die Existenz einer in  $T + S$  stetigen, in  $T$  regulären Lösung von (6) nachzuweisen, welche auf  $s$  vorgeschriebene Werte, die eine stetige Ortsfunktion bilden mögen, annimmt. Sei etwa

$$u = \begin{cases} \varphi_1(y) & \text{auf } s_1 \\ \varphi(x) & \text{auf } k \quad (\text{Stück der X-Achse}) \\ \varphi_2(y) & \text{auf } s_2 \end{cases}$$

und

$$\varphi_1(0) = \varphi(\xi_1(0)), \quad \varphi_2(0) = \varphi(\xi_2(0)).$$

Bei einem Gebiete der ersten Art fällt natürlich  $\varphi(x)$  weg. Bei einem Gebiete der zweiten Art läßt sich die Aufgabe noch weiter reduzieren. Ist nämlich  $\Phi(x)$  irgendeine für alle  $x$  definierte stetige Funktion, die auf  $k$  mit  $\varphi(x)$  übereinstimmt, so stellt

$$(15) \quad W(x', y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, 0; x', y') \Phi(x) dx$$

eine Lösung von (6) dar, die, wie sich einfach zeigen läßt, auf der X-Achse, d. h. für  $y' = 0$ , die Werte  $\Phi(x)$  annimmt. In-

dem man  $u - W$  bildet, sieht man, daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\varphi(x) \equiv 0$  und also  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$  annehmen kann.

Für das folgende ist nun grundlegend die Tatsache, daß das Integral

$$\int_0^{y'} h_{1\frac{1}{2}}(\xi_1(y), y; x', y') \psi_1(y) dy,$$

wo  $\psi_1(y)$  eine für  $0 \leq y \leq y_0$  stetige Funktion ist, einen ähnlichen Charakter hat, wie im elliptischen Falle das Potential einer Doppelschicht. Es ist nämlich

$$(16) \quad \lim_{\substack{y'=y_1 \\ x'=\xi_1(y_1) \pm 0}} \int_0^{y'} h_{1\frac{1}{2}}(\xi_1(y), y; x', y') \psi_1(y) dy \\ = \pm 2\sqrt{\pi} \psi_1(y_1) + \int_0^{y_1} h_{1\frac{1}{2}}(\xi_1(y), y; \xi_1(y_1), y_1) \psi_1(y) dy.$$

Die entsprechende Limesgleichung gilt natürlich bei Annäherung an einen Punkt  $y_2, \xi_2(y_2)$  von  $s_2$ .

Was den Beweis von (16) betrifft, so ist zu beachten, daß aus (13) für  $u \equiv 1$  folgt

$$-\int_{s(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x, y; x', y') \left[ \frac{x'-x}{2(y'-y)} dy - dx \right] = \begin{cases} 2\sqrt{\pi} \\ \sqrt{\pi} \\ 0 \end{cases}$$

Daraus ergibt sich leicht

$$\lim_{\substack{y'=y_1 \\ x'=\xi_1(y_1) \pm 0}} \int_0^{y'} h_{1\frac{1}{2}}(\xi_1(y), y; x', y') dy \\ = \pm 2\sqrt{\pi} + \int_0^{y_1} h_{1\frac{1}{2}}(\xi_1(y), y; \xi_1(y_1), y_1) dy,$$

d. h. die Formel (16) in dem speziellen Falle  $\psi_1(y) \equiv 1$ . Bei beliebigem stetigen  $\psi_1(y)$  wird alsdann der Beweis auf Grund von Abschätzungen der Funktion  $h_{1\frac{1}{2}}$  vollendet (E. E. Levi, l. c. S. 210 ff.).

Um nun die entsprechend der Voraussetzung  $\varphi(x) \equiv 0$  reduzierte Randwertaufgabe für (6) zu lösen, macht man den Ansatz

$$(17) \quad u(x', y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y), y; x', y') \psi_1(y) dy - \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_2(y), y; x', y') \psi_2(y) dy \right\},$$

wo  $\psi_1$  und  $\psi_2$  verfügbare Funktionen sind.

Die obige Funktion  $u(x', y')$  ist eine Lösung von (6), welche in allen Punkten der  $X$ -Achse verschwindet.

Die Funktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  werden durch die Forderung bestimmt, daß  $u$  auf  $s_1$  bzw.  $s_2$  die Werte  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  annimmt; demnach wird

$$(18) \quad \begin{aligned} \psi_1(y_1) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{y_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y), y; \xi_1(y_1), y_1) \psi_1(y) dy - \int_0^{y_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_2(y), y; \xi_1(y_1), y_1) \psi_2(y) dy \right\} &= \varphi_1(y_1) \\ \psi_2(y_1) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{y_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y), y; \xi_2(y_1), y_1) \psi_1(y) dy - \int_0^{y_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_2(y), y; \xi_2(y_1), y_1) \psi_2(y) dy \right\} &= \varphi_2(y_1). \end{aligned}$$

Dies ist ein System von zwei simultanen linearen inhomogenen Integralgleichungen. Es kann auf eine einzige Integralgleichung zurückgeführt werden.

Da sich zeigen läßt, daß die zugehörige homogene Gleichung bzw. das homogene System keine Lösung besitzt, so ist die Eindeutigkeit und die Existenz der Funktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  gesichert und damit die Randwertaufgabe gelöst. (E. E. Levi, l. c.)

Addieren wir zu der Grundlösung  $v$  diejenige Lösung  $H(x, y; x', y')$ , welche auf  $s$  die Werte  $-v$  annimmt, so erhalten wir die Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung. Die Bestimmung von  $H$  ist ein spezieller Fall der Randwertaufgabe.

In ähnlicher Weise wie für (5.) löst Levi die Randwertaufgabe für die Gleichung (5a) mit  $n + 1$  unabhängigen Variablen (Levi, l. c. S. 245 ff.). Grundlösung ist hier z. B. für  $n = 2$

$$v(x_1, x_2, y; x'_1, x'_2, y') = \begin{cases} e^{-\frac{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2}{4(y' - y)}} \cdot \frac{1}{y' - y} & \text{für } y \leq y' \\ 0 & \text{für } y > y'. \end{cases}$$

So wie Levi und Holmgren die Methode der Integralgleichungen hat W. Sternberg die Perronsche Methode vom elliptischen auf den parabolischen Fall übertragen. Dabei ergibt sich wieder eine erheblich verallgemeinerte Fassung der Randwertaufgabe. Die Funktionen  $x = \xi_1(y)$  und  $x = \xi_2(y)$  brauchen nicht mehr mit Ableitungen versehen vorausgesetzt zu werden, sondern es wird nur verlangt, daß für irgend zwei Punkte  $x, y$  und  $x_1, y_1$  von  $s_1$  oder  $s_2$  die Ungleichung gilt

$$\left| \frac{x - x_1}{y - y_1} \right| < c,$$

wobei  $c$  eine positive Konstante ist. Dann kann jedenfalls in einem Punkte, wo die Ableitung  $\xi'_1(y)$  bzw.  $\xi'_2(y)$  existiert, die Tangente keine Charakteristik sein. Die gegebenen Randwerte brauchen keine stetige, sondern bloß eine beschränkte Funktion darzustellen. An Stelle der Kreise bzw. der Poissonschen Integrale benutzt man hier nach oben offene Paralleltrapeze, deren parallele Seiten Charakteristiken sind, bzw. die leicht herstellbaren Lösungen der Randwertaufgabe für solche Trapeze.

In einer demnächst erscheinenden Arbeit hat A. Hammerstein die Randwertaufgabe für (5) und (5a) auf neue elementare Art gelöst.

### § 13. Allgemeine Theorie der parabolischen Differentialgleichungen.

Die allgemeine Theorie der parabolischen Gleichungen ist in ziemlich vollständiger Weise von M. Gevrey entwickelt worden (*J. de Math.* (6) 9 (1913) 305—471).



Die allgemeine lineare parabolische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen hat die Form

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + f = 0.$$

Wir nehmen an, daß  $a, b, c, f$  in einem gewissen Gebiete der  $(x, y)$ -Ebene stetige Funktionen von  $x$  und  $y$  sind. Überdies möge  $b$  stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen und konstantes Vorzeichen haben (auch nirgends verschwinden). Dann kann (1) durch eine einfache Transformation der unabhängigen Variablen auf die Normalform gebracht werden, wo  $-1$  der Koeffizient von  $\frac{\partial u}{\partial y}$  ist. Wir können also für das folgende die Gleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = a \frac{\partial u}{\partial x} + cu + f$$

zugrunde legen.

Für diese Gleichung kann man dieselbe Randwertaufgabe wie für die Gleichungen (5) oder (6) des vorigen Paragraphen stellen. In ähnlicher Weise, wie im vorigen Paragraphen eine Integralgleichung, ergibt sich nun eine Integro-Differentialgleichung (Gevrey, l. c. S. 374 ff.). Sie ist vom Volterraschen Typus, da die Integrationsgrenzen nicht konstant sind, und kann daher in einfacher Weise mit der Methode der sukzessiven Approximationen gelöst werden.

Im speziellen Fall  $a \equiv 0$  erhält man unmittelbar eine Integralgleichung (keine Integro-Differentialgleichung). Der allgemeine Fall, wo  $a$  nicht identisch verschwindet, kann durch eine Transformation der Funktion  $u$  auf diesen speziellen  $a \equiv 0$  zurückgeführt werden, wie es schon H. Block (*Arkiv för Mat.* 6) ausgeführt hat. Diese Zurückführung ist aber nur möglich, wenn  $a$  stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Dagegen ist die direkt auf (2) angewandte Methode von Gevrey allgemein ohne Voraussetzungen über die Ableitungen von  $a$  anwendbar.

Die Randwertaufgabe der nichtlinearen Gleichung

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

(wobei  $f$  eine stetige Funktion ihrer vier Argumente in einem

gewissen Gebiete der  $(x, y)$ -Ebene und etwa für  $|u| \leq N$ ,  $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq N$  ist, die überdies als Funktion von  $u$  und von  $\frac{\partial u}{\partial x}$  Lipschitzbedingungen genügt) wird wieder mit sukzessiven Approximationen gelöst, wie im elliptischen und hyperbolischen Falle.

Nur mit besonderen Kunstgriffen ist die allgemeinere Gleichung

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

der Methode der sukzessiven Approximationen zugänglich zu machen (Gevrey l. c. S. 394 ff.).

Auch für die parabolischen Gleichungen mit  $n + 1$  unabhängigen Variablen

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + f,$$

sowie

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f\left(x_1, \dots, x_n, y; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

löst Gevrey (l. c. S. 406 ff.) die Randwertaufgabe, welche in dem speziellen Falle der Gleichung (5a) des vorigen Paragraphen schon von E. E. Levi gelöst worden war.

#### § 14. Die Natur der Lösungen parabolischer Differentialgleichungen.

E. Holmgren (*Arkiv för Matematik* 2 (1906)) und E. E. Levi (*Rend. R. Acc. Linc.*, 1907. 2. sem.) haben bewiesen, daß jede reguläre (d. h. mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehene) Lösung  $u$  der Wärmeleitungsgleichung in  $x$  analytisch ist. Dieser Satz gilt auch für die Lösungen von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y),$$

wenn  $f$  in  $x$  analytisch ist (E. E. Levi, *Annali di Mat.* (3) 14 (1908), 239 ff.). M. Gevrey hat dieses Resultat auf die regu-

lären Lösungen der Gleichung (2) des vorigen Paragraphen ausgedehnt, wenn die Koeffizienten  $a, c, f$  in  $x$  analytisch sind, sowie auch auf die regulären Lösungen der Gleichungen (3) bzw. (4) des vorigen Paragraphen, wenn  $f$  in  $x, u, \frac{\partial u}{\partial x}$  bzw. in  $x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  analytisch ist (Gevrey l. c. S. 418 ff.).

M. Gevrey untersucht auch die Natur der Lösungen als Funktionen von  $y$  (l. c. S. 429 ff.).

### Zusatz nach der Korrektur.

Aus einer dem Verfasser nachträglich zugesandten Arbeit von Kurt Friedrichs, *Die Verallgemeinerung der Riemannschen Methode auf eine beliebige gerade Anzahl von Dimensionen*, Gött. Nachr. Math.-Phys. Kl. 1927, 172—177, ergibt sich, daß die im § 11 auseinandergesetzte Methode von Hadamard im Falle eines geraden  $n$  merklich vereinfacht werden kann. Der Fall eines geraden  $n$  braucht nicht mehr auf den eines ungeraden zurückgeführt, sondern kann direkt behandelt werden. Die ziemlich umständliche Formel (24) des § 11 wird alsdann durch eine andere kürzere ersetzt, die sich der Formel (23) gut anpaßt.

# Kapitel XXIII.

## Differenzenrechnung.

Von *Alwin Walther* in Göttingen.

Die zu Newtons Zeiten entstandene und im 18. Jahrhundert eifrig gepflegte Differenzenrechnung hat, nachdem sie durch die Entwicklung der Analysis im 19. Jahrhundert stark zurückgedrängt worden war, etwa seit dem Jahre 1910 einen neuen kräftigen Aufschwung genommen. Es handelt sich dabei unter anderem um den Aufbau der Theorie der *linearen Differenzengleichungen* mit modernen funktionentheoretischen Hilfsmitteln, um eine kritische Prüfung der praktisch so wichtigen Verfahren der *Interpolation*, der *numerischen Differentiation und Integration*, um die Untersuchung der in der Differenzenrechnung an die Stelle der Potenzreihen tretenden *Interpolations- und Fakultätenreihen*. Die folgenden Zeilen geben einen kurzen Abriß dieser Dinge; für weiteres Studium greife man zunächst zu Nörlund, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Berlin 1924 (mit reichhaltigem Literaturverzeichnis), für die nach der Seite der Anwendungen liegenden Fragen zu Runge-König, *Vorlesungen über numerisches Rechnen*, Berlin 1924; Steffensen, *Interpolationslaere*, Kopenhagen 1925, *Interpolation*, Baltimore 1927; Whittaker-Robinson, *Calculus of observations*, London 1924.

### § 1. Steigungen und Differenzen.

Die *Steigungen* einer Funktion  $y = f(x)$  (Nörlund, *Differenzenrechnung*, 8) für die Punkte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  werden definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x_0 x_1) &= \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, & f(x_1 x_2) &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \dots \\ f(x_0 x_1 x_2) &= \frac{f(x_0 x_1) - f(x_1 x_2)}{x_0 - x_2}, & f(x_1 x_2 x_3) &= \frac{f(x_1 x_2) - f(x_2 x_3)}{x_1 - x_3}, \dots \\ &\dots & \dots & \dots \\ f(x_0 x_1 \dots x_n) &= \frac{f(x_0 x_1 \dots x_{n-1}) - f(x_1 x_2 \dots x_n)}{x_0 - x_n}, \dots \end{aligned}$$

Andere Namen: *fonctions interpolaires*, *dividierte Differenzen*, *Newtonsche* oder *verallgemeinerte Differenzenquotienten*, andere Bezeichnungen z. B.  $[x_0 x_1 \dots x_n]$ ,  $\delta^n(x_0 x_1 \dots x_n)$ ,  $\delta^n f(x)$ ,  $f_n$ .

Bei linearen Aggregaten dürfen die Steigungen gliedweise gebildet und Konstanten vorgesetzt werden. Die  $n$ -te Steigung  $f(x_0 x_1 \dots x_n)$  ist eine *symmetrische* Funktion von  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (z. B. für  $f(x) = \frac{1}{x}$  gleich  $\frac{(-1)^n}{x_0 x_1 \dots x_n}$ ) und *dann und nur dann* konstant, wenn  $f(x)$  ein Polynom höchstens  $n$ -ten Grades ist. Explizite Darstellungen durch die Funktionswerte  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  können unmittelbar oder auch mittels Determinanten und mittels vielfacher Integrale gegeben werden.

Es sei  $\bar{b} \leq x_0, x_1, \dots, x_n \leq b$  und  $f(x)$  reell, dann liefert wiederholte Anwendung des Rolleschen Satzes

$$f(x_0 x_1 \dots x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad (\bar{b} < \xi < b),$$

wofern  $f(x)$  für  $\bar{b} \leq x \leq b$   $n$ -mal differenzierbar ist. Hieraus folgt beim *Zusammenrücken* von  $x_0, x_1, \dots, x_n$  nach  $x_0$

$$f(x_0 x_1 \dots x_n) \rightarrow \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

wenn  $f^{(n)}(x)$  in  $x = x_0$  stetig ist. Für allgemeinere Fälle vgl. etwa Stieltjes, *Oeuvres* 1, 33, 47, 61, 67; E. Hopf, *Diss.*, Berlin 1926.

Im *komplexen Gebiet* hat man

$$f(x_0 x_1 \dots x_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - x_0)(z - x_1) \dots (z - x_n)},$$

wenn die Integrationskurve  $C$  die Punkte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  umschließt und  $f(z)$  in dem von  $C$  umschlossenen Gebiete und auf  $C$  regulär analytisch ist.

Bei *äquidistanten* Argumenten

$$x_0 = a, x_1 = a + \omega, \dots, x_n = a + n\omega$$

reduzieren sich die Steigungen wesentlich auf *Differenzen*:

$$f(x_0 x_1 \dots x_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{\omega}^n f(x),$$

wobei als Differenzen mit Nörlund die gewöhnlich Differenzenquotienten genannten Ausdrücke

$$\begin{aligned}\Delta_{\omega} f(x) &= \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}, \\ \Delta_{\omega}^2 f(x) &= \frac{\Delta_{\omega} f(x+\omega) - \Delta_{\omega} f(x)}{\omega}, \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_{\omega}^n f(x) &= \Delta_{\omega} \left( \Delta_{\omega}^{n-1} f(x) \right)\end{aligned}$$

erklärt sind. Vorteil der Nörlundschen Definition:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Delta_{\omega} f(x) = \frac{d}{dx} f(x);$$

als Grenzfall der Differenzenrechnung erscheint die Differentialrechnung, vgl. S. 1224, 1230, ferner Walther, *Math.-Ver.* **34**, 118 (1925).  $\omega$  heißt die *Spanne*,  $n$  die *Ordnung*. Zweckmäßig setzt man noch

$$\begin{aligned}\Delta_1 f(x) &= \Delta f(x) = f(x+1) - f(x); \\ \Delta_{-1} f(x) &= \bar{\Delta} f(x) = f(x) - f(x-1).\end{aligned}$$

Allgemeiner definiert Nörlund unter Einführung verschiedener Spannen  $\omega_1, \omega_2, \dots$  die Differenzen durch die Gleichungen

$$\Delta_{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n}^n f(x) = \Delta_{\omega_n} \left( \Delta_{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}}^{n-1} f(x) \right) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \Delta^0 f(x) = f(x).$$

Anordnung der Differenzen im *Differenzenschema* (analog im allgemeinen Falle *Steigungenschema*):

$$\begin{array}{ccccccc} a - 2\omega & f(a - 2\omega) & \Delta_{\omega} f(a - 2\omega) & \Delta_{\omega}^2 f(a - 2\omega) & \Delta_{\omega}^3 f(a - 2\omega) & \Delta_{\omega}^4 f(a - 2\omega) & \\ a - \omega & f(a - \omega) & \Delta_{\omega} f(a - \omega) & \Delta_{\omega}^2 f(a - \omega) & \Delta_{\omega}^3 f(a - \omega) & & \\ a & f(a) & \Delta_{\omega} f(a) & \Delta_{\omega}^2 f(a) & \Delta_{\omega}^3 f(a) & & \\ a + \omega & f(a + \omega) & \Delta_{\omega} f(a + \omega) & \Delta_{\omega}^2 f(a) & & & \\ a + 2\omega & f(a + 2\omega) & \Delta_{\omega} f(a + 2\omega) & & & & \end{array}$$

Für praktische Anwendungen wird die Division durch  $\omega$  oft besser vermieden und das Differenzenschema in folgender Form von Gauß-Encke-Bruns-Runge angegeben (Encke, *Berliner Astr. Jahrb.* **62** für 1837, 251 (1835), *Ges. Abh.* **1**, 21; Bruns, *Grundlinien d. wiss. Rechnens*, 18, Leipzig 1903; Runge-König, *Numerisches Rechnen*, 249):



$a - 2\omega$	$f_{-2}$	$(-\frac{3}{2}, 1)$		
$a - \omega$	$f_{-1}$	$(-\frac{1}{2}, 1)$	$(-1, 2)$	
$a$	$f_0$	$(+\frac{1}{2}, 1)$	$(0, 2)$	$(-\frac{1}{2}, 3)$
$a + \omega$	$f_1$	$(+\frac{3}{2}, 1)$	$(+1, 2)$	$(+\frac{1}{2}, 3)$
$a + 2\omega$	$f_2$			$(0, 4)$

Die erste Zahl in  $(m, n)$  kennzeichnet die Zeile, die zweite die Spalte (Ordnung der Differenz); die Ausdrücke

$$(m, n) = (m + \frac{1}{2}, n - 1) - (m - \frac{1}{2}, n - 1)$$

entstehen auseinander durch einfache Subtraktionen. Zweckmäßig schreibt man noch  $f(a + m\omega) = (m, 0)$  und füllt die leeren Plätze des Differenzenschemas durch die Mittelwerte

$$(m + \frac{1}{2}, n) = \frac{1}{2} [(m + 1, n) + (m, n)]$$

aus. Andere Bezeichnungen aus der Fülle der vorhandenen sind z. B.  $(m, n) = \delta^n f_m$ ,  $(m + \frac{1}{2}, n) = \mu \delta^n f_{m + \frac{1}{2}}$  (central-difference notation, Sheppard, Lond. M. S. Proc. (1) **31**, 449 (1900));  $\triangle$  statt  $\delta$  (Joffe, Trans. Actuarial S. Am. **18**, 72 (1917));  $\nabla f(x)$

$= \frac{f(x + \omega) + f(x)}{2}$  (Nörlund);  $\square f(x) = \frac{f(x + \frac{1}{2}) + f(x - \frac{1}{2})}{2}$  (Thiele, Interpolationsrechnung, Leipzig 1909);  $E^\omega f(x) = f(x + \omega)$ ;  $\nabla f(x) = f(x) - f(x - 1)$ .

Über reziproke Differenzen vgl. Thiele, Kopenh. Ber., 153 (1906), Interpolationsrechnung; Nörlund, Differenzenrechnung, Kap. 15.

Symbolische Methoden (vor allem von hohem heuristischem Werte) bei Boole, Calculus of finite differences, Cambridge 1860, 3. Aufl. London 1880; Thiele, Interpolationsrechnung; Steffensen, Interpolationslaere, Interpolation.<sup>1)</sup>

1) Z. B. gewinnt man die expliziten Ausdrücke der Differenzen durch die Funktionswerte

$$(1) \quad \Delta_{\omega}^n f(x) = \omega^{-n} \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} f(x + \nu\omega)$$

und der Funktionswerte durch die Differenzen

$$(2) \quad f(x + n\omega) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \omega^{\nu} \Delta_{\omega}^{\nu} f(x)$$

Die Differenzenbildung ist besonders einfach für die *Faktorielle*  $x(x - \omega) \cdots (x - (n - 1)\omega)$  (verschiedene abkürzende Bezeichnungen gebräuchlich), die *Fakultät*  $[x(x + \omega) \cdots (x + (n - 1)\omega)]^{-1}$

und die Funktion  $(1 + \omega)^{\frac{x}{\omega}}$  (Analogon der Exponentialfunktion), vgl. Schneider, *Math. Schwingungslehre*, 173, Berlin 1924. Die Differenzen der Potenz  $x^n$  mit der Spanne 1 (ihren Zusammenhang mit Nörlundschen verallgemeinerten Bernoullischen Polynomen s. S. 1220)

für  $x = 0$  schreibt man namentlich in England in der Form  $\Delta^v 0^n$ ;

Rekursionsformel für diese Zahlen  $\Delta^v 0^n = v(\Delta^{v-1} 0^{n-1} + \Delta^{v-1} 0^{n-1})$ ; sie heißen bis auf Zahlenfaktoren auch *Fakultätenkoeffizienten* oder nach Nielsen (*Handbuch d. Theorie d. Gammafunktion*, Leipzig 1906) *Stirlingsche Zahlen 2. Art*. Die *Stirlingschen Zahlen 1. Art* sind bis auf Zahlenfaktoren die Koeffizienten in der Taylorsche Entwicklung der Faktoriellen  $x(x - 1) \cdots (x - n + 1)$  um  $x = 0$  herum; man setzt auch

$$x(x - 1) \cdots (x - n + 1) = \sum_{v=1}^n \frac{D^v 0^{(n)}}{v!} x^v.$$

Über *Bernoullische Polynome* (Polynome, deren Differenzen wesentlich die Potenzen von  $x$  sind) s. S. 1217 ff.

Eine *Differenzengleichung* für eine Funktion  $f(x)$  ist eine möglicherweise auch die unabhängige Veränderliche  $x$  explizit

symbolisch so: Man schreibt

$$\omega \Delta_{\omega} f(x) = E^{\omega} f(x) - f(x) = (E^{\omega} - 1) f(x)$$

und hat hiernach symbolisch  $\omega \Delta_{\omega} = E^{\omega} - 1$ ,  $E^{\omega} = 1 + \omega \Delta_{\omega}$ .

Durch Anwendung des binomischen Satzes

$$\omega^n \Delta_{\omega}^n = (E^{\omega} - 1)^n = (-1)^n \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} E^{v\omega}$$

und durch „Multiplikation“ mit  $f(x)$  ergibt sich (1); entsprechend gelangt man zu (2).

Oder dem Taylorsche Satze

$$f(x + \omega) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\omega^v}{v!} D^v f(x)$$

(mit  $Df(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ) gibt man die symbolische Gestalt  $E^{\omega} = e^{\omega D}$ .

Weitere schöne Beispiele für symbolische Methoden liefern die Gregory-Newtonsche Formel zur numerischen Differentiation (S. 1199) und die Euler-Maclaurinsche Summenformel (S. 1206 f.).

enthaltende Beziehung zwischen einer Funktion  $f(x)$  und einer Anzahl von Differenzen verschiedener Ordnung von  $f(x)$ ; bei gleichen Spannen hat sie also die Gestalt

$$\Phi\left(x, f(x), \triangle_{\omega} f(x), \dots, \triangle_{\omega}^n f(x)\right) = 0$$

und kann auch als Beziehung zwischen aufeinanderfolgenden Funktionswerten

$$\Psi(x, f(x), f(x + \omega), \dots, f(x + n\omega)) = 0$$

geschrieben werden. Die Differenzengleichung heißt *von der  $n$ -ten Ordnung*, wenn  $f(x)$  und  $f(x + n\omega)$  wirklich vorkommen; sie heißt *linear*, wenn sie linear in  $f(x), f(x + \omega), \dots, f(x + n\omega)$  ist. Lineare Differenzengleichungen s. S. 1229 ff. Über *nichtlineare Differenzengleichungen* vgl. Nörlund, *Enzykl.* II C 7, 705 (Arbeiten von Picard, Levi, Lattès und Horn), ferner Cherry, *Cambr. Phil. S. Proc.* **21**, 711 (1923); über *Iteration* Cremer, *Math.-Ver.* **33**, 185 (1925); Fatou, *Bull. Soc. M.* **47**, 161 (1919), **48**, 33, 208 (1920), *J. de Math.* (9) **2**, 343 (1923), (9) **3**, 1 (1924); Julia, *J. de Math.* (8) **4**, 47 (1918), *Ann. éc. norm.* (3) **36**, 93 (1919), (3) **37**, 165 (1920), (3) **38**, 165 (1921), (3) **39**, 131 (1922), (3) **40**, 97 (1923); Ritt, *Trans. Am. M. S.* **21**, 348 (1920), **25**, 399 (1923).

## § 2. Interpolation.

Das *Problem der Interpolation* ist allgemein gesprochen folgendes: man weiß etwas über eine Funktion an gewissen Stellen, den Interpolationsstellen, und wünscht Aussagen über irgend etwas mit der Funktion Zusammenhängendes an denselben oder an anderen Stellen. Einfachster Fall: man kennt die Werte  $f_0, f_1, \dots, f_n$  einer Funktion  $f(x)$  an  $(n + 1)$  *Interpolationsstellen*  $x_0, x_1, \dots, x_n$  und sucht einen Näherungswert für  $f(x)$  an der Stelle  $x$ . Mit

$$\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

gelten identisch die *Newtonsche Interpolationsformel* (Newton, *Principia*, 3. Buch, 5. Hilfssatz, London 1687)

$$(1) \quad f(x) = \sum_{v=0}^n (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{v-1}) f(x_0 x_1 \dots x_v) \\ + \psi(x) f(x_0 x_1 \dots x_n x)$$

und die *Waring-Lagrangesche Interpolationsformel* (Waring, *Phil. Trans.* **69**, 59 (1779); Lagrange 1795, *Œuvres* **7**, 284)

$$(2) \quad f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{\psi(x)}{(x-x_v)\psi'(x_v)} f_v + \psi(x)f(x_0x_1\dots x_nx).$$

Das erste Glied rechts in (1) und (2) ist das eindeutig bestimmte Polynom  $n$ -ten Grades (*Interpolationspolynom*)  $\varphi(x)$ , welches für  $x_0, x_1, \dots, x_n$  gleich  $f_0, f_1, \dots, f_n$  wird. Der an zweiter Stelle stehende, außerordentlich zweckmäßige Ausdruck des *Restgliedes* mittels einer Steigung rührt von Ampère, *Ann. de Math. (Gergonne)* **16**, 329 (1825/26) her. Aus ihm ergibt sich bei

$$\bar{B} \leq x_0, x_1, \dots, x_n, x \leq B$$

vermöge des Zusammenhanges von Steigungen und Ableitungen die bei Cauchy, *C. R.* **11**, 775 (1840) auftretende Form des Restgliedes

$$\psi(x) \frac{f^{(n+1)}(\Xi)}{(n+1)!} \quad (\bar{B} < \Xi < B),$$

in der  $f(x)$  für  $\bar{B} \leq x \leq B$  als  $(n+1)$ -mal differenzierbar vorausgesetzt ist.

Wenn das Restglied für alle  $x$  eines gewissen Intervalls hinreichend klein ausfällt, kann in diesem  $f(x)$  näherungsweise durch das nach Anlegung des Steigungenschemas sehr einfach zu bildende Newtonsche Näherungspolynom ersetzt werden, womit das Interpolationsproblem gelöst ist.

*Zusammenrücken von Interpolationsstellen* bedeutet, daß an der betreffenden Stelle die Werte nicht nur von  $f(x)$  selbst, sondern auch von gewissen *Ableitungen* von  $f(x)$  gegeben sind (*oskulierende Interpolation*), Markoff, *Differenzenrechnung*, Leipzig 1896, Kap. 1. Beim Zusammenfallen aller Interpolationsstellen in einem Punkte liefert (1) den *Taylorischen Satz* mit dem Lagrangeschen Restglied. Prinzipielle Erörterungen hierzu bei Klein, *Elementarmathematik* **1**, 241, 3. Aufl., Berlin 1924.

Bei *äquidistanten Argumenten*

$$x_0 = a, x_1 = a + \omega, \dots, x_n = a + n\omega$$

entsteht aus (1) mit  $x = a + t\omega$  die *Gregory-Newtonsche Formel*

$$\begin{aligned} f(a + t\omega) &= \sum_{v=0}^n \binom{t}{v} \omega^v \Delta_v f(a) \\ &+ \binom{t}{n+1} (n+1)! \omega^{n+1} f(a, a + \omega, \dots, a + n\omega, a + t\omega) \end{aligned}$$

(Gregory 1670). Weitere ähnliche Interpolationsformeln (*Zentraldifferenzenformeln*, z. T. schon bei Newton, *Methodus differentialis*, London 1711, aber meist nach anderen Mathematikern benannt) kommen zustande, wenn auch die Funktionswerte  $f_{-1}$ ,  $f_{-2}$ , ... für  $x = a - \omega$ ,  $a - 2\omega$ , ... gegeben sind (vgl. das Differenzenschema S. 1192; besonders durchsichtige Herleitung an Hand der Bewegungen im Differenzenschema bei Runge-König, *Numerisches Rechnen*, 108):

$$\begin{aligned} \text{(G)} \quad f(a + t\omega) &= \sum_{v=0}^n \binom{t+v-1}{2v} (0, 2v) + \sum_{v=1}^n \binom{t+v-1}{2v-1} \left(\frac{1}{2}, 2v-1\right) + R \\ &= \sum_{v=0}^n \binom{t+v-1}{2v} (0, 2v) + \sum_{v=1}^{n+1} \binom{t+v-1}{2v-1} \left(\frac{1}{2}, 2v-1\right) + \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

$$\text{(\bar{G})} \quad f(a + t\omega) = \sum_{v=0}^n \binom{t+v}{2v} (0, 2v) + \sum_{v=1}^n \binom{t+v-1}{2v-1} \left(-\frac{1}{2}, 2v-1\right) + R.$$

$$\begin{aligned} \text{(S)} \quad f(a + t\omega) &= \sum_{v=0}^n \frac{t^2(t^2-1^2) \cdots (t^2-(v-1)^2)}{(2v)!} (0, 2v) \\ &\quad + \sum_{v=1}^n \frac{t(t^2-1^2) \cdots (t^2-(v-1)^2)}{(2v-1)!} (0, 2v-1) + R, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad f\left(a + \frac{\omega}{2} + u\omega\right) &= \sum_{v=0}^n \frac{(u^2 - (\frac{1}{2})^2) \cdots (u^2 - (v - \frac{1}{2})^2)}{(2v)!} \left(\frac{1}{2}, 2v\right) \\ &\quad + \sum_{v=1}^{n+1} \frac{u(u^2 - (\frac{1}{2})^2) \cdots (u^2 - (v - \frac{3}{2})^2)}{(2v-1)!} \left(\frac{1}{2}, 2v-1\right) + \hat{\mathfrak{R}} \end{aligned}$$

$$\text{(E)} \quad f(a + t\omega) = \sum_{v=0}^n \binom{1-t+v}{2v+1} (0, 2v) + \sum_{v=0}^n \binom{t+v}{2v+1} (1, 2v) + \mathfrak{R},$$

$$\begin{aligned} \text{(St)} \quad f(a + t\omega) &= f(a) - \sum_{v=1}^n \binom{-t+v}{2v} \left(-\frac{1}{2}, 2v-1\right) \\ &\quad + \sum_{v=1}^n \binom{t+v}{2v} \left(\frac{1}{2}, 2v-1\right) + R. \end{aligned}$$

Es werden benutzt: bei den *beiden Gaußschen Formeln nach vorwärts und rückwärts*, (G) und ( $\bar{G}$ ), die Differenzen auf *Zickzacklinien nach abwärts und aufwärts* von  $f_0$  aus, bei der *Stirlingschen Formel* (S) die Differenzen und Mittelwerte auf einer *Horizontalen* von  $f_0$  aus, bei der *Besselschen Formel* (B) die Differenzen und Mittelwerte auf einer *Horizontalen* von  $f_{\frac{1}{2}}$  aus, bei der *Everettschen Formel* (E) die Differenzen *gerader Ordnung* auf den *beiden Horizontalen* durch  $f_0$  und  $f_1$ , bei der *Steffensenschen Formel* (St) die Differenzen *ungerader Ordnung* auf den *beiden Horizontalen* durch  $\Delta f_{-1}$  und  $\Delta f_0$ .

Die *Restglieder*  $R$  und  $\mathfrak{R}$  haben die Werte

$$= \binom{t+n}{2n+1} \omega^{2n+1} (2n+1)! f(a, a+\omega, a-\omega, \dots, a+n\omega, a-n\omega, a+t\omega)$$

$$= \binom{t+n}{2n+2} \omega^{2n+1} (2n+2)! f(a, a+\omega, a-\omega, \dots, a+n\omega, a-n\omega, a+(n+1)\omega, a+t\omega).$$

$\widetilde{\mathfrak{R}}$  geht aus  $\mathfrak{R}$  hervor, wenn  $u + \frac{1}{2}$  statt  $t$  geschrieben wird.

Die Stirlingsche Formel empfiehlt sich zur Interpolation in der beiderseitigen Umgebung des Punktes  $t = 0$ , d. h. des Wertes  $f_0$ , die Besselsche Formel zur Interpolation in der Umgebung des Punktes  $u = 0$ , welcher der Mitte des Intervalls  $a \dots a + \omega$  entspricht. Insbesondere entsteht für  $u = 0$  die Formel zur *Interpolation in die Mitte* (zur Halbierung des Tafelintervalls):

$$f\left(a + \frac{\omega}{2}\right) = \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu}} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu} \nu!^2} \left(\frac{1}{2}, 2\nu\right) + \widetilde{\mathfrak{R}}_0$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 0\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}, 2\right) + \frac{3}{128} \left(\frac{1}{2}, 4\right) - \frac{5}{1024} \left(\frac{1}{2}, 6\right) + \dots + \widetilde{\mathfrak{R}}_0.$$

Soll die praktische Anwendung der Interpolationsformeln, welche auf der näherungsweisen Ersetzung von  $f(x)$  durch das Interpolationspolynom beruht, wissenschaftlich gerechtfertigt sein, so muß eine *Abschätzung des Restgliedes* vorgenommen werden. Allgemeine Untersuchungen in dieser Richtung über *Pseudokonvergenz* von Interpolationsformeln rühren von Steffensen her, *Skand. Aktuarietidskr.* 18, 185 (1923), *Interpolationslaere, Interpolation*. Vgl. ferner Lehmann, *Mat. Kongr. København* 1925, 375. Z. B. ist die Stirlingsche Formel pseudokonvergent, d. h. das Restglied ist absolut kleiner als das letzte berücksichtigte Glied und von entgegengesetztem Zeichen, auch absolut kleiner als das erste vernachlässigte Glied und von gleichem Zeichen,



wenn im Intervall  $a - (n+1)\omega \dots a + (n+1)\omega$  die Ableitungen  $f^{(2n+1)}(x)$  und  $f^{(2n+3)}(x)$  stetig sind und gleiches, unveränderliches Zeichen haben.

Bei unbegrenzter Vermehrung der Gliederzahl von Interpolationspolynomen entstehen die *Interpolationsreihen*, vgl. S. 1210 ff. Die Konvergenz dieser Reihen hat mit der Pseudokonvergenz der entsprechenden Interpolationsformeln nichts zu tun. Z. B. ist die Stirlingsche Formel für  $f(x) = \log x$  bei positivem  $x$  pseudokonvergent, die Stirlingsche Reihe divergent.

Über die *vergleichsweise Genauigkeit* der Interpolationsformeln vgl. Bruns, *Grundlinien des wiss. Rechnens*, 44, über den Einfluß der *Abrundungsfehler* bei den gegebenen Funktionswerten Bruns, a. a. O., 15; Thiele, *Interpolationsrechnung*, 37; Sheppard, *Lond. M. S. Proc.* (2) 4, 320 (1907), (2) 10, 139 (1912).

Über „beste“ *Interpolation* auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate s. S. 1205, über *Interpolation bei Funktionen von mehreren Veränderlichen* Steffensen, *Skand. Aktuarietidskr.*, 18 (1923), *Interpolationslaere*, § 19, *Interpolation*, § 19; Neder, *Math. Ztschr.* 24, 759 (1926), über *Interpolation durch Kettenbrüche* Thiele, *Kopenh. Ber.*, 153 (1906), *Interpolationsrechnung*; Nörlund, *Differenzenrechnung*, Kap. 15, über *Interpolation durch gebrochene rationale Funktionen* Cauchy, *Œuvres* (2) 3, 429.

### § 3. Numerische Differentiation.

Wenn  $x$  nicht im Inneren des durch die Interpolationsstellen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  bestimmten Intervalls liegt, darf die Newtonsche Interpolationsformel

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \psi_{v-1}(x) f(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_v) + \psi_n(x) \frac{f^{(n+1)}(\Xi)}{(n+1)!},$$

$$\psi_v(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_v), \psi_{-1}(x) = 1, \bar{B} < \Xi < B$$

so differenziert werden, als ob  $f^{(n+1)}(\Xi)$  eine Konstante wäre:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{v=m}^n \psi_{v-1}^{(m)}(x) f(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_v) + \psi_n^{(m)}(x) \frac{f^{(n+1)}(\Xi)}{(n+1)!}$$

(wobei freilich  $\Xi$  seine Lage im Intervall  $\bar{B} < \Xi < B$  möglicherweise ändert). Der an erster Stelle stehende Ausdruck kann bei gehöriger Untersuchung des Restgliedes zur näherungsweisen Berechnung der Ableitung  $f^{(m)}(x)$  dienen, wenn die

Werte  $f_0, f_1, \dots, f_n$  der Funktion  $f(x)$  an den Stellen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  gegeben sind (*numerische Differentiation*). Markoff, *Differenzrechnung*, Kap. 3; Steffensen, *Skand. Aktuarietidskr.*, 190 (1923), *Interpolationslaere*, § 7, *Interpolation*, § 7; vgl. auch R. Rothe, *Math. Ztschr.* **9**, 300 (1921); v. Szász, *Math. Ztschr.* **25**, 116 (1926); E. Hopf, *Diss.*, Berlin 1926. Zweckmäßige Anlage der Rechnung bei Whittaker-Robinson, *Calculus of observations*, 65.

Formeln für äquidistante Argumente:

a) nach der Gregory-Newtonschen Formel

$$\omega^m f^{(m)}(a) = \sum_{\nu=0}^{n-m} c_\nu^{(m)} \omega^{m+\nu} \Delta_{\omega} f(a) + \text{Restglied},$$

wobei die  $c_\nu^{(m)}$  im wesentlichen die  $m$ -ten Ableitungen der Faktoriellen  $t(t-1) \cdots (t-\nu+1)$  für  $t=0$  sind, als Koeffizienten in der Entwicklung der „erzeugenden Funktion“

$$\left( \frac{\log(1+u)}{u} \right)^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(m)} u^\nu \quad (|u| < 1)$$

auftreten und mit Nörlundschen verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen zusammenhängen  $\left( c_\nu^{(m)} = \frac{m B_\nu^{(m+\nu)}}{\nu! (m+\nu)} \right)$ . Insbesondere gilt

$$\omega f'(a) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} \omega^{\nu+1} \Delta_{\omega} f(a) + \frac{(-1)^n \omega^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

( $\xi$  zwischen  $a$  und  $a+n\omega$ ).

b) nach der Stirlingschen und Besselschen Formel z. B.

$$\omega^{2m} f^{(2m)}(a) = 2m \sum_{\nu=0}^{n-m} \frac{D_{2\nu}^{(2m+2\nu)}}{2^{2\nu} (2\nu)! (2m+2\nu)} (0, 2m+2\nu) + R_0^{(2m)},$$

$$\omega^{2m+1} f^{(2m+1)} \left( a + \frac{\omega}{2} \right)$$

$$= (2m+1) \sum_{\nu=0}^{n-m} \frac{D_{2\nu}^{(2m+1+2\nu)}}{2^{2\nu} (2\nu)! (2m+1+2\nu)} \left( \frac{1}{2}, 2m+1+2\nu \right) + \tilde{R}_0^{(2m+1)};$$

die erzeugende Funktion der auftretenden Koeffizienten heißt

$$\left( \frac{\text{Ur Sin } \frac{u}{2}}{u} \right)_2^k = k \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{D_{2\nu}^{(k+2\nu)}}{2^{2\nu} (2\nu)! (k+2\nu)} u^{2\nu} \quad (|u| < 2).$$

Insbesondere gilt nach Stirling

$$\omega f'(a) = (0,1) - \frac{1}{6} (0,3) + \frac{1}{30} (0,5) - \frac{1}{140} (0,7) + \text{Restglied},$$

$$\omega^2 f''(a) = (0,2) - \frac{1}{12} (0,4) + \frac{1}{90} (0,6) - \frac{1}{560} (0,8) + \text{Restglied},$$

nach Bessel

$$\omega f'\left(a + \frac{\omega}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) - \frac{1}{24} \left(\frac{1}{2}, 3\right) + \frac{3}{640} \left(\frac{1}{2}, 5\right) - \frac{5}{7168} \left(\frac{1}{2}, 7\right) + \text{Restglied}.$$

Für *Pseudokonvergenz* vgl. Steffensen, *Skand. Aktuarietidskr.*, 190 (1923); für numerische Differentiation und Integration von *Interpolationsreihen*, Darstellung der Koeffizienten und Zahlenangaben über sie Nörlund, *Ann. éc. norm.* (3) 40, 35 (1923), *Differenzenrechnung*, 240, 461.

#### § 4. Numerische Integration.

Mit diesem Namen oder mit dem Namen *mechanische Quadratur* bezeichnet man Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung des bestimmten Integrals  $\int_a^b f(x) dx$ , wobei die Werte von  $f(x)$  an den Stellen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  als bekannt vorausgesetzt werden. Man unterscheidet zwei große Gruppen von Methoden: *Mittelwertmethoden* und *Methoden der Trapezverbesserung*. Hübsche Zusammenstellung wichtiger Originalarbeiten mit Anmerkungen bei A. Kowalewski, *Newton, Cotes, Gauß, Jacobi*, Leipzig 1917; ausführliche Angaben über die sehr zerstreute und unübersichtliche Literatur bei Runge-Willers, *Enzykl.* II C 2.

##### A. Mittelwertmethoden.

Aus der Lagrangeschen Interpolationsformel entsteht durch Integration zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{\nu=0}^n h_{\nu}^{(n)} f_{\nu} + \int_a^b \psi(x) f(x_0 x_1 \dots x_n x) dx$$

mit

$$h_v^{(n)} = \int_a^b \frac{\psi(x)}{(x - x_v) \psi'(x_v)} dx, \quad \sum_{v=0}^n h_v^{(n)} = b - a.$$

Bis auf das Restglied kann  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  aufgefaßt werden

als *gewogenes Mittel*  $\frac{\sum_{v=0}^n h_v^{(n)} f_v}{\sum_{v=0}^n h_v^{(n)}}$  der  $f_v$  mit den Gewichten  $h_v^{(n)}$ ; da-

her „*Mittelwertmethode*“. Für die Wahl der Interpolationsstellen  $x_v$  und der Gewichte  $h_v^{(n)}$  bestehen wesentlich *drei Möglichkeiten*:

1. *äquidistante Interpolationsstellen*: Cotesische Formeln;

2. *alle Gewichte  $h_v^{(n)}$  gleich groß*, wodurch, wenn die  $f_v$  mit gleichem mittlerem Beobachtungsfehler behaftet sind, der mittlere Fehler des Ausdrucks  $\sum_{v=0}^n h_v^{(n)} f_v$  möglichst klein wird: *Methode von Tschebyscheff*;

3. *Festlegung der Interpolationsstellen  $x_v$  und damit der Gewichte  $h_v^{(n)}$  derart, daß das Integral durch den Näherungs- ausdruck „möglichst gut“ dargestellt wird*: Verfahren von Gauß.

### 1. Cotesische Formeln.

Es sei

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \omega, \dots, \quad x_n = a + n\omega = b,$$

so daß die Interpolationsstellen in die Enden der  $n$  Teilintervalle von der Länge  $\omega$  der Integrationsstrecke  $a \dots b$  fallen, und  $x = a + t\omega$ . Dann wird

$$h_v^{(n)} = \omega \frac{(-1)^{n-v}}{v! (n-v)!} \int_0^n \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{t-v} dt = \omega H_v^{(n)},$$

$$\int_a^b f(x) dx = \omega \sum_{v=0}^n H_v^{(n)} f_v + \text{Restglied}.$$

Die „Cotesischen Koeffizienten“  $H_\nu^{(n)}$  haben die Symmetrieeigenschaft  $H_\nu^{(n)} = H_{n-\nu}^{(n)}$  und die Summe  $\sum_{\nu=0}^n H_\nu^{(n)} = n$ . Von Cotes selbst (*De methodo differentiali Newtoniana*, Cambridge 1722) wurden die Zahlen  $\frac{1}{n} H_\nu^{(n)}$  für  $n = 1$  bis  $n = 10$  angegeben, wiederabgedruckt z. B. bei Markoff, *Differenzenrechnung*, 61 und *Rep. I*, 524.

Untersuchung des Restgliedes völlig befriedigend erst bei Steffensen, *Skand. Aktuarietidskr.*, 201 (1921), *Interpolationslaere*, § 16, *Interpolation*, § 16; im einfachsten Falle eines geraden  $n = 2m$  ergibt sich für das Restglied der Ausdruck

$$2\omega^{2m+3} \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \int_0^m t^2 (t^2 - 1^2) \cdots (t^2 - m^2) dt,$$

wenn  $f^{(2m+2)}(x)$  im abgeschlossenen Intervall  $a \dots b$  stetig ist und  $\xi$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt. Für ungerades  $n$  vgl. Steffensen, *Interpolationslaere*, § 16, *Interpolation*, § 16.

Die einfachsten Fälle der Cotesischen Formeln sind die *Trapezregel*

$$\int_a^{a+\omega} f(x) dx = \frac{\omega}{2} (f_0 + f_1) - \frac{\omega^3}{12} f''(\xi)$$

und die *Simpsonsche Regel*

$$\int_a^{a+2\omega} f(x) dx = \frac{\omega}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{\omega^5}{90} f^{IV}(\xi)$$

(Simpson 1743, schon bei Cavalieri 1639 und Gregory 1668) mit einfacher geometrischer Deutung der Näherungsausdrücke.

Für ähnliche Formeln, bei denen statt der Funktionswerte in den Endpunkten der Teilintervalle solche in den Mitten der Teilintervalle benutzt werden, vgl. Walther, *Skand. Aktuarietidskr.*, 148 (1925). Am bekanntesten die *Tangentenregel*

$$\int_a^{a+\omega} f(x) dx = \omega f_{\frac{1}{2}} + \frac{\omega^3}{24} f''(\xi).$$

Es ist möglich, daß die Anwendung der Cotesischen Formeln ohne Berücksichtigung des Restgliedes völlig falsche Ergebnisse liefert, vgl. Bruns, *Grundlinien des wiss. Rechnens*, 102. Einen Ausweg bietet das auch sonst empfehlenswerte Verfahren, ein großes Integrationsintervall  $A \dots B$  erst in Teilintervalle zu zerlegen und auf jedes von diesen eine Cotesische Formel anzuwenden. Beispielsweise nach der *Trapezregel*

$$\int_A^B f(x) dx = \frac{B-A}{2N} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{N-1} + f_N) - \frac{(B-A)^3}{12N^2} f''(\xi),$$

nach der *Simpsonschen Regel*

$$\int_A^B f(x) dx = \frac{B-A}{6N} \{f_0 + f_{2N} + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2N-2})\} - \frac{(B-A)^5}{2880N^4} f^{IV}(\xi),$$

wobei das Intervall  $A \dots B$  in  $N$  bzw.  $2N$  Teilintervalle zerlegt ist und die  $\xi$  in  $A \dots B$  liegen. Methoden zur *Abschätzung der Genauigkeit* durch Anwendung von *einfacher und doppelter Intervallanzahl* bei Runge-König, *Numerisches Rechnen*, 244.

## 2. Methode von Tschebyscheff.

Bei gleichen Gewichten  $h_\nu^{(n)} = \frac{b-a}{n+1}$  sind, wenn der Einfachheit halber die Integrationsgrenzen  $a = -1$ ,  $b = 1$  angenommen werden, die Interpolationsstellen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  die Wurzeln der Gleichung  $(n+1)$ ten Grades

$$\text{Polynombestandteil von } z^{n+1} e^{-(n+1)} \left( \frac{1}{2 \cdot 3 z^2} + \frac{1}{4 \cdot 5 z^4} + \dots \right) = 0,$$

vorausgesetzt, daß diese reell ausfallen. Tschebyscheff, *J. de Math.* (2) 19, 19 (1874), *Oeuvres* 2, 165. Bei dieser Methode sind noch manche Fragen offen.

## 3. Verfahren von Gauß.

Wählt man die Interpolationsstellen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  als die  $(n+1)$  Wurzeln der Gleichung

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}] = 0,$$



so wird  $f(x)$  für den Zweck der Integration von  $a$  bis  $b$  durch das entsprechende Interpolationspolynom  $\varphi(x)$  vom  $n$ -ten Grade so genau dargestellt wie durch ein Interpolationspolynom  $(2n+1)$ -ten Grades mit  $n+1$  weiteren ganz beliebigen Interpolationsstellen  $x_{n+1}, \dots, x_{2n+1}$ , d. h. es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{2n+1}) f(x_0 x_1 \dots x_{2n+1} x) dx.$$

Für  $a = -1$ ,  $b = 1$  ergeben sich wegen

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

als Interpolationsstellen die Nullstellen der  $(n+1)$ -ten Legendreschen Kugelfunktion  $P_{n+1}(x)$ . Gauß, *Commentat. Gott. rec.* 3, 39 (1816), *Werke* 3, 163.

Das Restglied kann durch die Annahme  $x_{n+1} = x_0$ ,  $x_{n+2} = x_1, \dots, x_{2n+1} = x_n$  in die Form

$$\frac{(n+1)!^4}{(2n+2)!^3 (2n+3)} (b-a)^{2n+3} f^{(2n+2)}(\xi)$$

mit einem  $\xi$  zwischen  $a$  und  $b$  gebracht werden. Die Interpolationsstellen brauchen zur Beherrschung aller Intervalle auf Grund der Transformation

$$x - a = (b - a)t$$

nur für das spezielle Intervall  $0 \dots 1$  und die Gleichung

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [t^{n+1}(1-t)^{n+1}] = 0$$

berechnet zu werden, Gauß, a. a. O., *Rep.* I<sub>1</sub>, 525; dort findet man auch die Gaußschen Gewichte  $G_v^{(n)}$  für die Schlußformel der Gaußschen Methode

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{v=0}^n G_v^{(n)} f_v + \frac{(n+1)!^4}{(2n+2)!^3 (2n+3)} (b-a)^{2n+3} f^{(2n+2)}(\xi).$$

Über die praktische Anwendung der Gaußschen Methode vgl. Encke, *Berliner Astr. Jahrb.* 88 für 1863, 311 (1860), *Ges. Abh.* 1, 100.

Bei der Gaußschen Wahl der Interpolationsstellen wird übrigens die Funktion  $f(x)$  selbst durch das Interpolationspolynom  $\varphi(x)$  im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate in gewisser Weise möglichst gut dargestellt, nämlich so, daß in dem  $(b - a)$ -fachen mittleren Fehlerquadrat

$$\int_a^b \{f(x) - \varphi(x)\}^2 dx = \int_a^b \psi(x)^2 f(x_0 x_1 \dots x_n x)^2 dx$$

$$= \left\{ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right\}^2 \int_a^b \psi(x)^2 dx$$

der Faktor  $\int_a^b \psi(x)^2 dx$  möglichst klein wird.

#### B. Methoden der Trapezverbesserung.

Bei der *Trapezregel*

$$\int_a^{a+\omega} f(x) dx = \frac{\omega}{2} (f_0 + f_1) - \frac{\omega^3}{12} f''(\xi)$$

und bei der *Tangentenregel*

$$\int_a^{a+\omega} f(x) dx = \omega f_{\frac{1}{2}} + \frac{\omega^3}{24} f''(\xi)$$

wird das als Flächenstück der Kurve  $y = f(x)$  zwischen den Abszissen  $a$  und  $a + \omega$  deutbare bestimmte Integral angenähert durch das *Sehnentrapez*  $\frac{\omega}{2} (f_0 + f_1)$  oder das *Tangententrapez*  $\omega f_{\frac{1}{2}}$ . Wie man diese ersten Näherungen immer mehr verbessern kann, lehren die *Methoden der Trapezverbesserung*. Es ist sinnvoll, die Verbesserung nach Potenzen von  $\omega$  zu entwickeln. Als Koeffizienten dieser Potenzen können auftreten:

1. *Ableitungen von  $f(x)$* : Euler-Maclaurinsche Summenformel (in vielen Lehrbüchern mehr oder weniger vollständig behandelt);

2. die *Differenzen der Gregory-Newtonschen Formel*: Formel von Gregory-Laplace;

3. *Zentraldifferenzen*: Formeln von Gauß (diese sind besonders wichtig wegen ihrer Zweckmäßigkeit für die Praxis der numerischen Integration), Encke, *Berliner Astr. Jahrb.* **62** für 1837, 251 (1835), *Ges. Abh.* **1**, 21; Bruns, *Grundlinien d. wiss. Rechnens*, 68, 89; Runge-König, *Numerisches Rechnen*, 238, 249.

### 1. Euler-Maclaurinsche Summenformel

[Euler, *Comm. Petrop.* **6** für 1732/33, 68 (1738), **8** für 1736, 9 (1741); Maclaurin, *Treatise of fluxions* **2**, 672, Edinburgh 1742]

$$\frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} f(x) dx = f(a + h\omega) - \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \Delta_\omega f^{(\nu-1)}(a) \\ + \omega^m \int_0^1 \frac{\bar{B}_m(h-t)}{m!} f^{(m)}(a + t\omega) dt.$$

Als Näherungswert für  $\int_a^{a+\omega} f(x) dx$  dient also unter Einführung eines Parameters  $h$  mit  $0 \leq h \leq 1$  allgemein das durch die Ordinate  $f(a + h\omega)$  bestimmte Rechteck von der Breite  $\omega$ . Vorausgesetzt ist:  $\omega > 0$ ,  $f(x)$  für  $a \leq x \leq a + \omega$   $m$ -mal stetig differenzierbar, und es bedeuten

$B_\nu(x)$  das  $\nu$ -te Bernoullische Polynom (vgl. S. 1217 ff.)

$\bar{B}_m(x)$  die mit  $B_m(x)$  für  $0 \leq x < 1$  übereinstimmende periodische Funktion von der Periode 1 (vgl. S. 1218).

Literaturangaben über das *Restglied* bei Nörlund, *Differenzenrechnung*, 30; Burkhardt, *Enzykl.* II A 12, 1324; Runge-Willers, *Enzykl.* II C 2, 91.

Wichtigste Sonderfälle für  $h = 0$  und  $h = \frac{1}{2}$ , z. B. für  $h = 0$  (Trapezregel) bei Ersetzung von  $m$  durch  $2m$

$$\frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} f(x) dx = \frac{1}{2} (f_0 + f_1) - \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu} \Delta_\omega f^{(2\nu-1)}(a) \\ + \omega^{2m} \int_0^1 \frac{B_{2m}(t)}{(2m)!} f^{(2m)}(a + t\omega) dt \\ = \frac{1}{2} (f_0 + f_1) - \frac{\omega}{12} (f'_1 - f'_0) + \frac{\omega^3}{720} (f'''_1 - f'''_0) - \dots + \text{Restglied.}$$

Diese Darstellung ist *pseudokonvergent*, wenn  $f^{(2m)}(x)$  und  $f^{(2m+2)}(x)$  für  $a \leq x \leq a + \omega$  gleiches, nicht wechselndes Vorzeichen haben; Nörlund, *Acta Math.* **44**, 71 (1922); Steffensen, *Interpolationslaere*, § 14, *Interpolation*, § 14. Durch passende Zusammenfügung entsteht die meist gebrauchte Gestalt der Eulerschen Summenformel

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \int_a^{a+n\omega} f(x) dx &= \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \\ &- \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^{2\nu-1}}{(2\nu)!} B_{2\nu} \{ f^{(2\nu-1)}(a+n\omega) - f^{(2\nu-1)}(a) \} \\ &+ \omega^{2m} \int_0^1 \frac{\bar{B}_{2m}(t)}{(2m)!} f^{(2m)}(a+t\omega) dt \end{aligned}$$

(Zusammenhang zwischen Reihe und Integral; oft Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  leicht durchführbar).

Anwendungen z. B.

a) zur theoretischen und numerischen Untersuchung der Riemannschen Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\Re(s) > 1)$$

(man setze  $f(x) = x^{-s}$ ), Wirtinger, *Acta Math.* **26**, 255 (1902); Gram, *Kopenh. Overs.* 1895 (1895/96), 303, *Acta Math.* **27**, 289 (1903), *Copenh. Mém.* (8) **10**, 311 (1925); Lindelöf, *Acta Soc. sc. Fennicae* **31**, Nr. 3 (1903), *Acta Math.* **27**, 305 (1903), *Le calcul des résidus*, Paris 1905; Backlund, *Helsingfors Öfvers.* **54** A, Nr. 3 (1911/12), *Acta Math.* **41**, 345 (1918); Langer, *Diss.*, Leipzig 1921; bei Langer insbesondere Herleitung der Riemannschen Funktionalgleichung, der Transformationsformeln der Thetafunktionen und der Dedekindschen  $\eta$ -Funktion;

b) zur numerischen Berechnung der Eulerschen Konstanten  $\left(f(x) = \frac{1}{x}\right)$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right);$$

c) zur Untersuchung der *Gammafunktion*, vgl. S. 1228 f.;

d) zum Existenzbeweis beim *Summationsproblem*, Nörlund, *Acta Math.* **44**, 71 (1922), vgl. S. 1222;

e) zu *zahlentheoretischen Abschätzungen*, z. B. Landau, *Math. Ver.* **24**, 250 (1915); Wigert, *Math. Ztschr.* **5**, 310 (1919); van der Corput, *Math. Ann.* **84**, 53 (1921);

f) zum Studium der *Gaußschen Summen*, Weber, *Acta Math.* **27**, 225 (1903);

g) zur Gewinnung von *Konvergenzkriterien für Reihen*, Wirtinger, *Acta Math.* **26**, 255 (1902); Nörlund, *Acta Math.* **44**, 71 (1922).

Über die Eulersche Summenformel im allgemeinen und ihren Zusammenhang mit der durch komplexe Integration gewonnenen, im wesentlichen mit ihr identischen *Plana-Abelschen Summenformel* vgl. z. B. Lindelöf, *Le calcul des résidus* (auch geschichtliche Bemerkungen); über *Verallgemeinerungen der Eulerschen Summenformel*, in denen Bernoullische Polynome höherer Ordnung vorkommen, Nörlund, *Trans. Am. M. S.* **25**, 13 (1923), *Differenzenrechnung*, Kap. 6, § 6; Bochner, *Acta Math.* **51** (im Druck); über die der Eulerschen Formel verwandten *Formeln von Lubbock und Woolhouse* (statt des Integrals tritt eine Summe auf) Steffensen, *Interpolationslaere*, § 15, *Interpolation*, § 15; Whittaker-Robinson, *Calculus of observations*, 149; über die *Boolesche Summenformel* Nörlund, *Acta Math.* **44**, 71 (1922), *Differenzenrechnung*, Kap. 2, § 3, Kap. 6, § 6; Lindelöf, *Le calcul des résidus*.

## 2. Formel von Gregory-Laplace

$$\begin{aligned} \int_a^{a+\omega} f(x) dx &= \frac{\omega}{2} (f_0 + f_1) + \omega \sum_{v=2}^n \omega^v L_v \triangle_{\omega}^v f(a) + \omega^{n+2} L_{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \\ &= \frac{\omega}{2} (f_0 + f_1) - \frac{\omega^3}{12} \triangle_{\omega}^2 f(a) + \frac{\omega^4}{24} \triangle_{\omega}^3 f(a) + \dots + \text{Restglied.} \end{aligned}$$

Sie entsteht durch Integration der Gregory-Newtonschen Interpolationsformel;  $\xi$  liegt zwischen  $a$  und  $a + n\omega$ ; zur Abkürzung ist gesetzt

$$L_v = \int_0^1 \binom{t}{v} dt.$$

Eigenschaften dieser mit den Nörlundschen verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen (vgl. S. 1220 f.) zusammenhängenden Zahlen, asymptotisches Verhalten bei Steffensen, *Skand. Ak-tuarietidskr.*, 1 (1924), *Interpolationslaere*, § 12, *Interpolation*,

§ 12; vgl. auch Perron, *Math. Ann.* 87, 84 (1922). Erzeugende Funktion

$$\frac{u}{\log(1+u)} = \sum_{v=0}^{\infty} L_v u^v \quad (|u| < 1).$$

Hieraus Rekursionsformeln und Determinantendarstellungen. Durch Zusammenfügung entsteht

$$\begin{aligned} \int_a^{a+r\omega} f(x) dx &= \omega \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \cdots + f_{r-1} + \frac{1}{2} f_r \right) \\ &+ \sum_{v=2}^n \omega^v L_v \left( \Delta_{\omega}^{v-1} f_r - \Delta_{\omega}^{v-1} f_0 \right) + r \omega^{n+2} L_{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned}$$

mit einem  $\xi$  zwischen  $a$  und  $a + (n + r - 1)\omega$ , Gregory 1670; Laplace, *Mécanique céleste* 4, Paris 1805; Nörlund, *Ann. éc. norm.* (3) 40, 35 (1923).

### 3. Formeln von Gauß.

Sie wurden bekanntgemacht von Encke, *Berl. Astr. Jahrb.* 62 für 1837, 251 (1835) und ergeben sich durch Integration der Stirlingschen und Besselschen Interpolationsformel, z. B.

$$\begin{aligned} \int_{a-\omega}^{a+\omega} f(x) dx &= 2\omega \sum_{v=0}^n N_{2v}(0, 2v) + \int_{a-\omega}^{a+\omega} R dx \\ &= 2\omega \left\{ (0,0) + \frac{1}{6} (0,2) - \frac{1}{180} (0,4) + \frac{1}{1512} (0,6) + \cdots \right\} + \text{Restglied.} \end{aligned}$$

Zahlenangaben über die Koeffizienten in den Tafeln bei Nörlund, *Differenzenrechnung*, 461, über ihr asymptotisches Verhalten und über das Restglied bei Steffensen, *Skand. Aktuarietidskr.*, 1 (1924), *Interpolationslaere*, § 12, *Interpolation*, § 12. Erzeugende Funktion z. B. für die  $N_{2v}$

$$\frac{\frac{u}{2}}{\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{u}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{u}{2}\right)^2} = \sum_{v=0}^{\infty} N_{2v} u^{2v} \quad (|u| < 2).$$

Es mag ausdrücklich hervorgehoben werden, daß bei der praktischen numerischen Differentiation und Integration die Hauptarbeit zumeist in der Berechnung der Funktionswerte an



den Interpolationsstellen liegt; ihre Zusammenfügung zu den Näherungsausdrücken ist demgegenüber sehr einfach.

Über *numerische Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen* vgl. z. B. Runge-König, *Numerisches Rechnen*, Kap. 10; Runge-Willers, *Enzykl.* II C 2; Whittaker-Robinson, *Calculus of observations*, Kap. 14; Steffensen, *Skand. Aktuarietidskr.*, 20 (1922), *Interpolationslaere*, § 17, *Interpolation*, § 17; Störmer, *C. R. Congr. intern. Strasbourg* 1920, 243, *Norsk Mat. Tidskr.* 3, 121 (1921), Nyström, *Acta Soc. sc. Fennicae* 50, Nr. 13 (1925), über numerische Kubatur z. B. Runge-Willers, *Enzykl.* II C 2; Steffensen, *Interpolationslaere*, § 20, *Interpolation*, § 20.

### § 5. Interpolationsreihen

entstehen durch Erstreckung von Interpolationspolynomen ins Unendliche; vgl. für sie vor allem Nörlund, *Leçons sur les séries d'interpolation*, Paris 1926. Am bedeutsamsten sind die aus der Stirlingschen Interpolationsformel hervorgehende Stirlingsche Reihe

$$(1) \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + a'_n x) x(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2) \cdots (x^2 - n^2)$$

und die aus der Gregory-Newtonschen Interpolationsformel entspringende *Newtonsche Reihe* (Binomialkoeffizientenreihe)

$$(2) \quad \Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x-1}{n}.$$

Anwendungen der Interpolationsreihen z. B. in der Theorie der ganzzwertigen Funktionen bei Pólya, *Pal. Circ. mat.* 40, 1 (1915), *Gött. Nachr.*, 1 (1920); Carlson, *Math. Ztschr.* 11, 1 (1921). Für Differentiation und Integration von Interpolationsreihen (wichtig für numerische Differentiation und Integration) vgl. Nörlund, *Ann. éc. norm.* (3) 40, 35 (1923), für Anwendungen beim Summationsproblem Nörlund, *Acta Math.* 44, 71 (1922). Fälle, in denen sich die Interpolationsstellen der allgemeinen Newtonschen Interpolationsformel im Endlichen häufen, z. B. bei Hermite, *Œuvres* 2, 87; Runge, *Ztschr. Math. Phys.* 46, 224 (1901), *Theorie und Praxis der Reihen*, Leipzig 1904; Fejér, *Gött. Nachr.*, 319 (1918); Fekete, *Ztschr. f. angew. Math.* 6, 410 (1926).

a) Stirlingsche Reihe. Sie konvergiert gleichmäßig in jedem endlichen Gebiete, wenn sie für zwei Werte von  $x$  konvergent ist, die keine ganzen Zahlen oder Null sind, stellt also im Falle der Konvergenz immer eine ganze Funktion dar.

Es sei  $x = re^{iv}$ , ferner

$$\psi(v) = \pi \sin v \quad \text{für } \frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{3\pi}{4},$$

$$\psi(v) = \cos v \cdot \log(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2} \cos v)^2 + \sin v \cdot 2 \arcsin(\sqrt{2} \sin v)$$

$$\text{für } -\frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{\pi}{4}$$

und  $\psi(v)$  periodisch mit der Periode  $\pi$ , schließlich  $h(v) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |F(re^{iv})|}{r}$ . Dann ist  $h(v) \leq \psi(v)$ , wegen  $\psi(v) \leq \pi$  insbesondere  $h(v) \leq \pi$  eine notwendige und  $h(v) < \psi(v)$  eine hinreichende Konvergenzbedingung.

Schärfer gilt folgende hinreichende Konvergenzbedingung: Es sei  $F(x)$  eine ganze Funktion und bei hinreichend großem  $r$

$$(3) |F(x) - F(-x)| < r^{\beta_1} e^{r\psi(v)}, |F(x) + F(-x)| < r^{\beta_2} e^{r\psi(v)}.$$

Dann ist  $F(x)$  in eine Stirlingsche Reihe entwickelbar für  $\beta_1 < 0$ ,  $\beta_2 < 1$  und in eine absolut konvergente Stirlingsche Reihe für  $\beta_1 < -1$ ,  $\beta_2 < 0$ . Methode: Abschätzung des komplexen Restintegrals der Stirlingschen Reihe auf einer aus Lemniskate und Kreis zusammengesetzten Kurve, Nörlund, *Ann. éc. norm.* (3) **39**, 343 (1922), (3) **40**, 35 (1923).

Notwendige Konvergenzbedingungen von ganz ähnlicher Bauart können gewonnen werden durch Abschätzung der einzelnen Reihenglieder, Nörlund, *Bull. Soc. M.* **52**, 114 (1924) oder durch Integraldarstellungen für  $F(x)$  vom Typus

$$\int (t^{2x} \pm t^{-2x}) \varphi(t) \frac{dt}{t},$$

Nörlund, *Kopenh. Abh.* (8) **7**, Nr. 2, 211 (1924), dort auch eine mit der Stirlingschen Reihe zusammenhängende Reihentransformation analog zur Eulerschen Transformation.

b) Newtonsche Reihe. Das Konvergenzgebiet einer Newtonschen Reihe ist eine Halbebene  $\Re(x) = \sigma > \lambda$ . Die Gerade  $\sigma = \lambda$  heißt Konvergenzgerade. Die Konvergenzabszisse  $\lambda$  ist durch einen mittels der Koeffizienten  $a_n$  gebildeten  $\lim$  darstellbar.

$\lambda$  kann endlich sein,  $+\infty$  (dann hat man eine *nirgends*, mit selbstverständlicher Ausnahme der positiven ganzen Zahlen, *konvergente Newtonsche Reihe*) oder  $-\infty$  (*beständig konvergente Reihe*).

Das Gebiet *absoluter Konvergenz* ist eine *Halbebene*  $\sigma > \mu$ , wobei  $\mu$  den Ungleichungen  $\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1$  genügt; Möglichkeit eines *Streifens bedingter Konvergenz*.

*Gleichmäßige Konvergenz* liegt vor in jedem von einem Konvergenzpunkte  $x_0$  nach rechts ausstrahlenden *Sektor*

$$0 \leq |x - x_0| \leq R, \quad -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \arccos(x - x_0) \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Eine Newtonsche Reihe stellt also eine im Inneren der Konvergenzhalbebene reguläre Funktion dar.

Eigentümliche Schwierigkeiten bereitet bei der Newtonschen Reihe die Möglichkeit von *Nullentwicklungen* und die hierauf beruhende Tatsache, daß die *Entwicklung in eine Newtonsche Reihe nicht eindeutig* ist.

Eine solche Nullentwicklung entsteht aus der Binomialreihe

$$(1 + \varrho)^{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n \binom{x-1}{n} \quad (|\varrho| < 1)$$

für  $\varrho \rightarrow -1$  und  $\sigma > 1$ :

$$(4) \quad \Psi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{x-1}{n} = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma > 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \\ \text{sonst divergent;} \end{cases}$$

allgemeiner ist

$$\begin{aligned} \Psi_{r+1}(x) &= \binom{x-1}{r} \Psi_1(x-r) = \sum_{n=r}^{\infty} (-1)^{n+r} \binom{n}{r} \binom{x-1}{n} \\ &= 0 \quad \text{für } \sigma > r + 1. \end{aligned}$$

Nach Frobenius, *J. f. Math.* **73**, 1 (1871) und Pincherle, *Rom. Acc. L. Rend.* (5) **11**<sub>1</sub>, 137, 417 (1902) hat jede *Nullentwicklung die Form*

$$c_1 \Psi_1(x) + c_2 \Psi_2(x) + \cdots + c_n \Psi_n(x).$$

Das Hereinspielen der Nullentwicklungen bewirkt, daß für eine die Funktion  $\Phi(x)$  darstellende Newtonsche Reihe die Konvergenzabszisse nicht eindeutig bestimmt zu sein braucht. Ist  $\Phi(x)$  für  $\sigma > \alpha$  regulär, so läßt sich durch Hinzufügen von Nullentwicklungen erreichen, daß die Reihe für die positiven ganzen  $x > \alpha$  den richtigen Funktionswert liefert. Dann heißt

die Reihe *reduziert*, und die *Konvergenzabszisse* ist *eindeutig bestimmt*. Nörlund, *Ann. éc. norm.* (3) **39**, 343 (1922), (3) **40**, 35 (1923).

Eine durch eine Newtonsche Reihe darstellbare Funktion  $\Phi(x)$  unterliegt folgender Wachstumsbeschränkung:

$$(5) \quad |\Phi(\alpha + re^{iv})| \leq e^{\varphi(v)} \frac{r^{\lambda + \frac{1}{2} + \varepsilon(r)}}{\sqrt{1 + r \cos v}}$$

für genügend große  $r$  und  $|v| \leq \frac{\pi}{2}$ . Dabei bedeutet  $\alpha$  eine reelle Zahl  $> \lambda$ , weiter  $\varphi(v)$  die Funktion  $\cos v \log(2 \cos v) + v \sin v$ , und  $\varepsilon(r)$  strebt für  $|v| \leq \frac{\pi}{2}$  und  $r \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen Null. Carlson, *Nov. Acta Soc. sc. Upsal.* (4) **4**, Nr. 3 (1915).

Sehr ähnlich dieser notwendigen Konvergenzbedingung ist folgende hinreichende Konvergenzbedingung: Es sei  $\Phi(x)$  für  $\sigma \geq \alpha$  regulär, ferner

$$(6) \quad |\Phi(\alpha + re^{iv})| < e^{\varphi(v)} (1 + r)^{\beta + \varepsilon(r)}$$

für  $\sigma \geq \alpha$  und  $|v| \leq \frac{\pi}{2}$ , wobei  $\varepsilon(r)$  für  $r \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen Null strebt. Dann ist  $\Phi(x)$  in eine Newtonsche Reihe entwickelbar, deren Konvergenzabszisse  $\leq \text{Max}(\alpha, \beta + \frac{1}{2})$  ist. Nörlund, a. a. O.; Carlson, a. a. O.; Bockwinkel, *Amsterd. Verslag* **27**, 182, 377, 1383, 1395 (1919), **28**, 15, 276 (1920), *Amsterd. Proc.* **21**, 428, 582 (1919), **22**, 164 (1920), *Nieuw Arch. Wiskunde* (2) **13**, 189 (1921). Setzt man für  $|v| \leq \frac{\pi}{2}$

$$h(v) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\Phi(\alpha + re^{iv})|}{r},$$

so ist  $h(v) \leq \varphi(v)$ , insbesondere  $h(v) \leq \frac{\pi}{2}$  wegen  $\varphi(v) \leq \frac{\pi}{2}$  eine notwendige und  $h(v) < \varphi(v)$  eine hinreichende Konvergenzbedingung.

Durch die Transformation

$$(7) \quad \Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left( x + \frac{\rho}{n} - 1 \right)$$

kann bei hinreichend großem positivem  $\rho$  die Newtonsche Reihe in eine Halbebene  $\sigma > \gamma$  fortgesetzt werden, in der  $\Phi(x)$  regulär und die untere Grenze  $\mu(\alpha)$  der Zahlen  $\beta$  in (6) nach oben beschränkt bleibt; durch die Transformation

$$(8) \quad \Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-\omega)(x-2\omega)\cdots(x-n\omega)}{n!}$$

in eine Halbebene  $\sigma > \Gamma$ , in der sich  $\Phi(x)$  regulär verhält und  $|\Phi(x)|$  auf vertikalen Geraden exponentiell mit der ersten Potenz der Ordinate anwächst.

Durch das letzte Ergebnis wird für Newtonsche Reihen der Form (8) das *Entwicklungsproblem* gelöst. Eine Funktion  $\Phi(x)$  ist dann und nur dann durch eine Reihe (8) darstellbar, wenn  $\Phi(x)$  in einer gewissen Halbebene regulär und daselbst  $|\Phi(x)| < e^{k|x|}$  mit festem  $k > 0$  ist, und zwar genügt es,  $\omega < \frac{\log 2}{k}$  zu wählen. Nörlund, a. a. O., daselbst auch Beispiele für Entwicklung in Interpolationsreihen.

## § 6. Fakultätenreihen

$$(1) \quad \Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

kommen schon bei Newton und Stirling vor und wurden von Schlömilch, Jensen, Pincherle und Nielsen näher untersucht. Eine befriedigende Grundlage ihrer Theorie rührt aber erst von Landau, *Münchner Ber.* **36**, 151 (1906) her. Neuere Untersuchungen von H. Bohr, *Gött. Nachr.*, 247 (1909) über *Summierbarkeit*, von Nörlund, *Acta Math.* **37**, 327 (1914) über *analytische Fortsetzung und Entwicklung von Funktionen in Fakultätenreihen*. Zusammenfassende Darstellung bei Nörlund, *Leçons sur les séries d'interpolation*, Paris 1926.

Hinsichtlich *Konvergenz* und *absoluter Konvergenz* ergeben sich wörtlich dieselben Tatsachen wie bei der Newtonschen Reihe. Auch sonst bestehen viele Analogien zwischen Fakultätenreihen, Newtonschen Reihen und Dirichletschen Reihen. Unterschiede treten auf beim *asymptotischen Verhalten* und bei der *gleichmäßigen Konvergenz*. Die Fakultätenreihe konvergiert *gleichmäßig* in jedem von einem Konvergenzpunkte  $x_0$  nach rechts ausstrahlenden Winkelraume

$$|x - x_0| \geq 0, \quad -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \arg(x - x_0) \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

oder auch in der „verkleinerten“ *Konvergenzhalbebene*  $\sigma \geq \lambda + \varepsilon$  mit festem  $\varepsilon > 0$  (von den Punkten 0, -1, -2, ... können

einige oder alle in die Konvergenzhalbebene fallen und sind durch kleine Umgebungen auszuschließen). Hiernach ist die Funktion  $\Omega(x)$  im Inneren der Konvergenzhalbebene regulär, allenfalls mit Polen in  $0, -1, -2, \dots$

Für  $x \rightarrow \infty$  strebt  $\Omega(x)$  in der Halbebene  $\sigma \geq \lambda + \varepsilon$  gleichmäßig gegen 0; setzt man

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} + R_m(x),$$

so gilt genauer sogar  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{m+1} R_m(x) = a_m m!$ . Die Fakultätenreihe läßt also bei Annäherung an den unendlich fernen, im allgemeinen wesentlich singulären Punkt in der Halbebene  $\sigma \geq \lambda + \varepsilon$  das Verhalten der dargestellten Funktion  $\Omega(x)$  mit beliebiger Genauigkeit erkennen. Diese wichtige Eigenschaft macht die Fakultätenreihe geeignet zum Studium von Funktionen in der Umgebung wesentlich singulärer Punkte (Analogie mit den Poincaréschen asymptotischen Reihen).

Die Ableitung einer Fakultätenreihe und das Produkt zweier Fakultätenreihen können in gewissen Halbebenen wieder als Fakultätenreihen geschrieben werden. Über die Nullstellen einer Fakultätenreihe vgl. Rasch und Hille, *Math. Ztschr.* (im Druck).

Die Funktion  $\Omega(x)$  gestattet die *Integraldarstellung*

$$(2) \quad \Omega(x) = \int_0^1 t^{x-1} \varphi(t) dt;$$

hierbei ist

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-t)^n$$

eine im Kreise  $|t-1| < 1$  reguläre Funktion, und die Ordnung von  $t^{-1}\varphi(t)$  (im Hadamardschen Sinne) auf dem Kreise  $|t-1| = 1$  hängt mit der Konvergenzabszisse  $\lambda$  der Fakultätenreihe zusammen. Das Konvergenzgebiet eines derartigen Integrals ist nach Phragmén, *C. R.* **132**, 1396 (1901); Lerch, *Acta Math.* **27**, 339 (1903) und Pincherle, *Ann. éc. norm.* (3) **22**, 9 (1905) ebenfalls eine Halbebene, deren Konvergenzabszisse jedoch mit der Konvergenzabszisse für die Fakultätenreihe nicht in ersichtlicher Weise zusammenhängt.

Zur *analytischen Fortsetzung* der Funktion  $\Omega(x)$  über die Konvergenzhalbebene hinaus transformiert man die Fakultätenreihe (1) in *verallgemeinerte Fakultätenreihen* von den Typen



$$(3) \quad \Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n n!}{(x + \varrho)(x + \varrho + 1) \cdots (x + \varrho + n)}$$

bzw.

$$(4) \quad \Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n n!}{x(x + \omega)(x + 2\omega) \cdots (x + n\omega)}.$$

Dies ist bei beliebigem  $\varrho$  bzw. bei  $\omega > 1$  immer möglich (möglicherweise sogar für  $\omega > \omega_1$  mit einem gewissen  $\omega_1 < 1$ , aber nicht mehr für  $\omega < \omega_1$ ).

Bei positivem, unendlich zunehmendem  $\varrho$  nimmt die Konvergenzabszisse  $\lambda_\varrho$  der Reihe (3) stetig und monoton nach einem Grenzwerte  $\lambda_\infty$  ab. Für  $\lambda_\infty$  ist (ganz anders als bei den Dirichletschen Reihen) ebensowenig wie für  $\lambda$  ein Zusammenhang mit analytischen Eigenschaften der Funktion  $\Omega(x)$  bekannt. Die Transformation (3) ist äquivalent der Summation der Fakultätenreihe (1) durch arithmetische Mittel; die Summabilitätsabszisse  $r$ -ter Ordnung  $\lambda_r$  ist, falls sie positiv ausfällt, gerade die Konvergenzabszisse der Reihe (3) für  $\varrho = r$ . Hiernach können summierbare Fakultätenreihen durch konvergente ersetzt werden, was für die Theorie der Differenzengleichungen bequem ist.

Durch die Transformation (4) kommt man in die ganze Halbebene  $\sigma > \alpha$ , in der die Funktion  $\Omega(x)$  regulär und beschränkt bleibt, da die Konvergenzabszisse  $\lambda(\omega)$  der Reihe (4) für  $\omega \rightarrow \infty$  monoton und stetig nach  $\alpha$  abnimmt. Möglicherweise wird schon für ein endliches  $\omega$  (und alle größeren  $\omega$ )  $\lambda(\omega) = \alpha$ . Jedenfalls ist die Grenzkonvergenzabszisse  $\lambda(\infty)$  durch einfache analytische Eigenschaften von  $\Omega(x)$ , Regularität und Beschränktheit, gekennzeichnet.

Für Fakultätenreihen vom Typus (4) hat Nörlund, *Acta Math.* **37**, 327 (1914) das Entwicklungsproblem restlos gelöst. Alle Funktionen, die sich durch divergente, im Sinne von Borel mittels der Exponentialmethode absolut und gleichmäßig summierbare Potenzreihen darstellen lassen, können auch in konvergente Fakultätenreihen mit passend gewähltem  $\omega$  entwickelt werden und umgekehrt, Nörlund, a. a. O.; Watson, *Phil. Trans. A* **211**, 279 (1912), *Pal. Circ. mat.* **34**, 41 (1912); F. Nevanlinna, *Ann. Acad. sc. Fennicae* A 12, Nr. 3 (1918), A 16, Nr. 8 (1921), A 18, Nr. 3 (1921). Hierdurch bietet sich die Möglichkeit der Ersetzung divergenter Potenzreihen in der Theorie der Differential- und Differenzengleichungen durch konvergente Fakultätenreihen, Horn, *Math. Ann.* **71**, 510 (1912), *Math.-Ver.* **24**, 309 (1915), *Math. Ztschr.* **8**, 100 (1920).

## § 7. Bernoullische und Eulersche Polynome.

a) Die *Bernoullischen Polynome*  $B_\nu(x)$  sind diejenigen Polynome, deren Differenzen wesentlich die Potenzen von  $x$  mit nichtnegativem ganzem Exponenten sind. Zweckmäßig definiert man sie nach Steffensen, *Kopenh. Ber.* 7, Nr. 5 (1926); *Interpolation*, § 13 als diejenigen Polynomlösungen der *Differenzengleichung*

$$(1) \quad \Delta B_\nu(x) = B_\nu(x+1) - B_\nu(x) = \nu x^{\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

welche der Nebenbedingung

$$(2) \quad \frac{dB_\nu(x)}{dx} = \nu B_{\nu-1}(x)$$

genügen. Nach dem Taylorschen Satz findet man die Entwicklung

$$(3) \quad B_\nu(x+h) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} h^s B_{\nu-s}(x),$$

insbesondere für  $h=1$  die *Rekursionsformel*

$$(4) \quad \sum_{s=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{s} B_s(x) = \nu x^{\nu-1}.$$

Die *Anfangswerte*  $B_\nu(0) = B_\nu$  der Bernoullischen Polynome heißen *Bernoullische Zahlen*; Rekursionsformel für sie aus (4) für  $x=0$ . Ferner setzt man  $B_\nu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{D_\nu}{2^\nu}$ ; es gilt  $D_\nu = -2(2^{\nu-1}-1) B_\nu$  (*Kosekantenkoeffizienten*). Über den *v. Staudt-Clausenschen Satz* vgl. *Rep. I.* 1, 520; Nörlund, *Differenzenrechnung*, 32, über weitere arithmetische Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen, Determinantendarstellungen usw. Saalschütz, *Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen*, Berlin 1893. Die ersten  $B_\nu$  lauten

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0,$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

$$B_{14} = \frac{7}{6}, \dots;$$

weitere Zahlenwerte bei Adams, *J. f. Math.* 85, 269 (1878); Sérébrennikov, *Petersb. Abh.* (8) 16, Nr. 10 (1905).

Anwendung der Bernoullischen Polynome zur Summation der Potenzen der natürlichen Zahlen mit positiven ganzen Exponenten durch die Formel

$$1^v + 2^v + \cdots + n^v = \frac{B_{v+1}(n+1) - B_{v+1}}{v+1} \quad (v > 0)$$

(Jakob Bernoulli, *Ars conjectandi*, Basel 1713; vgl. *Rep.* I<sub>1</sub>, 422).

Die Bernoullischen Polynome erscheinen als Entwicklungskoeffizienten in der Entwicklung der „*erzeugenden Funktion*“

$$(5) \quad \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} B_v(x) \quad (|t| < 2\pi).$$

Hieraus lassen sich viele ähnliche Entwicklungen gewinnen, insbesondere für  $x=0$  bzw.  $x=\frac{1}{2}$  die erzeugenden Funktionen der  $B_v$  und  $D_v$ , vgl. *Rep.* I<sub>1</sub>, 437.

Ferner gelten für die Bernoullischen Polynome der „*Ergänzungssatz*“

$$(6) \quad B_v(1-x) = (-1)^v B_v(x)$$

(vgl. S. 1226, 1227), durch welchen die Werte des Bernoullischen Polynoms in zwei zum Punkte  $\frac{1}{2}$  symmetrischen Punkten miteinander verknüpft werden, und das „*Multiplikationstheorem*“

$$(7) \quad B_v(mx) = m^{v-1} \sum_{s=0}^{m-1} B_v\left(x + \frac{s}{m}\right)$$

( $m$  eine natürliche Zahl; vgl. S. 1227). Hiernach läßt sich der Verlauf der Bernoullischen Polynome für  $0 \leq x \leq 1$  sehr bequem übersehen, vgl. Nörlund, *Differenzenrechnung*, 22.

Besonders wichtig, z. B. für die Euler-Maclaurinsche Summenformel (S. 1206 ff.), sind die mit den Bernoullischen Polynomen  $B_v(x)$  zusammenhängenden *periodischen Funktionen*  $\bar{B}_v(x)$  von der Periode 1, die für  $0 \leq x < 1$  mit den  $B_v(x)$  übereinstimmen.  $\bar{B}_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$  ist für die analytische Zahlentheorie von Bedeutung ( $[x]$  größte in  $x$  enthaltene ganze Zahl). Es bestehen die für  $v > 0$  absolut und gleichmäßig konvergenten *Fourierschen Entwicklungen*

$$(8) \quad \bar{B}_{2v}(x) = (-1)^{v+1} \frac{2(2v)!}{(2\pi)^{2v}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^{2v}},$$

$$(9) \quad \bar{B}_{2v+1}(x) = (-1)^{v+1} \frac{2(2v+1)!}{(2\pi)^{2v+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n^{2v+1}};$$

die zweite Reihe gilt bei  $\nu = 0$  noch für  $0 < x - [x] < 1$ , aber nicht mehr für  $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Für  $x = 0$  ergibt sich aus (8) die Gleichung

$$\zeta(2\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\nu}} = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\pi)^{2\nu}}{2(2\nu)!} B_{2\nu},$$

welche die Summen der reziproken geraden Potenzen der natürlichen Zahlen (die Werte der Riemannschen Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\Re(s) > 1)$$

für die positiven geraden Zahlen) mit den Bernoullischen Zahlen verbindet, z. B.

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) Das *Eulersche Polynom*  $E_\nu(x)$  ist die Polynomlösung der Gleichung

$$\nabla E_\nu(x) = \frac{E_\nu(x+1) + E_\nu(x)}{2} = x^\nu;$$

die  $E_\nu(x)$  haben ähnliche Eigenschaften wie die  $B_\nu(x)$ . Man setzt

$$E_\nu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{E_\nu}{2^\nu}, \quad E_\nu(0) = \frac{C_\nu}{2^\nu} = -2\left(2^{\nu+1} - 1\right) \frac{B_{\nu+1}}{\nu+1};$$

die  $E_\nu$  heißen *Eulersche Zahlen* oder *Sekantenkoeffizienten*, die  $C_\nu$  *Tangentenkoeffizienten*, weil z. B. für  $|u| < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \tan u &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{C_{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} u^{2\nu+1} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{2^{2\nu} (2^{2\nu} - 1) B_{2\nu}}{(2\nu)!} u^{2\nu-1} \end{aligned}$$

gilt. Nörlund, *Differenzenrechnung*, Kap. 2, § 2 und 457.

### Verallgemeinerungen der Bernoullischen Polynome

a) nach der Richtung, daß der Zeiger  $\nu$  nicht auf ganzzahlige  $\nu$  beschränkt, sondern beliebig komplex genommen wird (*Bernoullische Funktionen*) bei Böhmer, *Math. Ann.* 68, 338 (1910);

b) nach der Richtung, daß statt der ersten Differenz bei der Definition eine höhere auftritt, systematisch bei Nörlund, *Acta Math.* **43**, 121 (1920), *Differenzenrechnung*, Kap. 6 (auch für die Eulerschen Polynome). Nach Nörlund genügt das *Bernoullische Polynom*  $B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  *n-ter Ordnung v-ten Grades mit den Spannen*  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  der Gleichung

$$\sum_{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n}^n B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \nu(\nu - 1) \dots (\nu - n + 1) x^{\nu - n}$$

und gewissen Nebenbedingungen. Die erzeugende Funktion lautet

$$\frac{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n t^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1) \dots (e^{\omega_n t} - 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(n)}(x | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n),$$

wobei

$$|t| < \min \left( \left| \frac{2\pi}{\omega_1} \right|, \left| \frac{2\pi}{\omega_2} \right|, \dots, \left| \frac{2\pi}{\omega_n} \right| \right)$$

sein soll. Für  $n$  sind auch negative ganze Zahlen zulässig. Die entsprechenden Bernoullischen Polynome sind wesentlich die aufeinanderfolgenden Differenzen der Potenzen von  $x$  mit nicht-negativem ganzem Exponenten (vgl. S. 1193).

Besonders wichtig ist der Fall *zusammenfallender Spannen* von der Größe 1. Dann ergeben sich viele Zusammenhänge mit den Faktoriellen, z. B.

$$B_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{\nu!}{n!} \frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}} (x-1)(x-2) \dots (x-n) \quad (\nu=0, 1, 2, \dots, n)$$

und den sogenannten Stirlingschen Zahlen, ferner Reihenentwicklungen wie

$$\left( \frac{t}{e^t - 1} \right)^z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(z)} \quad (|t| < 2\pi),$$

$$\left( \frac{\log(1+t)}{t} \right)^z = z \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \frac{B_\nu^{(z+\nu)}}{z+\nu} \quad (|t| < 1),$$

in denen beliebig komplexes  $z$  eine weitere Verallgemeinerung der Bernoullischen Polynome liefert. Diese Reihen sind wichtig z. B. für die Koeffizienten bei der numerischen Differentiation und Integration (vgl. S. 1199 f., 1208 f.).

Steffensen führt (*Kopenh. Ber.* **7**, Nr. 5 (1926)) in sehr naturgemäßer Weise gewisse Polynome  $x_{\omega n}^\nu$  ein, deren erzeugende Funktion

$$\left( \frac{t}{(1 + \omega t)^{\frac{1}{\omega}} - 1} \right)^n (1 + \omega t)^{\frac{x}{\omega}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} x_{\omega n}^{\nu} \quad (|t| < 1)$$

lautet und aus denen die Bernoullischen Polynome  $B_{\nu}^{(n)}(x)$  mit gleichen Spannen von der Größe 1 durch den Grenzübergang  $\omega \rightarrow 0$  hervorgehen. Für  $x = 0$ ,  $n = 1$  kommen Polynome in  $\omega$ , die sogenannten *Lubbockschen Polynome*, vgl. Steffensen, *Interpolationslaere*, 139, *Interpolation*, 138.

### § 8. Das Summationsproblem.

Stellt man die Differenzenbildung in Parallele zur Differentiation, so entspricht der Integration die als „*Summation*“ bezeichnete Auflösung der Gleichung

$$(1) \quad \triangle_{\omega} F(x) = \frac{F(x + \omega) - F(x)}{\omega} = \varphi(x)$$

bei gegebenem  $\varphi(x)$ . Bedeutet  $F^*(x)$  eine spezielle Lösung, so lautet die allgemeine Lösung  $F^*(x) + \pi(x)$ , wobei  $\pi(x)$  der Gleichung  $\triangle_{\omega} \pi(x) = 0$  genügt, also eine *periodische* Funktion mit der Periode  $\omega$  ist. Im Hereinspielen von  $\pi(x)$  liegt die Hauptschwierigkeit des Summationsproblems.

Ältere Untersuchungen über das Summationsproblem sind im Anschluß an die Euler-Maclaurinsche Summenformel (Plana, Abel, Cauchy) und für *spezielle*  $\varphi(x)$  durchgeführt worden, z. B. für  $\varphi(x) = \nu x^{\nu-1}$ : *Bernoullische Polynome*,  $\varphi(x) = \log x$ : *Logarithmus der Gammafunktion*,  $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ : *logarithmische Ableitung der Gammafunktion*.

Behandlung mit modernen funktionentheoretischen Hilfsmitteln zuerst bei Guichard, *Ann. éc. norm.* (3) **4**, 361 (1887); Appell, *J. de Math.* (4) **7**, 157 (1891); Hurwitz, *Acta Math.* **20**, 285 (1897); Weber, *Acta Math.* **27**, 225 (1903); Carmichael, *Trans. Am. M. S.* **12**, 99 (1911). Untersuchungen von Hilb s. § 11.

Hier soll die *Nörlundsche Theorie des Summationsproblems* besprochen werden, deren Ziel ist, *unter Beseitigung der periodischen Funktion  $\pi(x)$  aus der Menge aller Lösungen der Gleichung (1) eine spezielle, funktionentheoretisch bedeutsame Lösung*, die sogenannte *Hauptlösung*, auf einfachem und natürlichem Wege



herauszuheben. Nörlund, *Acta Math.* **44**, 71 (1922), *Differenzenrechnung*, Kap. 3 und 4, *Sur la «somme» d'une fonction*, Paris 1927.

Bei Konvergenz definiert die Reihe

$$(2) \quad -\omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega)$$

die *Hauptlösung*; im Falle der Divergenz gewinnt Nörlund die *Hauptlösung* oder *Summe*  $\sum_a^x \varphi(z) \triangle_z \omega$  von  $\varphi(x)$  (Analogie zum Integral auch in der Schreibweise) unter gewissen Voraussetzungen über  $\varphi(x)$  durch exponentielle Summation der Reihe. Zusammenhang mit anderen Summationsmethoden Nörlund, *Lund Acta* (2) **14**, Nr. 15 (1918); Hilb, *Gött. gel. Anzeigen*, 57 (1925). Vgl. auch Bochner, *Acta Math.* **51** (im Druck).

a) Reelle Veränderliche. Es sei  $x$  reell,  $\omega$  positiv und die reelle oder komplexe Funktion  $\varphi(x)$  für  $x \geq b$  mit einer stetigen Ableitung  $m$ -ter Ordnung  $\varphi^{(m)}(x)$  versehen, für welche  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1+\varepsilon} \varphi^{(m)}(x) = 0$  ( $\varepsilon > 0$  fest) gilt. (Über allgemeinere Voraussetzungen vgl. Nörlund, a. a. O.). Dann zeigt Nörlund durch Anwendung der Euler-Maclaurinschen Summenformel, daß die *Hauptlösung*

$$(3) \quad F(x|\omega) = \sum_a^x \varphi(z) \triangle_z \omega \\ = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \int_a^\infty \varphi(z) e^{-\eta z} dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} \right\}$$

( $a$  bedeutet eine beliebig gewählte feste Zahl  $> b$ ) für  $x \geq b$  und  $\omega > 0$  existiert, bis auf eine additive Konstante bestimmt, in  $x$  und in  $\omega$  stetig ist und mit  $0 \leq h \leq 1$  die Entwicklung (Analogon der Stirlingschen Reihe bei der Gammafunktion) gestattet:

$$(4) \quad F(x + h\omega, \omega) = \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{v=1}^m \frac{\omega^v}{v!} B_v(h) \varphi^{(v-1)}(x) \\ + \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \bar{B}_m(h-z) \varphi^{(m)}(x + \omega z) dz.$$

Hiernach ist die *Summe eines Polynoms* wieder ein *Polynom*; insbesondere gilt für die *Potenz* bei der Spanne  $\omega = 1$

$$\sum_0^x \nu z^{\nu-1} \Delta z = B_\nu(x).$$

Das Integral  $\int_a^\infty \varphi(z) e^{-\eta z} dz$  in der Definition (3) ist hinzugefügt, um die Konvergenz bei  $\eta \rightarrow 0$  für möglichst weitgehende Klassen von Funktionen  $\varphi(x)$  zu erzwingen. Vgl. Hilb, *Gött. gel. Anzeigen*, 57 (1925).

Wiener, *J. of Math. and Phys. Mass. Inst. of Technol.* 4, 153 (1925) hat bei  $\omega = 1$  unter den Nörlundschen Voraussetzungen bewiesen: Die gegebene Funktion  $\varphi(x)$  und die gesuchte Hauptlösung  $F(x)$  können in je zwei Summanden  $\varphi_1(x)$  und  $\varphi_2(x)$  bzw.  $F_1(x)$  und  $F_2(x)$  zerlegt werden:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad F(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

so daß  $F_1(x)$  und  $F_2(x)$  den Differenzengleichungen

$$\Delta F_1(x) = \varphi_1(x), \quad \Delta F_2(x) = \varphi_2(x)$$

genügen und durch die *konvergenten* Reihen

$$F_1(x) = \int_a^x \varphi_1(z) dz + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} \varphi_1^{(\nu-1)}(x) \quad \text{analog (4),}$$

$$F_2(x) = - \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_2(x+s) \quad \text{analog (2)}$$

darstellbar sind.

Aus der Gleichung (4) geht durch *Differentiation*

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \sum_a^x \varphi(z) \Delta z = \sum_a^x \varphi'(z) \Delta z + \varphi(a)$$

hervor, wonach die *Ableitung der Summe* bis auf eine Konstante gleich der *Summe der Ableitung* ist. Durch  $m$ -malige Differenziation ergibt sich die für die Hauptlösung unter allen Lösungen der Gleichung (1) charakteristische Eigenschaft, daß  $F(x|\omega)$  für  $x \geq b$  eine stetige Ableitung  $m$ -ter Ordnung hat, welche bei  $x \rightarrow \infty$  einem endlichen Grenzwerte zustrebt. (Hieraus folgt übrigens unter

schärferen Bedingungen als den hier angenommenen die *Summierbarkeit* der Hauptlösung.)

Ferner zeigt die Entwicklung (4) das *asymptotische Verhalten der Hauptlösung für große  $x$  bei festem  $\omega$  und für kleine  $\omega$  bei festem  $x$* . Es sei der Einfachheit halber  $h = 0$  und zur Abkürzung

$$(6) \quad Q(x) = \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu \varphi^{(\nu-1)}(x),$$

$$R_{m+1} = \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \bar{B}_m(-z) \varphi^{(m)}(x + \omega z) dz,$$

$$R_m = \frac{\omega^m}{m!} B_m \varphi^{(m-1)}(x) + R_{m+1},$$

dann besteht bei festem  $\omega$  und *unendlich zunehmendem  $x$*  die Beziehung

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [F(x | \omega) - Q(x)] = 0$$

(aus der übrigens auch für  $x \geq b$  gleichmäßig konvergente Reihendarstellungen von  $F(x | \omega)$  gewonnen werden können), und bei festem  $x$  und *nullstrebigen positivem  $\omega$*  gilt

$$\frac{|R_{m+1}|}{\omega^m} \text{ beschränkt, } \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{R_m}{\omega^{m-1}} = 0.$$

Insbesondere erhält man

$$(8) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_a^x \varphi(z) \triangle_\omega z = \int_a^x \varphi(z) dz;$$

die Hauptlösung  $\sum_a^x \varphi(z) \triangle_\omega z$  der Differenzengleichung (1) geht also bei  $\omega \rightarrow 0$  in die Lösung  $\int_a^x \varphi(z) dz$  der durch den Grenzübergang entstehenden Differentialgleichung über, was für andere Lösungen der Gleichung (1) als die Hauptlösung im allgemeinen nicht zutrifft.

Bei unbeschränkt differenzierbarem  $\varphi(x)$  ist die Potenzreihe

$$(9) \quad F(x + h\omega | \omega) \sim \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^{\nu}}{\nu!} B_{\nu}(h) \varphi^{(\nu-1)}(x)$$

für kleine positive  $\omega$  asymptotisch im Sinne von Poincaré; über die unter gewissen Bedingungen vorhandene *Pseudokonvergenz* vgl. Nörlund, a. a. O.

Die Hauptlösung ist für  $x_0 < x < x_0 + \omega$  mit  $x_0 \geq b$  in die *Fouriersche Reihe*

$$(10) \quad F(x | \omega) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi x}{\omega} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{\omega} \right)$$

mit

$$a_0 = \int_a^{x_0} \varphi(z) dz, \quad \left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\infty} \varphi(z) e^{-\eta z} \frac{\cos \frac{2n\pi z}{\omega}}{\sin \frac{2n\pi z}{\omega}} dz$$

entwickelbar; über Umformungen der Koeffizientenintegrale vgl. Nörlund, a. a. O. Ein Beispiel bildet die S. 1218 angegebene Entwicklung der mit den Bernoullischen Polynomen zusammenhängenden periodischen Funktionen  $\bar{B}_{\nu}(x)$ .

Über die Gleichung (1) bei *fastperiodischem*  $\varphi(x)$  vgl. Walther, *Gött. Nachrichten* 1927 (im Druck).

b) Komplexe Veränderliche. Es sei  $x$  komplex,  $x = \sigma + i\tau$ ,  $\omega$  zunächst positiv,  $\varphi(x)$  in der Halbebene  $\sigma \geq b$  regulär und bei  $\varepsilon > 0$ , konstantem  $C$  und  $k$  den Wachstumsbeschränkungen

$$(11) \quad |\varphi(x)| < C e^{(k+\varepsilon)|x|} \quad \text{in der Halbebene,}$$

$$(12) \quad |\varphi(x)| < C e^{\varepsilon|x|} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{in einem ihr eingebetteten Halb-} \\ \text{streifen um die reelle Achse} \end{array} \right.$$

unterworfen. Dann kann der Ausdruck

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)}$$

unter Benutzung der Tatsache, daß  $\pi \cot \pi x$  für ganzzahlige  $x$  das Residuum 1 hat, als komplexes Integral geschrieben werden. Durch Abänderung des Integrationsweges ergeben sich bei  $\eta \rightarrow 0$  gewisse *Integraldarstellungen* von  $F(x | \omega)$ . Aus ihnen folgt die Existenz der Hauptlösung für  $\sigma \geq b$  und  $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$ .

Allgemeiner existiert  $F(x|\omega)$  auch bei Fortfall der Wachstumsbeschränkung (12), aber Fortbestehen der Wachstumsbeschränkung (11) für  $\sigma \geq b$  und im Kreise vom Radius  $\frac{\pi}{k}$  um den Punkt  $\frac{\pi}{k}$  in der komplexen  $\omega$ -Ebene. Für  $\sigma \geq b$ ,  $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$  ist  $F(x|\omega)$  dann derselben Wachstumsbeschränkung (11) wie  $\varphi(x)$  unterworfen. Dies ist eine charakteristische Eigenschaft der Hauptlösung und gewährleistet weiterhin deren Summierbarkeit.

Bei ganzem  $\varphi(x)$  mit der Wachstumsbeschränkung (11) ist  $F(x|\omega)$  regulär für alle endlichen  $x$  und für alle  $\omega$  im Kreise  $|\omega| < \frac{2\pi}{k}$ ; im Inneren dieses Kreises bestehen z. B. die Potenzreihenentwicklung (vgl. (4))

$$(13) \quad F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z) dz - \frac{\omega}{2} \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu} \varphi^{(2\nu-1)}(x)$$

und der Ergänzungssatz

$$F(x - \omega | -\omega) = F(x|\omega)$$

(beides aus den Integraldarstellungen zu gewinnen). Auf dem Kreise  $|\omega| = \frac{2\pi}{k}$  liegt, wenn (11) für kein negatives  $\varepsilon$  mehr zutrifft, ein singulärer Punkt von  $F(x|\omega)$ ; Beispiel

$$\sum_0^x e^{\beta z} \triangle z = \frac{\omega e^{\beta x}}{e^{\omega \beta} - 1} - \frac{1}{\beta} \quad (|\omega| < \frac{2\pi}{\beta}),$$

singuläre Stellen in  $\omega = \pm \frac{2s\pi i}{\beta}$  mit  $s = 1, 2, \dots$

Ist  $\varphi(x)$  mit einer endlichen Anzahl singulärer Stellen  $\beta_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) im Endlichen behaftet und für genügend große  $|x|$  der Wachstumsbeschränkung (11) unterworfen, so existiert die Hauptlösung  $F(x|\omega)$  für alle endlichen  $x$  und für alle  $\omega$  im Kreise  $|\omega| < \frac{2\pi}{k}$ . Sie ist hinsichtlich  $x$  eindeutig mit singulären Stellen in  $x = \beta_\nu - s\omega$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n; s = 0, 1, 2, \dots$ ) auf Halbgeraden, hinsichtlich  $\omega$  in der Umgebung von  $\omega = 0$  unendlich vieldeutig mit singulären Stellen in dem wesentlich singulären Punkte  $\omega = 0$  und auf „singulären Vektoren“ in  $\omega = \frac{\beta_\nu - x}{s}$

( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ;  $s = 1, 2, \dots$ ). In der Umgebung von  $\omega = 0$  hat  $F(x|\omega)$  den Charakter

$$F(x|\omega) = \text{konst} \cdot \log \omega + \text{eindeutige Funktion von } \omega.$$

Bei passender Aufschlitzung der  $\omega$ -Ebene von  $\omega = 0$  aus besteht für alle regulären Werte von  $x$  und  $\omega$  der *Er-  
gänzungssatz*

$$(14) \quad F(x - \omega | -\omega) = F(x | \omega) - \Pi(x | \omega).$$

Dabei bedeutet  $\Pi(x|\omega)$  eine *lediglich durch die Singularitäten von  $\varphi(x)$  explizit bestimmbare periodische Funktion von  $x$*  mit der Periode  $\omega$  und einfacher Fourierscher Entwicklung.

Die Potenzreihe (13) in  $\omega$  stellt in den von singulären Vektoren begrenzten Winkelräumen asymptotisch gewisse mit  $F(x|\omega)$  und  $\Pi(x|\omega)$  zusammenhängende, verschiedene Funktionen dar. *Insbesondere bekommt man in Verallgemeinerung der für positive  $\omega$  gültigen Formel (8) dieselbe Formel auf jedem nicht singulären Vektor*, wobei je nach dem Arkus von  $\omega$  die Bestimmung des Integrals (das ja eine mehrdeutige Funktion von  $x$  darstellt) verschieden zu wählen ist.

Auf Grund der Entwickelbarkeitsbedingungen in Interpolationsreihen (S. 1214) und der hierzu passenden Wachstumsbeschränkung von  $F(x|\omega)$  kann  $F(x|\omega)$  in Interpolationsreihen entwickelt werden (vgl. Nörlund, a. a. O.).

Schließlich seien noch folgende Beziehungen für die Hauptlösung erwähnt, wobei  $m$  eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$(15) \quad \sum_{s=0}^{m-1} F\left(x + \frac{s\omega}{m} \middle| \omega\right) = m F\left(x \middle| \frac{\omega}{m}\right) \quad (\text{Multiplikationstheorem}),$$

$$(16) \quad F(x|\omega) = \nabla_{\omega} F(x|2\omega),$$

$$(17) \quad \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(z|\omega) dz = \int_{\alpha}^x \varphi(z) dz \quad (\text{Spannenintegral}).$$

Über die zur Theorie der Summe  $F(x|\omega)$  analoge Theorie der „Wechselsumme“  $\sum_{\omega} \varphi(x) \nabla x$  oder der Hauptlösung  $G(x|\omega)$  der Gleichung

$$\nabla_{\omega} G(x) = \frac{G(x+\omega) + G(x)}{2} = \varphi(x)$$

vgl. Nörlund, a. a. O.



Übertragung der Ergebnisse über einfache Summen (asymptotisches Verhalten, Ableitungen, Multiplikationstheorem usw.) auf „mehrfache Summen“ (Hauptlösungen der Gleichungen  $\bigtriangleup^n F(x) = \varphi(x)$ ,  $\bigtriangledown^n G(x) = \varphi(x)$ ) Nörlund, *Trans. Am. M. S.* **25**, 13 (1923), *Differenzenrechnung*, Kap. 7. Hauptlösung einer beliebigen Differenzengleichung Bochner, *Acta Math.* **51** (im Druck).

Die Summationstheorie ermöglicht eine einfache und systematische Theorie der Gammafunktion und verwandter Funktionen. Es gilt (Spanne  $\omega = 1$ )

$$\log \Gamma(x) = \sum_0^x \log z \Delta z + \log \sqrt{2\pi}$$

(diejenige Summe von  $\log x$ , die für  $x = 1$  verschwindet),

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(x) = \sum_1^x \frac{1}{z} \Delta z.$$

Z. B. ergibt sich nach (4) für  $-\pi + \varepsilon < \arccos x < \pi - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  fest)

$$\begin{aligned} \log \Gamma(x+h) &= \log \sqrt{2\pi} + \{x + B_1(h)\} \log x - x - \sum_{v=1}^{m-1} (-1)^v \frac{B_{v+1}(h)}{v(v+1)x^v} \\ &\quad - \frac{1}{m} \int_0^\infty \frac{\bar{B}_m(z-h)}{(x+z)^m} dz \quad (\text{Stirlingsche Reihe}), \end{aligned}$$

nach (7) für  $-\pi + \varepsilon < \arccos x < \pi - \varepsilon$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}}} = 1 \quad (\text{Stirlingsche Formel}),$$

nach (15)

$$\Gamma(mx) = \frac{m^{mx-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}^{m-1}} \prod_{s=0}^{m-1} \Gamma\left(x + \frac{s}{m}\right) \quad (\text{Gaußsches Multiplikationstheorem}),$$

nach (17)

$$\int_x^{x+1} \log \Gamma(z) dz = x(\log x - 1) + \log \sqrt{2\pi} \quad (\text{Formel von Raabe}),$$

nach (14)

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (\text{Eulerscher Ergänzungssatz}),$$

nach (10) für  $0 < x < 1$

$$\log \Gamma(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)(C + \log 2) + (1 - x) \log \pi - \frac{1}{2} \log \sin \pi x \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\pi n} \sin 2n\pi x \quad (\text{Kummersche Reihe}).$$

## § 9. Homogene lineare Differenzengleichungen.

Eine lineare Differenzengleichung mit der Spanne 1 kann in der Form

$$\sum_{i=0}^n p_i(x) u(x+i) = \varphi(x)$$

als Beziehung zwischen aufeinanderfolgenden Funktionswerten  $u(x)$ ,  $u(x+1)$ , . . . ,  $u(x+n)$  mit Koeffizienten  $p_i(x)$  geschrieben werden. Ist  $\varphi(x)$  identisch 0, so heißt die Gleichung *homogen*, andernfalls *vollständig* oder *inhomogen*.

Eine homogene Gleichung

$$(1) \quad P[u(x)] = \sum_{i=0}^n p_i(x) u(x+i) = 0$$

wird für gewisse Untersuchungen durch eine einfache Transformation zweckmäßig in die Gestalt

$$(2) \quad Q[u(x)] = \sum_{i=0}^n Q_i(x) \Delta_{-1}^i u(x) = 0$$

gebracht.

Zwischen Differenzen- und Differentialgleichungen bestehen formale Analogien, die sehr eingehend von Wallenberg und Guldberg untersucht worden sind (*lineare Abhängigkeit von Lösungen, Multiplikatoren, adjungierte Differenzengleichung, Reduktion der Ordnung bei Kenntnis von Partikulärlösungen, vielfache Lösungen, Gruppentheorie, Reduzibilität*), Wallenberg-Guldberg, *Theorie der linearen Differenzengleichungen*, Leipzig und Berlin 1911; *Rep. I*<sub>2</sub>, 555.

Tiefgehende Unterschiede läßt der Satz von Hölder, *Math. Ann.* **28**, 1 (1887); Moore, *Math. Ann.* **48**, 49 (1897); Ostrowski, *Math. Ann.* **79**, 286 (1919) und **94**, 248 (1925);

Hausdorff, *Math. Ann.* **94**, 244 (1925) erkennen, nach welchem die als Lösung der homogenen linearen Differenzengleichung

$$\Gamma(x+1) - x\Gamma(x) = 0$$

definierte Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann (über Verallgemeinerungen vgl. Nörlund, *Enzykl.* II C 7, 703), ferner die Tatsache, daß zu eindeutigen Koeffizienten einer Differenzengleichung eindeutige Lösungen gehören. Vertiefte Einsicht in das Wesen mehrdeutiger Funktionen durch Betrachtung der Entstehung der definierenden Differentialgleichung aus einer Differenzengleichung, Nörlund, *Differenzenrechnung*, 106, 282; Walther, *Math. Ann.* **95**, 257 (1926); hierher gehörig auch die Nörlundschen Untersuchungen über den Grenzübergang  $\omega \rightarrow 0$  beim Summationsproblem, vgl. S. 1224, 1227. Behandlung der Potentialgleichung und anderer partieller Differentialgleichungen vom entsprechenden Differenzenproblem aus, wodurch die Theorie der partiellen Differentialgleichungen in neuer, eigenartiger Weise beleuchtet wird, Courant, *Gött. Nachr.*, 98 (1925), *Ztschr. f. angew. Math.* **6**, 322 (1926); Lewy, *Math. Ann.* **98**, 107 (1927); vgl. auch den Anhang des Literaturverzeichnisses in Nörlund, *Differenzenrechnung* über Anwendungen der Differenzenrechnung auf technische Fragen und vor allem Bleich-Melan, *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik*, Berlin und Wien 1927.

a) Fundamentalsystem. Existenz der Lösungen. Die Koeffizienten  $p_i(x)$  seien analytische Funktionen von  $x = \sigma + i\tau$  mit einem gemeinsamen Existenzgebiete ohne ihnen allen gemeinsame Nullstellen und ohne Pole, sondern nur mit wesentlich singulären Punkten. Die singulären Stellen  $\beta_1, \beta_2, \dots$  der Koeffizienten  $p_i(x)$ , die Nullstellen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  von  $p_0(x)$ ,  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  von  $p_n(x-n)$  heißen die *singulären Punkte der Differenzengleichung* (1).

Die Auflösung der Differenzengleichung (1) läuft auf die Aufstellung eines *Fundamentalsystems*  $u_1(x), \dots, u_n(x)$  von Partikulärlösungen hinaus, aus denen sich jede Lösung  $u(x)$  mit periodischen Koeffizienten  $\pi_i(x)$  von der Periode 1 (analog den willkürlichen Konstanten bei den Differentialgleichungen) in der Form

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \pi_i(x) u_i(x)$$

linear aufbauen läßt.  $n$  Partikulärlösungen heißen *linear unabhängig* oder ein *Fundamentalsystem*, wenn zwischen ihnen keine homogene lineare Relation

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(x) u_i(x) = 0$$

besteht; dabei sollen die periodischen Funktionen  $\pi_i(x)$  endlich bleiben und nicht zugleich verschwinden für wenigstens einen Wert von  $x$ , der keinem singulären Punkte von (1) kongruent (von ihm um eine ganze Zahl unterschieden) ist, Nörlund, *Diss.*, Kopenhagen 1910, *Ann. éc. norm.* (3) **31**, 205 (1914).

Für  $n$  linear unabhängige Lösungen  $u_1(x), \dots, u_n(x)$  ist die „Differenzdeterminante“

$$D(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1(x+1) & u_2(x+1) & \dots & u_n(x+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1(x+n-1) & u_2(x+n-1) & \dots & u_n(x+n-1) \end{vmatrix}$$

für jeden den singulären Stellen von (1) inkongruenten Punkt von Null verschieden, und umgekehrt kennzeichnet dieses Nichtverschwinden die Lösungen als Fundamentalsystem.

Unter recht allgemeinen Voraussetzungen über die Koeffizienten  $p_i(x)$ , wenn z. B. die Verhältnisse der Koeffizienten auf einer Parallelen zur reellen Achse nicht stärker als eine ganze transzendente Funktion von endlichem Geschlecht anwachsen, hat Nörlund, *Ann. éc. norm.* (3) **31**, 205 (1914) durch ein Majorantenverfahren die Existenz eines Fundamentalsystems und damit der allgemeinen Lösung sichergestellt. Die singulären Stellen der Funktionen dieses Fundamentalsystems sind auf Halbgeraden von den Punkten  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  nach links,  $\gamma_i$  und  $\beta_i + n$  nach rechts im Abstände 1 aufgereiht.

b) Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Bei konstanten Koeffizienten  $p_i(x) = c_i$  können die Lösungen  $u(x)$  der Differenzengleichung

$$\sum_{i=0}^n c_i u(x+i) = 0 \quad (c_n = 1, c_0 \neq 0)$$

explizit angegeben werden. Derartige Gleichungen sind schon von Lagrange und Laplace untersucht worden; sie sind wichtig z. B. für die *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, die *Elektrotechnik* und

die *Mechanik* (Clapeyronsche Gleichung beim durchlaufenden Träger), Czuber, *Enzykl.* ID 1, 742; Funk, *Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendungen in der Theorie der Baukonstruktionen*, Berlin 1920; Wallenberg, *Ztschr. f. angew. Math.* **1**, 138 (1921); Bleich-Melan, *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik*, Berlin und Wien 1927. Ferner können Rekursionsformeln als Differenzengleichungen aufgefaßt werden (Theorie der *rekurrenten Reihen*).

Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die  $n$  Wurzeln der „*charakteristischen Gleichung*“

$$(3) \quad f(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_0 = 0.$$

Sind sie alle voneinander verschieden, so bilden die Funktionen

$$a_1^x, a_2^x, \dots, a_n^x$$

ein Fundamentalsystem; kommen hingegen gleiche Wurzeln vor, ist etwa  $a_1$  eine  $l$ -fache Wurzel, so liefert sie  $l$  zur Aufstellung eines Fundamentalsystems geeignete Partikulärlösungen

$$a_1^x, x a_1^x, \dots, x^{l-1} a_1^x.$$

Über Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten von der Form

$$\sum_{i=0}^n c_i \Delta_{\omega}^i u(x) = 0$$

vgl. Schneider, *Math. Schwingungslehre*, 178, Berlin 1924; Walther, *Math. Ann.* **95**, 257 (1926).

Bei der Untersuchung des *asymptotischen Verhaltens* der Lösungen spielt bei ganzzahligem  $s$  der Grenzwert

$$(4) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{u(s+1)}{u(s)}$$

eine Rolle. Er existiert für jede Lösung, wenn die voneinander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung auch verschiedene absolute Beträge haben; er ist dann gleich einer Wurzel der charakteristischen Gleichung, und zwar im allgemeinen gleich der absolut größten. Wenn unter den Wurzeln solche von gleichem Absolutbetrage, aber verschiedenem *Arkus* vorkommen, braucht er nicht mehr für jede Lösung zu existieren; es gibt aber für jede Wurzel  $a_j$  wenigstens gewisse Partikulärlösungen, bei denen er vorhanden und gleich  $a_j$  ist.

Eine Verallgemeinerung dieser bei Gleichungen mit konstanten Koeffizienten fast trivialen Tatsachen gibt der höchst wichtige

c) Satz von Poincaré, mit dem geschichtlich die moderne Theorie der Differenzengleichungen beginnt, Poincaré, *Amer. J.* **7**, 213, 237 (1885). Eine Differenzengleichung

$$(5) \quad u(s+n) + \sum_{i=0}^{n-1} q_i(s) u(s+i) = 0,$$

in welcher die Veränderliche  $s$  eine positive ganze Zahl ist, heißt eine *Poincarésche Differenzengleichung*, wenn

$$q_i(s) \rightarrow c_i \quad \text{bei} \quad s \rightarrow \infty.$$

Für sie besagt der Satz von Poincaré: Sind die Wurzeln der mit den Grenzwerten  $c_i$  der  $q_i(s)$  gebildeten charakteristischen Gleichung (3) dem absoluten Betrage nach alle verschieden, so ist der Ausdruck (4) vorhanden und gleich einer jener Wurzeln. Die Lösungen der Poincaréschen Differenzengleichung (5) verhalten sich also asymptotisch wie die Lösungen der entsprechenden Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten.

Wenn  $q_0(s) \neq 0$

für  $s = 0, 1, 2, \dots$  bleibt, existieren immer Partikulärlösungen, für welche der Grenzwert (4) gleich einer beliebig angenommenen Wurzel  $a_j$  der charakteristischen Gleichung wird; für die allgemeine Lösung ist er im allgemeinen gleich der *absolut größten* Wurzel. Diejenige Partikulärlösung, für welche er gleich der *absolut kleinsten* Wurzel wird, heißt nach Pincherle die *ausgezeichnete Lösung*.

Kommen unter den Wurzeln der charakteristischen Gleichung solche von *gleichem Absolutbetrage* oder *zusammenfallende* vor, so braucht nach Perron, *J. f. Math.* **137**, 6 (1910), *Heidelb. Ber.*, Nr. 17 (1917) der Grenzwert (4) im Gegensatz zu den Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten für *keine einzige Lösung* zu existieren.

Statt des Grenzwertes (4) betrachtet man, um Fallunterscheidungen zu vermeiden, zweckmäßiger den Ausdruck

$$(6) \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sqrt[s]{|u(s)|}.$$



Für ihn gilt folgender Satz von Perron, *J. f. Math.* **137**, 6 (1910), *Math. Ann.* **84**, 1 (1921): Es seien  $\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_m$  die voneinander verschiedenen absoluten Beträge der Wurzeln der charakteristischen Gleichung (3) und  $e_i$  die Anzahl der Wurzeln vom Absolutbetrage  $\kappa_i$ , mehrfache mehrfach gezählt. Dann hat die Poincarésche Differenzengleichung (5) bei  $q_0(s) \neq 0$  ein Fundamentalsystem von Lösungen, die derart in  $m$  Klassen zerfallen, daß für die  $e_i$  Lösungen der  $i$ -ten Klasse und deren lineare Verbindungen der Ausdruck (6) den Wert  $\kappa_i$  hat.

Setzt man  $q_0(s) \neq 0$  nicht voraus, so ist bei jeder Lösung  $u(s)$ , die für unendlich viele  $s$  von 0 verschieden bleibt, der Ausdruck (6) jedenfalls gleich einem  $\kappa$ .

Anwendung findet dieser Satz zur Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe, deren Koeffizienten durch eine Poincarésche Differenzengleichung verbunden sind, und zur Bestimmung des Konvergenzgebietes von Reihen nach Entwicklungsfunktionen, die einer Poincaréschen Differenzengleichung genügen, z. B. Legendreschen Polynomen.

Weitere Untersuchungen aus dem Poincaréschen Gedankenkreise bei Ford, *Ann. di Mat.* (3) **13**, 263 (1907), *Trans. Am. M. S.* **10**, 319 (1909); Perron, *Math. Ver.* **19**, 129 (1910), *Acta Math.* **34**, 109 (1910), *J. f. Math.* **136**, 17 (1909), **147**, 36 (1917); van Vleck, *Trans. Am. M. S.* **13**, 342 (1912) und namentlich bei Späth, *Acta Math.* **51** (im Druck). Darstellung des Poincaréschen Satzes in anderem Zusammenhange S. 1242 f.

d) Fakultätenreihen als Koeffizienten. In der Differenzengleichung (2) sei der Koeffizient

$$(7) \quad Q_i(x) = \sum_{s=1}^i b_{i,i-s}(x-1)(x-2) \cdots (x-s) \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_{i,i+s}}{x(x+1) \cdots (x+s-1)}$$

zusammengesetzt aus einem Polynom  $i$ -ten Grades und einer etwa für  $\sigma > \lambda$  konvergenten Fakultätenreihe, oder es sei, was auf dasselbe hinauskommt, das Produkt  $x^{-i} Q_i(x)$  in eine Fakultätenreihe entwickelbar; ferner sei  $b_{n,0} \neq 0$ . Derartige Gleichungen bilden eine genau abgegrenzte Klasse von Differenzengleichungen. Durch einfache Transformationen läßt sich die „erste Normalform“

$$(8) \quad Q[u(x)] = \sum_{i=0}^n (-1)^i (x-1) \cdots (x-i) g_i(x) \underset{-1}{\Delta} u(x) = 0$$

mit

$$(9) \quad g_i(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{i,s}}{x(x+1) \cdots (x+s-1)}$$

herstellen, wobei noch  $g_n(x) = 1$  vorausgesetzt werden darf und die Reihen (9) in der Halbebene  $\sigma > \lambda$  konvergieren mögen.

Nörlund, *Diss.*, Kopenhagen 1910, *Pal. Circ. mat.* **35**, 177 (1913) setzt eine Lösung in der Form

$$u(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\varrho)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_{\nu}}{(x+\varrho) \cdots (x+\varrho+\nu-1)} \quad (d_0 \neq 0),$$

d. h. im wesentlichen als Fakultätenreihe an; der Faktor  $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\varrho)}$  entspricht dem Faktor  $x^{\varrho}$  bei dem analogen Potenzreihenansatz  $x^{\varrho} \mathfrak{P}(x)$  für Differentialgleichungen. Für die Koeffizienten  $d_{\nu}$  ergibt sich ein Rekursionssystem, und  $\varrho$  wird als Wurzel einer „*determinierenden Gleichung*“  $n$ -ten Grades bestimmt. Die Konvergenz beweist Nörlund durch ein *Majorantenverfahren*. Kommen unter den Wurzeln der determinierenden Gleichung solche vor, die sich voneinander um ganze Zahlen unterscheiden, so müssen Kunstgriffe angewandt werden (ähnlich wie in der Fuchs'schen Theorie).

Jedenfalls erhält man immer ein Fundamentalsystem von „*kanonischen Lösungen*“,  $u_1(x), \dots, u_n(x)$ , die sich im wesentlichen durch Fakultätenreihen darstellen lassen.

Wandert  $x$  in der Konvergenzhalbebene der Fakultätenreihen ins Unendliche, so streben die Fakultätenreihen gegen ihre konstanten Glieder  $e_0, e_1, \dots, e_k$ , woraus in Verfeinerung des Poincaréschen Satzes als *asymptotisches Verhalten der Lösungen*

$$(10) \quad u_k(x) \sim x^{-\varrho_k} (e_0 + e_1 \log x + \cdots + e_k \log^k x)$$

erhellt.

Sind die Koeffizienten  $g_0(x), g_1(x), \dots, g_{n-1}(x)$  der ersten Normalform in die ganze Ebene fortsetzbar mit den singulären Stellen  $\beta_1, \beta_2, \dots$  im Endlichen, so lassen sich die kanonischen Lösungen durch Auflösung der Differenzengleichung nach  $u(x)$  immer um einen Streifen von der Breite 1 nach links und so

allmählich über die ganze Ebene hin fortsetzen. Dabei treten *Pole in den Punkten*  $0, -1, -2, \dots$  und *Pole oder wesentlich singuläre Stellen in den Punkten*

$$\beta_i - s \quad (i = 1, 2, 3, \dots; s = n, n+1, n+2, \dots)$$

auf. Sonst sind die kanonischen Lösungen im Endlichen überall regulär.

Diese Sätze sind umkehrbar. *Die Differenzengleichungen (8) sind die allgemeinsten Differenzengleichungen, welche ein Fundamentalsystem von solchen wesentlich in Fakultätenreihen entwickelbaren Lösungen, wie sie sich für (8) ergeben, besitzen.*

Sind die Koeffizienten  $g_i(x)$  der ersten Normalform im Unendlichen regulär, so gibt es noch eine *zweite Normalform* und ein *zweites Fundamentalsystem kanonischer Lösungen*  $\bar{u}_k(x)$ , deren Fakultätenreihen von der Gestalt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\bar{d}_{\nu}}{(x-1)(x-2)\cdots(x-\nu)}$$

sind und in einer nach links unbegrenzten Halbebene konvergieren.

Zwischen den beiden kanonischen Lösungssystemen bestehen *lineare Relationen*

$$u_j(x) = \sum_{k=1}^n \pi_{j,k}(x) \bar{u}_k(x)$$

mit *periodischen Koeffizienten*  $\pi_{j,k}(x)$ . Die  $\pi_{j,k}(x)$  sind analytische Funktionen von  $z = e^{2\pi i x}$ , für  $z = 0$  und  $z = \infty$  regulär und in diesen Punkten für  $k \neq j$  Null, aber nicht für  $k = j$ . Hiernach gelten die asymptotischen Relationen (10) sogar für den Winkelraum

$$-\pi + \varepsilon < \arccos x < \pi - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

e) *Rationale Koeffizienten.* Reduziert sich in (7) die Fakultätenreihe auf ihr konstantes Glied, so wird (2) eine Differenzengleichung mit *rationalen Koeffizienten*. Etwas allgemeiner sei

$$(11) \quad Q_i(x) = \sum_{s=0}^{p-n+i} C_{i,s}(x-i)(x-i+1)\cdots(x-i+s-1)$$

$$(p \geq n, C_{i,s} \text{ Konstanten, } C_{n,p} = 1);$$

ferner seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  die Nullstellen von  $Q_n(x+n)$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  die Nullstellen von  $\sum_{i=0}^n Q_i(x)$ , nach abnehmendem bzw. zunehmendem Realteil geordnet.

Durch die *Laplacesche Transformation*

$$u(x) = \int t^{x-1} v(t) dt$$

läßt sich nach Nörlund, *Diss.*, Kopenhagen 1910, *Acta Math.* 40, 191 (1915) die *Auflösung der Differenzengleichung (2) auf die Integration der Differentialgleichung vom Fuchsschen Typus*

$$\sum_{i=0}^n \sum_{s=0}^p (-1)^s C_{i,s} t^{n+s-i} \frac{d^s [(t-1)^i v(t)]}{dt^s} = 0$$

mit den singulären Stellen 0, 1 und  $\infty$  zurückführen. Deren für  $t=1$  nicht reguläre Lösungen seien  $v_s(t)$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ).

Nimmt man als Integrationswege zwei Schleifen  $l$  und  $L$  von  $t=0$  bzw.  $t=\infty$  im positiven Sinne um  $t=1$  herum, so kommt man zum ersten und zweiten kanonischen Lösungssystem der Differenzengleichung (2) mit den Koeffizienten (11):

$$(12) \quad \begin{aligned} u_s(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_l t^{x-1} v_s(t) dt & (\sigma > \Re(\alpha_1)), \\ \bar{u}_s(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L t^{x-1} v_s(t) dt & (\sigma < \Re(\gamma_p)). \end{aligned}$$

Diese Integrale haben die Form der Integraldarstellung einer Fakultätenreihe. Sie führen zur Entwicklung der kanonischen Lösungen in *Fakultätenreihen*. Damit ist der Zusammenhang mit der Auflösungsmethode der Differenzengleichung (2) mittels Fakultätenreihen hergestellt, und vermöge der asymptotischen Eigenschaften der Fakultätenreihen kann das *asymptotische Verhalten* der kanonischen Lösungen beschrieben werden.

Ferner gestatten die Integraldarstellungen (12) die Darstellung der kanonischen Lösungen mittels *Partialbruchreihen*. Diese erweisen  $u_1(x), \dots, u_n(x)$ ;  $\bar{u}_1(x), \dots, \bar{u}_n(x)$  als *meromorphe Funktionen von  $x$  mit Polen in*

$$(13) \quad \alpha_i - \nu \text{ bzw. } \gamma_i + \nu \quad (i=1, 2, \dots, p; \nu=0, 1, \dots).$$

Mittels der Laplaceschen Transformation können allgemeiner von Differenzengleichungen (1) mit rationalen Koeffizienten die sog. *normalen Differenzengleichungen* behandelt werden, bei denen der Grad des ersten und letzten Koeffizienten  $p_0(x)$  und  $p_n(x)$  gleich  $p$  mit  $p > n$  ist, während der Grad der übrigen Koeffizienten  $p$  nicht übersteigt. Die kanonischen Lösungen werden wiederum durch *Schleifenintegrale* der Gestalt (12) von 0 bzw.  $\infty$  um die von 0 und  $\infty$  verschiedenen singulären Stellen der durch die Laplacesche Transformation entstehenden Differentialgleichung definiert. Sie lassen sich in *Fakultätenreihen* (hieraus Schluß auf das *asymptotische Verhalten*) und Partialbruchreihen entwickeln und sind *meromorphe Funktionen von  $x$  mit Polen in den Punkten* (13), wobei  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  und  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$  jetzt die Nullstellen von  $p_0(x)$  bzw.  $p_n(x - n)$  sind.

Zwischen den beiden kanonischen Lösungssystemen bestehen *lineare Relationen* von der Form

$$u_j(x) = \sum_{k=1}^n \pi_{j,k}(x) u_k(x)$$

mit *periodischen Koeffizienten*  $\pi_{j,k}(x)$ . Diese sind rationale Funktionen von  $e^{2\pi i x}$ , und die in sie eingehenden Konstanten können explizit angegeben werden. Die linearen Relationen ermöglichen die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der kanonischen Lösungen in erweitertem Umfange.

*Nicht normale Differenzengleichungen* sind z. B. von Galbrun, *Bull. Soc. M.* **49**, 206 (1921) studiert worden (Laplacesche Transformation, Entwicklung der Lösungen in divergente Potenzreihen).

Birkhoff nimmt in einer sehr schönen und tiefen Arbeit *Trans. Am. M. S.* **12**, 243 (1911), um die übersichtliche *Matrixbezeichnung* verwenden zu können, statt einer Differenzengleichung  $n$ -ter Ordnung ein *System von  $n$  Differenzengleichungen 1. Ordnung*, wobei die Koeffizienten als *rational* vorausgesetzt werden. Er bildet *zwei symbolische Matrixlösungen*, aus denen durch eine gewisse konvergenzerzeugende Abänderung die „*Hauptmatrixlösungen*“ hervorgehen. Diese sind *asymptotisch abschätzbar* und *hängen vermöge einer Matrix genau beschreibbarer periodischer Funktionen miteinander zusammen*. Umgekehrt ist durch die bei den *periodischen Funktionen* und beim *asymptotischen Verhalten* auftretenden „*charakteristischen*“ Konstanten das *Ausgangssystem*



von Differenzengleichungen bestimmt (*Riemannsches Problem für Differenzengleichungen*), Birkhoff, *Proc. Am. Ac. Arts Sc.* **49**, 521 (1914); s. auch Nörlund, *C. R.* **156**, 200 (1913), *Kopenh. Ber.*, **135** (1913).

Ältere Untersuchungen über Auflösung von Differenzengleichungen mittels *divergenter Potenzreihen* hauptsächlich von Horn, *Math. Ann.* **53**, 177 (1900), *J. f. Math.* **138**, 159 (1910); Galbrun, *C. R.* **148**, 905 (1909), **149**, 1046 (1909), **150**, 206 (1910), **151**, 1114 (1910), *Acta Math.* **36**, 1 (1913), *Bull. Soc. M.* **49**, 206 (1921); Carmichael, *Trans. Am. M. S.* **12**, 99 (1911), *Amer. J.* **35**, 163 (1913), **38**, 185 (1916); Erb, *Progr.*, Pirmasens 1912, *Diss.*, München 1913.

Für *spezielle Differenzengleichungen*, z. B. solche 1. Ordnung oder solche, die mit der *hypergeometrischen Funktion* in Zusammenhang stehen, vgl. Nörlund, *Enzykl.* II C 7 und das Literaturverzeichnis in Nörlund, *Differenzenrechnung* (Arbeiten z. B. von Barnes, Batchelder, Batemann, Ford, Fort, Gauß, Jackson, Mellin, Nörlund, Thomae, Wallenberg, Watson, Williams), für die reizvolle *Auflösung von Differenzengleichungen 2. Ordnung mittels Kettenbrüchen* (Sonderfall: Gauß' Entwicklung benachbarter *hypergeometrischer Funktionen (serierum contiguarum) in Kettenbrüche*) Nörlund, *Acta Math.* **34**, 1 (1910), *Differenzenrechnung*, Kap. 15, §§ 4 und 5, für *q-Differenzengleichungen* Carmichael, *Amer. J.* **34**, 147 (1912); Mason, *Amer. J.* **37**, 439 (1915); Ryde, *Diss.*, Lund 1921; Adams, *Diss.*, Cambridge (Mass.) 1922; Jackson, *Mess. of Math.* (2) **37**, 123, 145, 191 (1908), (2) **38**, 57, 62, 187 (1909), (2) **39**, 26, 145 (1910), (2) **40**, 92 (1911), (2) **47**, 57 (1917), (2) **50**, 101 (1920), *Edinb. R. S. Proc.* **30**, 378 (1910), *Pal. Circ. mat.* **29**, 340 (1910), *Amer. J.* **32**, 305 (1910), *Quart. J.* **41**, 193 (1910).

## § 10. Inhomogene lineare Differenzengleichungen.

Die *Auflösung einer inhomogenen linearen Differenzengleichung*

$$(1) \quad u(x+n) + \sum_{i=0}^{n-1} q_i(x)u(x+i) = \varphi(x)$$

läßt sich (analog wie bei der Methode der Variation der Konstanten für eine Differentialgleichung) auf die *Auflösung der homogenen Gleichung*



$$(2) \quad u(x+n) + \sum_{i=0}^{n-1} q_i(x) u(x+i) = 0$$

und Summationen (analog den Quadraturen) zurückführen (Verfahren von Lagrange). Es sei  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung, dann setze man eine Partikulärlösung  $U(x)$  der inhomogenen Gleichung in der Gestalt

$$(3) \quad U(x) = h_1(x) u_1(x) + h_2(x) u_2(x) + \dots + h_n(x) u_n(x)$$

mit zu bestimmenden Hilfsfunktionen  $h_i(x)$  an. Die Hilfsfunktion  $h_i(x)$  genügt der Gleichung

$$(4) \quad \Delta h_i(x) = \varphi(x) \mu_i(x).$$

Hierbei bedeuten die  $\mu_i(x)$  die „Multiplikatoren“ der homogenen Differenzengleichung, d. h. die Quotienten aus den Unterdeterminanten zur letzten Zeile in der Determinante

$$\begin{vmatrix} u_1(x+1) & u_2(x+1) & \dots & u_n(x+1) \\ u_1(x+2) & u_2(x+2) & \dots & u_n(x+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1(x+n) & u_2(x+n) & \dots & u_n(x+n) \end{vmatrix}$$

und der ganzen Determinante. Wofern das Produkt  $\varphi(x) \mu_i(x)$  summierbar ist, kann für  $h_i(x)$  die Summe  $\sum_a^x \varphi(z) \mu_i(z) \cdot \Delta z$  genommen werden

Die allgemeine Lösung von (1) lautet

$$u(x) = U(x) + \pi_1(x) u_1(x) + \pi_2(x) u_2(x) + \dots + \pi_n(x) u_n(x)$$

mit periodischen Funktionen  $\pi_1(x), \pi_2(x), \dots, \pi_n(x)$ .

Inhomogene Differenzengleichungen mit rationalen Koeffizienten und rationaler rechter Seite sind sehr eingehend von Williams, *Trans. Am. M. S.* **14**, 209 (1913) untersucht worden, der von einem System von Differenzengleichungen 1. Ordnung

$$(5) \quad \begin{aligned} g_i(x+1) &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) g_j(x) & (i=1, 2, \dots, n-1) \\ g_n(x+1) &= \sum_{j=1}^n a_{nj}(x) g_j(x) + b(x+1) \end{aligned}$$

mit rationalen  $a_{ij}(x)$  und rationalem  $b(x)$  ausgeht und ebenfalls die Methode von Lagrange verwendet. Für die Auf-

lösung des homogenen Systems stützt sich Williams auf die S. 1238 erwähnte Arbeit von Birkhoff, *Trans. Am. M. S.* **12**, 243 (1911); für die Bestimmung der Hilfsfunktionen in der Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung benutzt er ein Verfahren von Carmichael, *Trans. Am. M. S.* **12**, 99 (1911) zur Summation einer gegebenen Funktion mittels eines komplexen Integrals ähnlich dem Verfahren von Guichard, *Ann. éc. norm.* (3) **4**, 361 (1887) oder den Ausdruck (2), S. 1222 für die Summe von  $\varphi(x)$ . Mit diesen Mitteln werden zwei „Hauptlösungen“ des Systems aufgestellt, ihre Singularitäten, ihr asymptotisches Verhalten und ihre gegenseitige Beziehung genau beschrieben.

Hauptlösungen im Nörlundschen Sinne bei Bochner, *Acta Math.* **51** (im Druck).

Sonderuntersuchungen für Gleichungen mit konstanten Koeffizienten Nörlund, *Nyt Tidsskr. Mat.* **23** B, 53 (1912), *Differenzenrechnung*, 396. Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Lösungen, wenn  $\varphi(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  nach einem Grenzwert strebt, Walther, *Gött. Nachr.*, 104 (1926); Späth, *Gött. Nachr.*, 192 (1926), *Acta Math.* **51** (im Druck). Fastperiodisches  $\varphi(x)$  Walther, *Gött. Nachr.* 1927 (im Druck).

Von Interesse sind weiter die beiden Gleichungen

$$u(x+1) - xu(x) = \mp e^{-\varrho} \varrho^x.$$

Ihnen genügen die „unvollständigen Gammafunktionen“

$$P(x, \varrho) = \int_0^{\varrho} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (\Re(x) = \sigma > 0),$$

$$Q(x, \varrho) = \int_{\varrho}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

die durch Zerlegung des Integrationsweges im zweiten Eulerschen Integral für die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (\sigma > 0)$$

durch einen (zunächst positiv reell angenommenen) Punkt  $t = \varrho$  entstehen und Anlaß zu einer eigenen Theorie geben, vgl. z. B. Nielsen, *Handbuch d. Theorie d. Gammafunktion*, Leipzig 1906; Nörlund, *Differenzenrechnung*, 391; Lindhagen, *Diss.*, Stockholm 1887; Lerch, *J. f. Math.* **130**, 47 (1905); Gronwall, *Ann. éc. norm.* (3) **33**, 381 (1916); Walther, *Math. Ztschr.* **23**, 238 (1925); Rasch, *Kopenh. Ber.* **8**, Nr. 2 (1927); Rasch und

Hille, *Math. Ztschr.* (im Druck). Man kann bei ihnen auch  $x$  fest und  $\varrho$  veränderlich nehmen; dann stehen z. B.  $Q(0, \varrho)$  und  $Q(\frac{1}{2}, \varrho)$  in Beziehung zu dem *Integrallogarithmus* und dem *Fehlerintegral*.

Hilbsche Untersuchungen über inhomogene Differenzengleichungen § 11.

### § 11. Differenzengleichungen und unendliche Gleichungssysteme.

Differenzengleichungen hängen auf mannigfaltige Art mit Systemen von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten zusammen. Z. B. geht aus der linearen Differenzengleichung

$$\sum_{v=0}^n p_v(x) u(x+v) = \varphi(x),$$

wenn man statt  $x$  nacheinander  $x, x+1, x+2, \dots$  schreibt und  $p_v(x+\mu) = a_{\mu v}$ , ferner  $a_{\mu v} = 0$  für  $v > n$ ,  $u(x+\mu+v) = \xi_{\mu+v}$ ,  $\varphi(x+\mu) = \eta_\mu$  setzt, das Gleichungssystem

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_{\mu v} \xi_{\mu+v} = \eta_\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

hervor. Die Koeffizienten links von der Diagonale haben den Wert 0. Ein Gleichungssystem mit dieser Eigenschaft wird zuweilen als *Summengleichung* bezeichnet (Name wenig empfehlenswert). Horn, *J. f. Math.* **140**, 120 (1911), *Arch. Math. Phys.* (3) **26**, 132 (1917); v. Koch, *Proc. 5<sup>th</sup> Intern. Congr. math. Cambridge* **1**, 352 (1912), *Arkiv för Mat.* **15**, Nr. 26 (1921); Schürer, *Leipz. Ber.* **70**, 185 (1918); Perron, *Math. Ztschr.* **8**, 159 (1920), *Math. Ann.* **84**, 1 (1921).

Man kann hiernach die Theorie der Differenzengleichungen in der Weise aufbauen, daß man zuerst allgemeine Sätze über unendliche Gleichungssysteme herleitet und sie dann auf die mit Differenzengleichungen verknüpften Gleichungssysteme anwendet. So hat Perron, *Math. Ann.* **84**, 1 (1921) aus einem von ihm bewiesenen Existenzsatze über die allgemeine Lösung der „Summengleichung“

$$\sum_{v=0}^{\infty} (a_v + b_{\mu v}) \xi_{\mu+v} = \eta_\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

unter der Nebenbedingung  $\overline{\lim}_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt[\mu]{|\xi_\mu|} \leq 1$  und unter den Voraussetzungen

$$a_0 + b_{\mu 0} \neq 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots),$$

$$|b_{\mu \nu}| \leq k_\mu \vartheta^\nu \quad (\vartheta < 1, \lim_{\mu \rightarrow \infty} k_\mu = 0),$$

$$\overline{\lim}_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt[\mu]{|\eta_\mu|} \leq 1,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \text{ für } |z| \leq 1 \text{ regulär}$$

(die allgemeine Lösung ist dann von der Gestalt  $\xi_\nu = \xi_{\nu 0}$

+  $\sum_{\lambda=1}^n C_\lambda \xi_{\nu \lambda}$  mit so viel willkürlichen Konstanten  $C_\lambda$ , wie die letzte Potenzreihe Nullstellen für  $|z| \leq 1$  hat) in höchst eleganter Weise den Perronschen Satz über Poincarésche Differenzengleichungen gefolgert.

Systematisch ist ein derartiger Aufbau der Theorie der Differenzengleichungen (als Sonderfall linearer Funktionalgleichungen) von Hilb in Angriff genommen worden, *Math. Ann.* **85**, 89 (1922), *Math. Ztschr.* **14**, 211 (1922), **15**, 280 (1922), **19**, 136 (1924). Hilbs Ziel ist, die Lösungen von linearen Differenzengleichungen (homogenen wie inhomogenen) durch Grenzbedingungen eindeutig zu charakterisieren und zu vorgegebenen Grenzbedingungen die zugehörigen Lösungen zu konstruieren, sowie den Zusammenhang der Grenzbedingungen mit den „erzeugenden“ Operationen der Differenzengleichung und des unendlichen Gleichungssystems klarzulegen. Beispielsweise entfernt Hilb beim Summationsproblem die in die allgemeine Lösung eingehende periodische Funktion nicht ein für allemal, wie dies in der Nörlundschen Theorie geschieht, sondern sucht jede einzelne der unendlich vielen Lösungen, welche den verschiedenen periodischen Funktionen entsprechen, durch je eine Grenzbedingung zu charakterisieren und umgekehrt jeder Grenzbedingung eine Lösung zuzuordnen. Ferner wird von Hilb der Zusammenhang des Summationsproblems mit der funktionentheoretischen Fragestellung nach dem Existenzbereiche einer durch ein vorgelegtes Funktionselement definierten analytischen Funktion scharf unterstrichen. Vgl. Hilbs programmatische Ausführungen *Gött. gel. Anzeigen*, 57 (1925).



*Absolutbetrag*  $< q$  besitze und daß  $\frac{a(z_1)}{b'(z_1)} \neq 0, -1, -2, \dots$  sei. Dann ist die erzeugende Funktion  $h_\mu(z)$  ( $\mu = 0, 1, 2, \dots$ ) das einzige für  $|z| < q$  (also auch an der Stelle  $z_1$ ) reguläre Integral (3) der Differentialgleichung

$$(5) \quad ah_\mu + bh'_\mu = z^\mu.$$

Das Gleichungssystem für die Koeffizienten  $\alpha_{\mu\nu}$  hat zur Matrix die aus der Matrix von (1) durch Umklappung um die Diagonale hervorgehende Matrix; auf der rechten Seite steht eine 1 in der Zeile vom Zeiger  $\mu$  und sonst 0. Fällt  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{|\eta_\nu|} \leq q$  aus, so ist das mit Hilfe der erzeugenden Funktionen  $h_\mu(z)$  gewonnene Lösungssystem (2) das einzige mit  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt[\mu]{|\xi_\mu|} \leq q$ .

Die Anwendung auf das Summationsproblem (mit  $\omega = 1$ ) gestaltet sich folgendermaßen. Man denke sich die Differenzengleichung

$$(6) \quad u(x+1) - u(x) = \varphi(x)$$

durch die Operation  $Eu(x) = u(x+1)$  erzeugt. Durch immer wiederholte Anwendung dieser Operation ( $E^\mu u(x) = u(x+\mu)$ ) entsteht aus (6) ein Gleichungssystem analog (1) mit  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = a_3 = \dots = 0$ ,  $b_0 = b_1 = \dots = 0$ . Wegen  $a(z) = -1 + z$ ,  $b(z) = 0$  reduziert sich die Hilfsdifferentialgleichung (5) auf die gewöhnliche Gleichung  $(z-1)h_\mu(z) = z^\mu$ . Insbesondere ist

$h_0(z) = \frac{1}{z-1} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ ; die Lösung von (6) geht hieraus hervor, indem jede Potenz  $z^\nu$  durch  $E^\nu \varphi(x)$  ersetzt wird:

$$(7) \quad u(x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(x+\nu).$$

Bei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\varphi(x+n)|} < 1$  ist diese Lösung die einzige mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|E^n u(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u(x+n)|} < 1$ . Sie stimmt bis auf die

additive Konstante  $\int_a^\infty \varphi(z) dz$  mit der Nörlundschen Hauptlösung überein, deren weitere Theorie nun unter Festhaltung der Voraussetzung über  $\varphi(x)$  wie bei Nörlund entwickelt werden kann.



Nimmt man eine andere erzeugende Operation, so erhält man eine andere, ganz bestimmte Grenzbedingung und eine zugehörige Lösung. Dies wird von Hilb am Beispiele der *Differenzgleichung mit linearen Koeffizienten*

$$(8) \quad (ax + b) f(x + 1) + (cx + d) f(x) = \varphi(x)$$

eingehend untersucht und zwar zunächst für die Operationen

$$Ef(x) = f(x + 1), \quad \Delta_{c_0} f(x) = f(x + 1) - c_0 f(x), \quad Df(x) = \frac{d}{dx} f(x),$$

wobei die zugehörigen Gleichungssysteme die Unbekannten  $f(x)$ ,  $f(x + 1)$ ,  $f(x + 2)$ , ... bzw.  $f(x)$ ,  $\Delta_{c_0} f(x)$ ,  $\Delta_{c_0}^2 f(x)$ , ... bzw.  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ , ... haben. Werden für  $\varphi(x)$  bzw. die Grenzbedingungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|E^n \varphi(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\varphi(x + n)|} < q_1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\Delta_{c_0}^n \varphi(x)|} < q_2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|D^n \varphi(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\varphi^{(n)}(x)|} < q_3$$

mit gewissen, explizit angebbaren Konstanten  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  vorausgesetzt und einige kleine Nebenannahmen gemacht, so gibt es je eine und nur eine Lösung  $f(x)$  mit der entsprechenden Grenzbedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(x + n)|} < q_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\Delta_{c_0}^n f(x)|} < q_2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|} < q_3.$$

Diese Lösungen sind mittels der jeweils in Frage kommenden Operationen bzw. in den Gestalten

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \omega_{\nu}(x) \varphi(x + \nu), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_{\nu}(x) \Delta_{c_0}^{\nu} \varphi(x), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi_{\nu}(x) \varphi^{(\nu)}(x)$$

darstellbar. Dabei hängen die Hilfsdifferentialgleichungen für die erzeugenden Funktionen

$$h(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega_{\nu}(x) z^{\nu}, \quad k(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_{\nu}(x) u^{\nu}, \quad l(v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi_{\nu}(x) v^{\nu}$$

der Koeffizienten  $\omega_{\nu}(x)$ ,  $\psi_{\nu}(x)$ ,  $\chi_{\nu}(x)$  miteinander in eigenartiger Weise zusammen. Ihre linken Seiten gehen auseinander hervor,

indem man die unabhängige Veränderliche in analoger Weise transformiert, wie man symbolisch die zugehörigen Operationen auseinander gewinnt. Es ist  $\Delta_{c_0} \varphi(x) = E\varphi(x) - c_0 \varphi(x)$ , in leicht verständlicher Symbolik  $\Delta_{c_0} \varphi(x) = (E - c_0) \varphi(x)$  oder  $\Delta_{c_0} = E - c_0$ , ferner nach dem Taylorsche Satz  $E\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(\nu)}(x)}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{D^{\nu} \varphi(x)}{\nu!}$ , symbolisch  $E\varphi(x) = e^D \varphi(x)$  (man entwickle  $e^D$  nach Potenzen von  $D$ ) oder  $E = e^D$ .

Analog gelten, wie Hilb beweist, für die unabhängigen Veränderlichen  $z$ ,  $u$  und  $v$  in den entsprechenden Hilfsdifferentialgleichungen für  $h(z)$ ,  $k(u)$  und  $l(v)$  die Beziehungen

$$u = z - c_0, \quad z = e^v.$$

Allgemeiner übe man auf der linken Seite der Hilfsdifferentialgleichung für  $h(z)$  auf die Veränderliche  $z$  die analytische Transformation

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \xi^{\nu}, \quad \xi = \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_{\mu} (z - c_0)^{\mu+1}$$

unter passenden Konvergenzvoraussetzungen aus. Dann gehört die neue Hilfsdifferentialgleichung zu einer Operation, die durch die symbolische Gleichung

$$\mathcal{A} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_{\mu} (E - c_0)^{\mu+1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_{\mu} \Delta_{c_0}^{\mu+1}$$

definiert ist. Wenn für  $\varphi(x)$  die Bedingungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\Delta_{c_0}^n \varphi(x)|} < Z, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\mathcal{A}^n \varphi(x)|} < Z$$

mit geeignetem  $Z$  und  $Z$  erfüllt sind, liefert die Differentialgleichung die erzeugende Funktion derjenigen eindeutig bestimmten Lösung  $f(x)$  der Differenzengleichung (8), welche die analogen Grenzbedingungen mit  $f(x)$  statt  $\varphi(x)$  befriedigt.

Über die Bestimmung einer Lösung, welche in einer Halbebene bei wachsendem  $|x|$  gegen 0 geht, vgl. Hilb, *Math. Ztschr.* **14**, 211 (1922), über die Gleichungen  $f(x+1) + f(x) = \varphi(x)$  (wesentlich Nörlunds Gleichung für die Wechselsumme) und  $f(x+1) - xf(x) = \varphi(x)$  (für  $\varphi(x) = \mp e^{-1}$  Gleichungen für die unvollständigen Gammafunktionen  $P(x)$  und  $Q(x)$ ) Hilb, *Math. Ann.* **85**, 89 (1922).

Genügt die auf der rechten Seite der inhomogenen Differenzengleichung stehende Funktion nicht der ihr jeweils auferlegten Grenzbedingung, ist z. B. beim Summationsproblem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\varphi(x+n)|} \geq 1$ , so divergiert die für die zugehörige Lösung formal aufgestellte Reihe im allgemeinen. Dann führt Hilb einen Parameter  $\lambda$  ein und betrachtet z. B. beim Summationsproblem die Differenzengleichung

$$(9) \quad \lambda u(x) + u(x+1) = -\varphi(x).$$

Bei ihr liefert das Hilbsche Verfahren als Lösung zu einer Grenzbedingung vom Typus  $\sqrt[n]{|\varphi(x+n)|}$  die Reihe (analog der Neumannschen Reihe bei den Integralgleichungen)

$$(10) \quad u(x) = - \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \lambda^v \varphi(x+v).$$

Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\varphi(x+n)|} = h$ , so konvergiert die Reihe bekanntlich für  $|\lambda| < \frac{1}{h}$  und divergiert für  $|\lambda| > \frac{1}{h}$ . Für das Summationsproblem handelt es sich um ihr Verhalten an der Stelle  $\lambda = -1$ . Ist  $h < 1$ , so konvergiert die Reihe für  $\lambda = -1$ , und es ist nichts weiter zu sagen; ist hingegen  $h \geq 1$ , so liegt die *funktionentheoretische Fragestellung nach der analytischen Fortsetzung der durch die Potenzreihe (10) definierten analytischen Funktion von  $\lambda$  vor*, vgl. Bieberbach, *Enzykl.* II C 4, 460.

*Jeder Satz der Funktionentheorie, der aussagt, daß  $\lambda = -1$  dem Hauptsterne der durch die Potenzreihe als Funktionselement definierten analytischen Funktion von  $\lambda$  angehört, ist äquivalent einem Satze über die Existenz der Lösung beim Summationsproblem.* Damit ist auch die Verbindung zur Nörlundschen Theorie hergestellt, deren Grundansatz und Ausgangsüberlegung als besonders kräftiges Verfahren zur analytischen Fortsetzung erscheint; für Bemerkungen über das Nörlundsche Zusatzglied

$\int_a^{\infty} \varphi(z) dz$  vgl. Hilb, *Gött. gel. Anzeigen*, 65 (1925).

Mit Hilfe des *E*-Prozesses und des Parameters  $\lambda$  behandelt Hilb die *allgemeine lineare Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten*

$$(11) \quad \sum_{v=0}^m \lambda^v \sum_{p=0}^n a_{vp} x^p f(x+v) = \varphi(x).$$

Es sei  $\alpha_{0n} \neq 0$ , und es seien  $z_1, z_2, \dots, z_m$  die nach aufsteigendem Absolutbetrage geordneten Wurzeln der Gleichung

$\sum_{v=0}^m a_{vn} z^v = 0$ . Bei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\varphi(x+n)|} < \left| \frac{z_1}{\lambda} \right|$  hat die Differenzengleichung eine und nur eine Lösung von der Form

$$(12) \quad f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \varrho_v(x) \lambda^v \varphi(x+v)$$

mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(x+n)|} < \left| \frac{z_1}{\lambda} \right|$ . Ist hingegen die Grenzbedingung für  $\varphi(x)$  nicht erfüllt, so ist die Lösung (12) in der  $\lambda$ -Ebene höchstens in den Punkten  $\lambda_{\mu} z_{\nu}$  ( $\mu = 1, 2, \dots; \nu = 1, 2, \dots, m$ ) singular, wobei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  die singulären Stellen von  $\sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v \varphi(x+v)$  in der ganzen  $\lambda$ -Ebene sind.

Anwendung der Hilbschen Methode auf allgemeinere Funktionalgleichungen Hilb, *Math. Ztschr.* **19**, 136 (1924).

## Kapitel XXIV.

### Die Theorie der Integralgleichungen und Funktionen unendlichvieler Variablen und ihre Anwendung auf die Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.

Von *Hans Hahn* in Wien, *Leon Lichtenstein* in Leipzig und *Josef Lense* in München.<sup>1)</sup>

---

#### § 1. Die Fredholmsche Integralgleichung.

Man bezeichnet als *Fredholmsche Integralgleichung* (oder als lineare Integralgleichung zweiter Art) die Gleichung

$$(1a) \quad f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt.$$

Gegeben ist die Funktion  $K(s, t)$  — sie heißt der *Kern der Integralgleichung*, wir setzen sie zunächst als stetig voraus im Gebiete  $a \leq s \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$ ; ferner die Funktion  $f(s)$ , die im Intervalle  $(a, b)$  stetig sei; endlich bedeutet  $\lambda$  einen gleichfalls als gegeben zu betrachtenden Parameter; *gesucht* wird eine stetige Funktion  $\varphi(s)$  derart, daß Gleichung (1a) im Intervalle  $(a, b)$  identisch erfüllt ist.<sup>2)</sup>

Ist der Kern  $K(s, t)$  nicht symmetrisch ( $K(s, t) \neq K(t, s)$ ), so ist die Gleichung (1a) verschieden von der Gleichung

$$(1b) \quad f(s) = \psi(s) - \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt.$$

---

1) Von *Hahn* verfaßt sind §§ 1–6, 8 und ein Teil des § 7, von *Lichtenstein* der Schlußteil des § 7 und §§ 9–11, von *Lense* § 12; die Literaturangaben der Jahre 1909–1914 rühren her von *Lichtenstein*, die späteren im wesentlichen von *Lense*.

2) Die folgenden Sätze bleiben im wesentlichen bestehen, wenn man von  $f(s)$  und  $\varphi(s)$  nur voraussetzt, sie seien samt ihrem Quadrate integrierbar im Sinne von Lebesgue (vgl. S. 789).





Die Funktion  $D(\lambda)$  heißt die *Fredholmsche Determinante* der Integralgleichungen (1a) und (1b).

Da nach (6)  $D(0) \neq 0$  ist, läßt sich  $K(\lambda; s, t)$  in eine in der Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe entwickeln (die *Neumannsche Reihe*); dieselbe lautet

$$(8) \quad K(\lambda; s, t) = K_1(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \dots + \lambda^n K_{n+1}(s, t) + \dots$$

wo

$$(9) \quad K_1(s, t) = K(s, t),$$

$$K_{n+1}(s, t) = \int_a^b \dots (n) \dots \int_a^b K(s, r_1) K(r_1, r_2) \dots K(r_n, t) dr_1 dr_2 \dots dr_n$$

ist; die Funktion  $K_{n+1}(s, t)$  heißt der  $n^{\text{te}}$  iterierte Kern von  $K(s, t)$ . Für die iterierten Kerne gelten demnach die Rekursionsformeln

$$(10) \quad \begin{aligned} K_n(s, t) &= \int_a^b K_{n-1}(s, r) K(r, t) dr \\ &= \int_a^b K_{n-i}(s, r) K_i(r, t) dr = \int_a^b K(s, r) K_{n-1}(r, t) dr. \end{aligned}$$

Für die Auflösung der Gleichungen (1a) und (1b) sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem für den gegebenen Parameterwert  $\lambda$  die Determinante (6) unserer Integralgleichungen von Null verschieden oder Null ist. Im zweiten Falle heißt der Parameterwert  $\lambda$  *singulär*; er ist dann stets ein Pol des lösenden Kernes.

Erster Fall ( $D(\lambda) \neq 0$ ). In diesem Falle besitzt jede der beiden Gleichungen (1a) und (1b) bei beliebig gegebenem  $f(s)$  eine und nur eine Lösung, und diese Lösungen werden geliefert durch

$$(11a) \quad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(\lambda; s, r) f(r) dr,$$

$$(11b) \quad \psi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(\lambda; r, s) f(r) dr.$$

Ist  $D(\lambda) \neq 0$ , so besitzen die „homogenen“ Integralgleichungen

$$(12a) \quad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0$$

$$(12b) \quad \psi(s) - \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt = 0$$

keine von Null verschiedene Lösung.

Zweiter Fall ( $D(\lambda) = 0$ ). In diesem Falle besitzt jede der homogenen Integralgleichungen (12a) und (12b) von Null verschiedene Lösungen, und die inhomogenen Gleichungen (1a) und (1b) sind nicht bei beliebigem  $f(s)$  auflösbar. Das Nähere wird geliefert durch die folgenden Sätze.

Wir bilden (für  $k = 1, 2, \dots$  usf.) die Funktionen<sup>1)</sup>

$$(13) \quad D\left(\lambda; \begin{smallmatrix} s_1, s_2, \dots, s_k \\ t_1, t_2, \dots, t_k \end{smallmatrix}\right) = D(\lambda) \begin{vmatrix} K(\lambda; s_1, t_1) & K(\lambda; s_1, t_2) & \dots & K(\lambda; s_1, t_k) \\ K(\lambda; s_2, t_1) & K(\lambda; s_2, t_2) & \dots & K(\lambda; s_2, t_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(\lambda; s_k, t_1) & K(\lambda; s_k, t_2) & \dots & K(\lambda; s_k, t_k) \end{vmatrix};$$

es sind dies ganze Funktionen in  $\lambda$ , für die die Potenzreihenentwicklung gilt

$$(14) \quad D\left(\lambda; \begin{smallmatrix} s_1, s_2, \dots, s_k \\ t_1, t_2, \dots, t_k \end{smallmatrix}\right) = d_0\left(\begin{smallmatrix} s_1, \dots, s_k \\ t_1, \dots, t_k \end{smallmatrix}\right) - d_1\left(\begin{smallmatrix} s_1, \dots, s_k \\ t_1, \dots, t_k \end{smallmatrix}\right) \frac{\lambda}{1!} + \dots \\ + (-1)^n d_n\left(\begin{smallmatrix} s_1, \dots, s_k \\ t_1, \dots, t_k \end{smallmatrix}\right) \frac{\lambda^n}{n!} + \dots,$$

wo

$$(15) \quad \begin{cases} d_n\left(\begin{smallmatrix} s_1, \dots, s_k \\ t_1, \dots, t_k \end{smallmatrix}\right) = \int_a^b \dots \int_a^b (n) \dots \int_a^b K\left(\begin{smallmatrix} s_1, \dots, s_k, r_1, \dots, r_n \\ t_1, \dots, t_k, r_1, \dots, r_n \end{smallmatrix}\right) dr_1 \dots dr_n \\ \text{und} \\ d_0\left(\begin{smallmatrix} s_1, \dots, s_k \\ t_1, \dots, t_k \end{smallmatrix}\right) = K\left(\begin{smallmatrix} s_1, \dots, s_k \\ t_1, \dots, t_k \end{smallmatrix}\right). \end{cases}$$

Für keinen Wert von  $\lambda$  können die Funktionen (13) für alle Werte des Index  $k$  identisch in den Variablen  $s_1, \dots, s_k$ ,

1) Für  $k = 1$  erhalten wir die Funktion  $D(\lambda; s, t)$

$t_1, \dots, t_k$  verschwinden; und zwar findet sich, wenn  $\lambda$  eine  $i$ -fache Nullstelle von  $D(\lambda)$  ist, bereits unter den  $i$  ersten Funktionen (13) ( $k = 1, 2, \dots, i$ ) eine nicht verschwindende.

Sei also  $\lambda$  eine  $i$ -fache Nullstelle von  $D(\lambda)$ , und es sei  $D(\lambda; s_1, \dots, s_j) (j \leq i)$  die erste nicht identisch verschwindende der Funktionen (13). Wir wählen  $s_1^0, \dots, s_j^0, t_1^0, \dots, t_j^0$  so, daß  $D(\lambda; s_1^0, \dots, s_j^0; t_1^0, \dots, t_j^0) \neq 0$ , und setzen

$$(16a) \quad \begin{cases} \varphi_1(s) = D(\lambda; s, s_2^0, \dots, s_j^0; t_1^0, t_2^0, \dots, t_j^0), \dots \\ \varphi_j(s) = D(\lambda; s_1^0, \dots, s_{j-1}^0, s; t_1^0, \dots, t_{j-1}^0, t_j^0), \end{cases}$$

$$(16b) \quad \begin{cases} \psi_1(s) = D(\lambda; s_1^0, s_2^0, \dots, s_j^0; s, t_2^0, \dots, t_j^0), \dots \\ \psi_j(s) = D(\lambda; s_1^0, \dots, s_{j-1}^0, s_j^0; t_1^0, \dots, t_{j-1}^0, s). \end{cases}$$

Dann sind die  $j$  Funktionen (16a), und ebenso die  $j$  Funktionen (16b) untereinander linear unabhängig, und es genügen die Funktionen (16a) der homogenen Integralgleichung (12a), die Funktionen (16b) der homogenen Integralgleichung (12b). Umgekehrt läßt sich jede Lösung der Gleichung (12a), bzw. (12b) linear mit konstanten Koeffizienten durch die Funktionen (16a), bzw. (16b) ausdrücken.

Jede der Gleichung (12a) bzw. (12b) genügende nicht verschwindende Funktion heißt eine zum singulären Parameterwert  $\lambda$  gehörige Nulllösung unseres Kernes  $K(s, t)$  in  $s$ , bzw. in  $t$ . Zu jedem singulären Parameterwert gibt es also gleichviel unabhängige Nulllösungen in  $s$  und in  $t$ .

Ist  $\lambda$  ein singulärer Parameterwert, so ist zur Auflösbarkeit der inhomogenen Integralgleichung (1a) notwendig und hinreichend, daß  $f(s)$  orthogonal<sup>1)</sup> ist in bezug auf das Intervall  $(a, b)$  zu allen Nulllösungen in  $t$  von  $K(s, t)$ ; ebenso zur Auflösbarkeit

1) Wir nennen hier wie im folgenden die Funktion  $f(s)$  orthogonal in bezug auf das Intervall  $(a, b)$  zur Funktion  $g(s)$ , wenn  $\int_a^b f(s)g(s)ds = 0$  ist.

von (1b), daß  $f(s)$  orthogonal ist zu allen Nulllösungen in  $s$ . Die Auflösung wird geliefert durch die Formeln

$$(17a) \quad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \frac{D\left(\lambda; \begin{smallmatrix} s, s_1^0, \dots, s_j^0 \\ r, t_1^0, \dots, t_j^0 \end{smallmatrix}\right)}{D\left(\lambda; \begin{smallmatrix} s_1^0, \dots, s_j^0 \\ t_1^0, \dots, t_j^0 \end{smallmatrix}\right)} f(r) dr \\ + \tau_1 \varphi_1(s) + \dots + \tau_j \varphi_j(s),$$

$$(17b) \quad \psi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \frac{D\left(\lambda; \begin{smallmatrix} r, s_1^0, \dots, s_j^0 \\ s, t_1^0, \dots, t_j^0 \end{smallmatrix}\right)}{D\left(\lambda; \begin{smallmatrix} s_1^0, \dots, s_j^0 \\ t_1^0, \dots, t_j^0 \end{smallmatrix}\right)} f(r) dr \\ + \tau_1 \psi_1(s) + \dots + \tau_j \psi_j(s),$$

wo  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j$  willkürliche Konstante bedeuten.

Ist  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu, \dots$  die Folge der Nullstellen von  $D(\lambda)$ , jede so oft geschrieben, als es ihre Vielfachheit anzeigt, so ist

$\sum \frac{1}{|\lambda_\nu|^2}$  konvergent, und zwar

$$\sum \frac{1}{|\lambda_\nu|^2} \leq \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt.$$

(I. Schur, *Math. Ann.* **66** (1908), 508).

Die im Obigen dargestellte Auflösung der linearen Integralgleichungen zweiter Art rührt her von Fredholm (*Acta Math.* **27**, (1903) 365. Man gelangt zu den Fredholmschen Formeln, indem man das Intervall  $(a, b)$  durch die Punkte  $s_1, \dots, s_n$  (bzw.  $t_1, \dots, t_n$ ) in  $n$  gleiche Teile teilt, die Integralgleichung (1a) näherungsweise ersetzt durch das System linearer Gleichungen

$$(18) \quad f(s_k) = \varphi(s_k) - \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n K(s_k, t_i) \varphi(t_i) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

und mit  $n$  zur Grenze  $\infty$  übergeht, wobei das Gleichungssystem (18) in (1a), seine Determinante in  $D(\lambda)$ , seine Lösungen in die oben gegebenen Lösungen von (1a) übergehen. Hilbert, *Gött. Nachr.* 1904, 49; Bôcher, *An introduction to the study of integral equations*, Cambridge 1909; Kowalewski, *Ein-*

*führung in die Determinantentheorie*, Leipzig 1909, Kap. XVIII, 2. Aufl. 1925, Kap. XVI; Horn, *Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen*, Leipzig 1910, Kap. V—VII. Ein eingehendes Studium der Fredholmschen Formeln bei Plemelj, *Monatsh.* **15** (1904), 93; Goursat, *Ann. de Toul.* (2) **10** (1908), 5.

Andere Methoden zur Behandlung der Fredholmschen Gleichung bei: Goursat, *Bull. soc. math.* **35** (1907), 163; Lebesgue, *Bull. soc. math.* **36** (1908), 3; Schmidt, *Math. Ann.* **64** (1907), 161; Orlando, *Giorn. di mat.* **46** (1908), 173; v. Koch, *Palermo Rend.* **28** (1909), 255; Carleman, *C. R.* **169** (1919), 773, *Math. Zeitschr.* **9** (1921), 196; Bateman, *Proc. of Roy. Soc. London (A)* **100** (1921), 441; Nanni, *Giorn. di Mat.* **68** (1920), 125; Takenaka, *Tôhoku Math. Journ.* **23** (1923), 167; Hitchcock, *Journ. Math. Phys. (Mass.)* **2** (1923) 88; Courant, *Math. Ann.* **89** (1923), 161; Enskog, *Math. Zeitschr.* **24** (1926), 670; **25** (1926), 299.

Für die Auflösung von Integralgleichungen mit  $n$ -fachen Integralen der Form

$$f(s_1, \dots, s_n) = \varphi(s_1, \dots, s_n) - \lambda \int \dots (n) \dots \int K(s_1, \dots, s_n; t_1, \dots, t_n) \varphi(t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n,$$

wo sich die Integration über ein  $n$ -dimensionales Gebiet erstreckt, gelten ganz analoge Formeln.

In den Anwendungen tritt häufig der Fall auf, daß der Kern für  $s = t$  unendlich wird. Ist  $\beta$  irgendeine Zahl  $< \alpha$  und bleibt das Produkt  $|s - t|^\beta |K(s, t)|$  endlich für  $s = t$ , so sagt man, der Kern wird für  $s = t$  von geringerer als der  $\alpha^{\text{ten}}$  Ordnung unendlich.<sup>1)</sup> Es kann sein, daß, wenn  $K(s, t)$  unendlich wird, einer der durch die Rekursionsformeln (9) definierten iterierten Kerne endlich bleibt. Das ist stets der Fall, wenn  $K(s, t)$  nur für  $s = t$ , und zwar von geringerer als der ersten Ordnung unendlich wird; insbesondere ist  $K_2(s, t)$  endlich, wenn  $K(s, t)$  von geringerer als  $\frac{1}{2}^{\text{ter}}$  Ordnung unendlich wird. Ist  $K_n(s, t)$  der erste endliche unter den iterierten Kernen, und  $K_n(\lambda; s, t)$  der

1) Im Falle eines  $n$ -fachen Integrales heißt  $K(s_1, \dots, s_n; t_1, \dots, t_n)$  von geringerer als  $\alpha^{\text{ter}}$  Ordnung unendlich für  $s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n$ , wenn  $r^\beta K(s_1, \dots, s_n; t_1, \dots, t_n)$  endlich bleibt, wo  $\beta < \alpha$  und:

$$r = \sqrt{(s_1 - t_1)^2 + \dots + (s_n - t_n)^2}.$$

zu  $K_n(s, t)$  gehörige lösende Kern, so werden die Gleichungen (2) gelöst durch

$$\begin{aligned} K(\lambda; s, t) &= k_n(\lambda; s, t) + \lambda^n \int_a^b k_n(\lambda; s, r) K_n(\lambda^n; r, t) dr \\ (19) \quad &= k_n(\lambda; s, t) + \lambda^n \int_a^b K_n(\lambda^n; s, r) k_n(\lambda; r, t) dr. \end{aligned}$$

$$(20) \quad k_n(\lambda; s, t) = K_1(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(s, t).$$

Die Werte des Parameters  $\lambda$  zerfallen wieder in gewöhnliche und singuläre, je nachdem für den betreffenden Wert der lösende Kern (20) regulär ist oder einen Pol hat. Im ersten Falle haben die Gleichungen (1) bei beliebigem  $f(s)$  eine und nur eine Lösung, die homogenen Gleichungen (12) daher nur die Lösung Null; im zweiten Falle haben die Gleichungen (12) mindestens je eine von Null verschiedene Lösung. Vgl. Fredholm, a. a. O., 384; Goursat, a. a. O., 16, 68. Weiteres über unstetige Kerne: Hilbert, *Gött. Nachr.* 1904, 81; E. E. Levi, *Rom. Rend. Linc.* (5) **16**<sub>2</sub> (1907), 604; Picard, *C. R.* **152** (1911), 1545; **153** (1911), 529, 615; *Ann. École Norm.* (3) **18** (1901), 459; Fubini, *Rom. Rend. Linc.* (5) **21**<sub>1</sub> (1912), 325; Hobson, *Lond. M. S. Proc.* (2) **13** (1914), 307, **14** (1914), 5; Noether, *Math. Ann.* **82** (1921), 42; Hecke, *Math. Zeitschr.* **12** (1922), 274.

Die Lösung eines Systems von Integralgleichungen der Form

$$(21) \quad f_i(s) = \varphi_i(s) - \int_a^b \sum_{k=1}^n K_{ik}(s, t) \varphi_k(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

wird zurückgeführt auf die Lösung der einen Gleichung

$$(22) \quad f(s) = \varphi(s) - \int_a^{a+n(b-a)} K(s, t) \varphi(t) dt,$$

indem man setzt (Fredholm, a. a. O., 378)

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(s) = f_i(s - (i-1)(b-a)) \\ \varphi(s) = \varphi_i(s - (i-1)(b-a)) \\ \text{für } a + (i-1)(b-a) \leq s < a + i(b-a), \\ K(s, t) = K_{ik}(s - (i-1)(b-a), t - (k-1)(b-a)) \\ \text{für } \begin{cases} a + (i-1)(b-a) \leq s < a + i(b-a) \\ a + (k-1)(b-a) \leq t < a + k(b-a). \end{cases} \end{array} \right.$$



Eine Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen gibt Schmidt, *Math. Ann.* **65** (1908), 370. Vgl. auch d'Adhémar, *Bull. soc. math.* **36** (1908), 195; Bratu, *C. R.* **150** (1910), 896; Cotton, *C. R.* **150** (1910), 511; Bucht, *Arkiv f. Mat.* **8** (1912), Nr. 8; Picone, *Rend. Palermo* **30** (1910), 349; **31** (1911), 133; Vergerio, *Ann. di Mat.* (3) **31** (1922), 81.

### Lehrbücher und Monographien:

Korn, *Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig 1910; Hahn, *Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig 1911; Kneser, *Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik*, Braunschweig 1911, 2. Aufl. 1922; Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig 1912; Heywood et Fréchet, *L'Équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique*, Paris 1912; Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégral-différentielles*, Paris 1912; Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, Paris 1912; daselbst ein vollständiges Literaturverzeichnis (bis 1911 einschließlich). Vivanti, *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari* (Manuali Hoepli), Mailand 1916; Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, Bd. 3, Paris 1923; Courant-Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. 1, Berlin 1924; v. Mises-Frank, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, Bd. 1, Braunschweig 1925; Hellinger-Toeplitz, *Enzykl.* II C 13.

### § 2. Die Gleichungen von Volterra.

Man erhält aus der Gleichung (1a) als Spezialfall die Integralgleichung mit variabler oberer Grenze

$$(24) \quad f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^s K(s, t) \varphi(t) dt,$$

indem man annimmt<sup>1)</sup>, in (1a) sei  $K(s, t) = 0$  für  $s < t \leq b$ . Die aus (8) sich ergebende Potenzreihe für  $K(\lambda; s, t)$  ist in diesem Falle für alle  $\lambda$  konvergent, die Gleichung (24) besitzt

1) Die dabei entlang der Geraden  $s = t$  auftretende Unstetigkeit von  $K(s, t)$  stört nicht die Gültigkeit der Formeln von § 1. Vgl. die in § 1 angegebene Literatur über unstetige Kerne.

mithin keine singulären  $\lambda$ -Werte, und aus (11a) ergibt sich die Lösung von (24) als ganze Funktion von  $\lambda$ .

Auf die Auflösung einer Gleichung der Form (24) läßt sich die Aufgabe zurückführen, bei gegebenem  $g(s)$  und  $H(s, t)$  die Funktion  $\chi(s)$  so zu bestimmen, daß im Intervalle  $(a, b)$  identisch in  $s$  die Gleichung besteht

$$(25) \quad g(s) - g(a) = \int_a^s H(s, t) \chi(t) dt.$$

Die Gleichung (25) heißt *Integralgleichung von Volterra*. Ihre Auflösung wird auch als *Umkehrung* des auf ihrer rechten Seite stehenden *bestimmten Integrals* bezeichnet. Wir setzen voraus, im Intervalle  $(a, b)$  sei  $g(s)$  samt dem ersten Differentialquotienten  $g'(s)$  stetig, und  $H(s, s) \neq 0$ ;  $H(s, t)$  und  $\frac{\partial H}{\partial s}$  seien für  $a \leq s \leq b$ ;  $a \leq t \leq s$  stetig.

Durch Differentiation erhält man aus (25)

$$(26) \quad g'(s) = H(s, s) \chi(s) + \int_a^s \frac{\partial H(s, t)}{\partial s} \chi(t) dt,$$

und diese Gleichung nimmt für

$$H(s, s) \chi(s) = \varphi(s); \quad -\frac{\partial H(s, t)}{\partial s} : H(t, t) = K(s, t)$$

die Form (24) an (mit  $\lambda = 1$ ), so daß wir den Satz erhalten:

*Die Gleichung (25) besitzt eine und nur eine stetige Lösung die gegeben ist durch die Formel*

$$(27) \quad \chi(s) = \frac{g'(s)}{H(s, s)} + \frac{1}{H(s, s)} \int_a^s g'(t) \sum_{v=1}^{\infty} h_v(s, t) dt,$$

wo die  $h_v(s, t)$  sich durch die Rekursionsformel bestimmen

$$(28) \quad \begin{aligned} h_1(s, t) &= -\frac{\partial H(s, t)}{\partial s} : H(t, t), \dots \\ h_v(s, t) &= \int_t^s h_{v-1}(s, r) h_1(r, t) dr. \end{aligned}$$

Ist außer den obigen Voraussetzungen auch  $\frac{\partial H}{\partial t}$  und  $\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t}$  stetig im oben angeführten Bereiche, so erhält man die Lösung von (25) in anderer Form, indem man von (25) durch partielle Integration übergeht zu

$$(29) \quad g(s) - g(a) = H(s, s)X(s) - \int_a^s \frac{\partial H(s, t)}{\partial t} X(t) dt,$$

wo

$$X(s) = \int_a^s \chi(s) ds$$

gesetzt ist. Löst man (29) analog auf wie eben (26), so erhält man

$$(30) \quad \chi(s) = \frac{d}{ds} \left\{ \frac{g(s) - g(a)}{H(s, s)} + \frac{1}{H(s, s)} \int_a^s (g(t) - g(a)) \sum_{v=1}^{\infty} \bar{h}_v(s, t) dt \right\}$$

wo die  $\bar{h}_v(s, t)$  sich durch die Rekursionsformel bestimmen

$$(31) \quad \bar{h}_1(s, t) = \frac{\partial H(s, t)}{\partial t} : H(t, t); \quad \bar{h}_v(s, t) = \int_i^s \bar{h}_{v-1}(s, r) \bar{h}_1(r, t) dr$$

Der Fall, daß in (25)  $H(s, t)$  die Form hat

$$(32) \quad H(s, t) = \frac{G(s, t)}{(s-t)^\alpha} \quad (\alpha < 1),$$

wo nun für  $G(s, t)$  die oben für  $H(s, t)$  gemachten Voraussetzungen gelten (insbesondere also  $G(s, s)$  endlich und von Null verschieden ist), läßt sich auf den eben behandelten zurückführen: man multipliziert die Gleichung (25) mit  $\frac{1}{(r-s)^{1-\alpha}}$  und integriert von  $a$  bis  $r$ ; setzt man dann

$$(33) \quad \int_a^r \frac{g(s) - g(a)}{(r-s)^{1-\alpha}} ds = h(r),$$

$$(34) \quad \begin{aligned} \int_i^r \frac{H(s, t)}{(r-s)^{1-\alpha}} ds &= \int_i^r \frac{G(s, t)}{(r-s)^{1-\alpha} (s-t)^\alpha} ds \\ &= \int_0^1 \frac{G((r-t)u + t, t)}{(1-u)^{1-\alpha} u^\alpha} du = L(r, t), \end{aligned}$$

so wird

$$(35) \quad L(s, s) = \int_0^1 \frac{G(s, s)}{(1-u)^{1-\alpha} u^\alpha} du = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} G(s, s)$$

und (25) geht in die der obigen Methode zugängliche Gleichung über

$$(36) \quad h(s) = \int_a^s L(s, t) \chi(t) dt.$$

Die Anwendung der Formeln (27), (28) (bzw. (30), (31)) auf (36) liefert (nach einigen Umformungen):

Die Gleichung (25) besitzt, wenn  $H(s, t)$  die Form (32) hat, eine und nur eine stetige Lösung, die durch jede der beiden Formeln geliefert wird

$$(37) \quad \chi(s) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{1}{G(s, s)} \int_a^s g'(t) \left\{ \frac{1}{(s-t)^{1-\alpha}} + \sum_{v=1}^{\infty} \int_t^s \frac{l_v(s, r) dr}{(r-t)^{1-\alpha}} \right\} dt,$$

wo die  $l_v(s, r)$  sich durch die Rekursionsformel bestimmen

$$(38) \quad \begin{aligned} l_1(s, r) &= -\frac{\partial L(s, r)}{\partial s} : L(r, r), \\ l_v(s, r) &= \int_r^s l_{v-1}(s, t) l_1(t, r) dt \end{aligned}$$

und

$$(39) \quad \chi(s) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{G(s, s)} \int_a^s (g(t) - g(a)) \left[ \frac{1}{(s-t)^{1-\alpha}} + \sum_{v=1}^{\infty} \int_t^s \frac{\bar{l}_v(s, r) dr}{(r-t)^{1-\alpha}} \right] dt \right\},$$

wo die  $\bar{l}_v(s, r)$  sich durch die Rekursionsformel bestimmen

$$(40) \quad \begin{aligned} \bar{l}_1(s, r) &= \frac{\partial H(s, r)}{\partial r} : H(r, r), \\ \bar{l}_v(s, r) &= \int_r^s \bar{l}_{v-1}(s, t) \bar{l}_1(t, r) dt. \end{aligned}$$

Für  $G(s, t) = 1$  liefern die Formeln (37) und (39) den Satz von Abel (*J. f. Math.* **1** (1826), 153; *Œuvres* **1**, 97):

Die beiden Gleichungen

$$(41) \quad \begin{aligned} f(s) - f(a) &= \int_a^s \frac{\varphi'(t) dt}{(s-t)^\alpha}, \\ \varphi(s) - \varphi(a) &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^s \frac{f(t) - f(a)}{(s-t)^{1-\alpha}} dt \end{aligned}$$

lösen sich gegenseitig auf. (Vgl. hierzu Goursat, *Acta math.* **27** (1903), 131; Bôcher, *Introd. to the study of int. equ.*, 6; Patrick-Browne, *Toulouse Ann.* (3) **4** (1912), 63; Carleman, *Math. Zeitschr.* **15** (1922), 111).

Die im Obigen angegebene Theorie der Gleichung (25) wurde entwickelt von Volterra, *Atti Torino* **31** (1896), 311, 400, 557, 693; *Rom. Rend. Acc. Linc.* (5) **5**<sub>1</sub> (1896), 177, 289; *Ann. di mat.* (2) **25** (1897), 139; in der letzteren Arbeit ein Verzeichnis der Literatur des Gegenstandes. In den genannten Arbeiten ist auch der Fall behandelt, daß  $H(s, s)$  für einzelne Werte von  $s$  verschwindet. Ein genaues Studium der Volterra-schen Gleichung: Lalesco, *J. de math.* (6) **4** (1908), 125.

Weitere Literatur über die Gleichungen von Volterra und verwandte Probleme: Picone, *Rom. Rend. Acc. Lincei* (5) **19**<sub>2</sub> (1910), 259; *Giorn. di Mat.* (3) **49** (1911), 173; *Rend. Palermo* **30** (1910), 349; **31** (1911), 133; Horn, *Journ. f. Math.* **140** (1911), 120, 159; Evans, *Trans. of the Amer. math. Soc.* **11** (1910), 393; **12** (1911), 429.

Die Gleichung von Volterra ist ein Spezialfall der *linearen Integralgleichungen erster Art*

$$f(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt,$$

auf die wir noch in § 3 zu sprechen kommen; wegen der Literatur verweisen wir auf Pincherle, *Enzykl.* II A 11, 28—30.

### § 3. Die orthogonale Integralgleichung. Eigenwerte eines reellen unsymmetrischen Kernes.

Eine lineare Integralgleichung zweiter Art wird als *orthogonale Integralgleichung* bezeichnet, wenn ihr Kern *symmetrisch* ist, d. h. wenn  $K(s, t) = K(t, s)$ . Die beiden Gleichungen (1a) und (1b) sind dann identisch. Jede Nulllösung in  $s$  ist auch eine Nulllösung in  $t$ .

Wir setzen in diesem Paragraphen den Kern durchweg als *reell*, endlich und stetig voraus, doch bleiben die Sätze mit geringen Modifikationen bestehen, wenn der Kern von niedrigerer als der  $\frac{1}{2}$ ten Ordnung unendlich wird.

Die singulären Parameterwerte der orthogonalen Integralgleichung

$$(42) \quad f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

heißen die *Eigenwerte* des Kernes<sup>1)</sup>  $K(s, t)$  (bezüglich des Intervalles  $(a, b)$ ), die zugehörigen Nulllösungen seine<sup>1)</sup> *Eigenfunktionen*.

Ein *symmetrischer Kern* besitzt (bezüglich des Intervalles  $(a, b)$ ) mindestens einen *Eigenwert*; damit er nur eine endliche Anzahl  $n$  von *Eigenwerten* besitze, ist notwendig und hinreichend, daß er sich in der Form darstellen läßt

$$(43) \quad K(s, t) = u_1(s)u_1(t) + u_2(s)u_2(t) + \cdots + u_n(s)u_n(t),$$

wo die  $u_i(s)$  linear unabhängige stetige Funktionen bedeuten, die zueinander orthogonal sind in bezug auf das Intervall  $(a, b)$ .

Sämtliche *Eigenwerte* eines *symmetrischen Kernes* sind *reell*. Zwei zu verschiedenen *Eigenwerten* gehörige *Eigenfunktionen* sind zueinander *orthogonal*.

Der zu einem *symmetrischen Kerne* gehörige lösende Kern ist ebenfalls *symmetrisch* und hat nur Pole 1. Ordnung.

Ist  $\lambda_0$  eine  $i$ -fache Nullstelle der Determinante  $D(\lambda)$  einer *orthogonalen Integralgleichung*, so gehören zu  $\lambda_0$  genau  $i$  linear unabhängige *Eigenfunktionen*.

In diesem Falle heißt  $\lambda_0$  ein  $i$ -facher *Eigenwert*; unter den zugehörigen *Eigenfunktionen* kann man  $i$  Funktionen so auswählen, daß sie zu je zweien orthogonal sind. Durch Multipli-

---

1) Oder der Integralgleichung (42).



kation mit einer Konstanten kann man erreichen, daß sie der Bedingung genügen<sup>1)</sup>

$$(44) \quad \int_a^b (\varphi(s))^2 ds = 1.$$

Macht man das für jeden Eigenwert, so erhält man eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Eigenfunktionen

$$(45) \quad \varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots,$$

die sämtlich normiert und zu je zweien orthogonal sind. Wir nennen sie dann: *ein normiertes Orthogonalsystem des Kernes*  $K(s, t)$  (bezüglich des Intervalles  $(a, b)$ ).

Sei  $f(s)$  eine Funktion, die im Intervalle  $(a, b)$  samt ihrem Quadrate integrabel ist im Sinne von Lebesgue<sup>2)</sup>; die Zahlen

$$(46) \quad c_n = \int_a^b f(s) \varphi_n(s) ds \quad (n = 1, 2, \dots)$$

heißen die *Fourierkonstanten*<sup>3)</sup> der Funktion  $f(s)$  in bezug auf das normierte Orthogonalsystem (45).

Sind  $c_n$  die Fourierkonstanten von  $f(s)$ ,  $c'_n$  die von  $g(s)$ ,  $\lambda_n$  der zu  $\varphi_n(s)$  gehörige Eigenwert von  $K(s, t)$ , so ist

$$(47) \quad \int_0^1 \int_0^1 K(s, t) f(s) g(t) ds dt = \frac{c_1 c'_1}{\lambda_1} + \frac{c_2 c'_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{c_n c'_n}{\lambda_n} + \dots$$

Ist die stetige Funktion  $f(s)$  mit Hilfe einer Funktion<sup>2)</sup>  $h(s)$  darstellbar in der Form

$$(48) \quad f(s) = \int_a^b K(s, t) h(t) dt,$$

so ist im Intervalle  $(a, b)$

$$(49) \quad f(s) = c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) + \dots + c_n \varphi_n(s) + \dots$$

und die rechts stehende Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

1) Eine dieser Bedingung genügende Funktion nennen wir *normiert* (bezüglich des Intervalles  $(a, b)$ ).

2) Wo im Folgenden von Funktionen einer Veränderlichen schlechtweg die Rede ist, sind immer Funktionen gemeint, die in  $(a, b)$  samt ihrem Quadrate integrabel sind im Sinne von Lebesgue.

3) Wegen ihrer Ähnlichkeit mit den Koeffizienten der Fourierschen (trigonometrischen) Reihe von  $f(s)$ . Vgl. Kap. XXV.

Es gilt die Gleichung

$$(50) \quad K(s, t) = \frac{\varphi_1(s) \varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s) \varphi_2(t)}{\lambda_2} + \dots + \frac{\varphi_n(s) \varphi_n(t)}{\lambda_n} + \dots,$$

falls die rechts stehende Reihe für  $a \leq s \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$  gleichmäßig konvergiert. Das ist der Fall, wie J. Mercer gezeigt hat (Phil. Trans. 209 (1909) A, 415), wenn der Kern  $K(s, t)$  von positivem Typus ist (siehe unten, Formel (54)); ferner, wenn  $K(s, t)$  der verallgemeinerten Lipschitz-Bedingung genügt

$$\int_a^b \left( \frac{K(s_1, t) - K(s_2, t)}{s_1 - s_2} \right)^2 dt \leq c \quad (a \leq s_1 \leq b, a \leq s_2 \leq b, s_1 \neq s_2),$$

wo  $c$  eine Konstante bedeutet (Hammerstein, Berliner Berichte 1923, 181).

Für die (gleichfalls symmetrischen) iterierten Kerne  $K_i(s, t)$  (siehe Gleichung (9)) gelten (für  $i > 1$ ) stets die gleichmäßig konvergenten Entwicklungen

$$(51) \quad K_i(s, t) = \frac{\varphi_1(s) \varphi_1(t)}{\lambda_1^i} + \frac{\varphi_2(s) \varphi_2(t)}{\lambda_2^i} + \dots + \frac{\varphi_n(s) \varphi_n(t)}{\lambda_n^i} + \dots$$

Jedes normierte Orthogonalsystem des symmetrischen Kernes  $K(s, t)$  ist auch ein solches für den iterierten Kern  $K_i(s, t)$ ; gehört  $\varphi_n(s)$  als Eigenfunktion von  $K(s, t)$  zum Eigenwert  $\lambda_n$ , so gehört sie als Eigenfunktion von  $K_i(s, t)$  zum Eigenwerte  $\lambda_n^i$ .

Ein symmetrischer Kern  $K(s, t)$  heißt abgeschlossen, wenn die Gleichung

$$(52) \quad \int_a^b K(s, r) h(r) dr = 0$$

nur für solche Funktionen  $h(r)$  besteht, die überall Null sind, abgesehen von den Punkten einer Menge vom Maße Null.<sup>1)</sup>

Damit der Kern  $K(s, t)$  abgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß zu jeder gegebenen Funktion  $f(s)$  und jedem positiven  $\varepsilon$  eine Funktion  $h(s)$  gehört, so daß

$$(53) \quad \int_a^b \left( f(s) - \int_a^b K(s, r) h(r) dr \right)^2 ds < \varepsilon.$$

1) Solche Funktionen  $f(s)$  werden wir im folgenden kurz als Nullfunktionen bezeichnen.

Ein abgeschlossener Kern hat stets unendlich viele Eigenwerte.

Der symmetrische Kern  $K(s, t)$  heißt von positivem Typus, wenn für jedes beliebige  $f(s)$  die Ungleichung besteht

$$(54) \quad \int_a^b \int_a^b K(s, t) f(s) f(t) ds dt \geq 0.$$

Ein Kern, der abgeschlossen und von positivem Typus ist, heißt positiv definit.

Die Eigenwerte eines Kernes von positivem Typus sind sämtlich positiv.

Die Theorie der orthogonalen Integralgleichung wurde geschaffen von Hilbert, *Gött. Nachr.* 1904, 49. Ferner: Schmidt, *Gött. Diss.* 1905; *Math. Ann.* **63** (1907), 433. Die Bezeichnung orthogonal rührt her von dem Zusammenhange dieser Integralgleichung mit der orthogonalen Transformation quadratischer Formen in eine Quadratsumme; siehe § 6. Weitere Literatur: I. Schur, *Math. Ann.* **67** (1909), 306; *Schwarz-Festschrift* (1914), 392; Vergerio, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **48** (1915), 878; Nalli, *Rom. Acc. L. Rend.* (5) **27**<sub>2</sub> (1918), 118, 159, 192, 260, 316, 28<sub>1</sub> (1919), 200; *Palermo Rend.* **43** (1919), 105.

Die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes lösen eine Minimumsaufgabe, das *Gaußsche Variationsproblem*; siehe Hilbert, a. a. O., 78 u. *Gött. Nachr.* 1906, 460; Holmgren, *Ark. f. math.* 3, Nr. 1; *Math. Ann.* **69** (1910), 498. Über die Verteilung der Eigenwerte Weyl, *Math. Ann.* **71** (1911), 441.

Manche Kerne gestatten eine den symmetrischen Kernen ähnliche Behandlungsweise. Dies ist besonders der Fall bei der wichtigen Klasse der *Hermiteischen Kerne*  $K(s, t)$ , für die  $K(s, t)$  und  $K(t, s)$  konjugiert komplex sind. Auch hier sind die Eigenwerte reell. Die rein imaginären Hermiteischen Kerne führen unmittelbar auf die *reellen alternierenden Kerne*, die der Bedingung  $K(s, t) = -K(t, s)$  genügen. Lalesco, a. a. O., 74; I. Schur, *Math. Ann.* **66** (1909), 488. Andere Klassen von Kernen, die mit den reellen symmetrischen verwandt sind, sind behandelt worden von Marty, *C. R.* **150** (1910), 515, 603, 1031, 1499; Korn, *C. R.* **153** (1911), 171, 327, 539; **156** (1913), 1905; *Tôhoku Math. Journ.* **1** (1912), 159; **2** (1912), 117; Kneser, *Palermo Rend.* **37** (1914), 169. Man vergleiche ferner Fubini, *Ann. di Mat.* (3) **17** (1910), 111; A. J. Pell, *Trans. of*

the *Am. Math. Soc.* **12** (1911), 135, 165; Seely, *Ann. of Math.* (2) **20** (1919), 172; Andreoli, *Rom. Acc. L. Rend.* **23**<sub>2</sub> (1914), 159; Lalesco, *S. M. F. Bull.* **45** (1917), 144; Hammerstein, *Math. Ann.* **93** (1925), 113; **95** (1926), 102.

Der Wert  $\lambda_0$  heißt *Eigenwert* des reellen unsymmetrischen Kernes  $K(s, t)$ , wenn den Gleichungen

$$(55) \quad \begin{aligned} \varphi(s) - \lambda_0 \int_a^b K(s, t) \psi(t) dt &= 0, \\ \psi(s) - \lambda_0 \int_a^b \varphi(t) K(t, s) dt &= 0 \end{aligned}$$

durch nicht verschwindende Funktionen  $\varphi(s)$  und  $\psi(s)$  genügt werden kann. Ein den Gleichungen (55) genügendes Funktionenpaar heißt ein *Paar zum Eigenwert  $\lambda_0$  gehöriger adjungierter Eigenfunktionen* des Kernes  $K(s, t)$  (bezüglich des Intervalles  $(a, b)$ ).

Die Eigenwerte sind stets reell; neben  $\lambda_0$  ist auch  $-\lambda_0$  Eigenwert und liefert (bis aufs Vorzeichen) dieselben Eigenfunktionen wie  $\lambda_0$ ; man kann sich daher auf die Betrachtung der positiven Eigenwerte beschränken. Setzt man

$$(56) \quad \begin{aligned} \overline{K}(s, t) &= \int_a^b K(s, r) K(t, r) dr, \\ \underline{K}(s, t) &= \int_a^b K(r, s) K(r, t) dr, \end{aligned}$$

so sind die Eigenwerte von  $K(s, t)$  identisch mit den Quadratwurzeln aus den (durchwegs positiven) Eigenwerten des symmetrischen Kernes  $\overline{K}(s, t)$  (ebenso für  $\underline{K}(s, t)$ ). Ist  $\lambda_0^2$  Eigenwert von  $\overline{K}(s, t)$ , so erhält man die sämtlichen zu  $\lambda_0$  gehörigen Paare adjungierter Eigenfunktionen von  $K(s, t)$ , indem man  $\varphi(s)$  die zu  $\lambda_0^2$  gehörigen Eigenfunktionen von  $\overline{K}(s, t)$  durchlaufen läßt, und das zugehörige  $\psi(s)$  aus der zweiten Gleichung (55) bestimmt. Durchläuft  $\varphi(s)$  ein normiertes Orthogonalsystem  $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots$  von  $\overline{K}(s, t)$ , und werden die zugehörigen Funktionen  $\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_n(s), \dots$  wie angegeben bestimmt, so sind auch diese normiert und zueinander orthogonal. (Analoges gilt, wenn man von  $\underline{K}(s, t)$  ausgeht.)

Die Funktionenpaare  $\varphi_n(s)$ ,  $\psi_n(s)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) heißen ein *normiertes Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes*  $K(s, t)$  (bezüglich des Intervalles  $(a, b)$ ).

Wir bezeichnen den zum Funktionenpaare  $\varphi_n(s)$ ,  $\psi_n(s)$  gehörigen *positiven* Eigenwert mit  $\lambda_n$  und denken uns diese Eigenwerte in eine *nicht abnehmende* Folge geordnet. Es sei die Aufgabe vorgelegt, den Kern  $K(s, t)$  durch eine Summe von  $n$  Produkten aus je einer stetigen Funktion von  $s$  in eine stetige Funktion von  $t$

$$u_1(s)v_1(t) + u_2(s)v_2(t) + \dots + u_n(s)v_n(t)$$

so zu approximieren, daß das Maß der Approximation ein Minimum wird, wobei als Approximationsmaß  $M_n$  das Integral über das Quadrat des Fehlers

$$M_n = \int_a^b \int_a^b (K(s, t) - u_1(s)v_1(t) - u_2(s)v_2(t) - \dots - u_n(s)v_n(t))^2 ds dt$$

gelte. Diese Aufgabe wird gelöst durch

$$u_i(s) = \frac{\varphi_i(s)}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad v_i(s) = \frac{\psi_i(s)}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Das so erhaltene Minimum von  $M_n$  konvergiert mit wachsendem  $n$  gegen Null:

*Es gilt die Gleichung*

$$(57) \quad K(s, t) = \frac{\varphi_1(s)\psi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s)\psi_2(t)}{\lambda_2} + \dots + \frac{\varphi_n(s)\psi_n(t)}{\lambda_n} + \dots,$$

*falls die rechts stehende Reihe (für  $a \leq s \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$ ) gleichmäßig konvergiert.*

Für die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Funktionen  $\varphi_n(s)$  oder  $\psi_n(s)$  gelten ähnliche Sätze wie im Falle des symmetrischen Kernes.

Die Sätze über die Eigenfunktionen unsymmetrischer Kerne stammen von Schmidt, *Math. Ann.* **63** (1907), 459. Vgl. auch Hilbert, *Gött. Nachr.* 1906, 462. Weitere Literatur I. Schur, *Schwarz-Festschrift* (1914), 392; Toeplitz, *Schwarz-Festschrift* (1914), 427. Über Integralgleichungen mit positivem (unsymmetrischem) Kerne; Jentzsch, *Journ. f. Math.* **141** (1912), 235.

*Damit die Integralgleichung erster Art*

$$f(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt,$$

in der  $f(s)$  eine stetige Funktion bedeutet, durch eine samt ihrem Quadrate (im Lebesgueschen Sinne) integrable Funktion  $\varphi(s)$  gelöst werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß  $f(s)$  orthogonal ist zu allen Lösungen der Gleichung

$$\int_a^b K(t, s) h(t) dt = 0,$$

und daß die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 c_n^2$  konvergiert, in der die  $c_n$  die Fourierkonstanten von  $f(s)$  in bezug auf die  $\varphi_n(s)$  bedeuten. (Picard, *Palermo Rend.* **29** (1910), 79). Vgl. auch Bateman, *Math. Ann.* **63** (1907), 525 und *Lond. R. S. Proc.* (2) **4** (1906), 461; Pinnerle, *Mem. Soc. It. Sc.* (3) **15** (1907), 3; Lauricella, *Rom. Atti Lincei Rend.* **18**<sub>2</sub> (1909), 71; **19**<sub>1</sub> (1910), 52; Vergerio, *Palermo Rend.* **41** (1916), 1; Møllerup, *Palermo Rend.* **47** (1923), 115, 375; Müntz, *Math. Ann.* **87** (1922), 139; *Math. Zeitschr.* **21** (1924), 96.

#### § 4. Systeme orthogonaler Funktionen. Die polare Integralgleichung.

Allgemein wird eine Menge von Funktionen, deren jede normiert ist (bezüglich des Intervalles  $(a, b)$ ) und die zu je zweien orthogonal sind (bezüglich dieses Intervalles) als ein *normiertes Orthogonalsystem* (bezüglich dieses Intervalles) bezeichnet. Ein solches System heißt *vollständig*, wenn es (abgesehen von Nullfunktionen) keine Funktion gibt, die zu allen Funktionen des Systemes orthogonal ist.

*Ein orthogonales Funktionensystem besteht aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von Funktionen.*

*Ein nicht vollständiges Orthogonalsystem läßt sich durch Hinzufügung einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von Funktionen zu einem vollständigen ergänzen.*

*Das Orthogonalsystem eines abgeschlossenen symmetrischen Kernes ist ein vollständiges System.*



Bilden  $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots$  ein normiertes Orthogonalsystem, so werden auch hier die durch (46) definierten Zahlen  $c_n$  als die Fourierkonstanten von  $f(s)$  bezeichnet. Sie haben folgende Minimumeigenschaft: Unter allen Linearkombinationen  $b_1\varphi_1(s) + b_2\varphi_2(s) + \dots + b_n\varphi_n(s)$  erhält man diejenige, die im Intervalle  $(a, b)$  die beste Approximation an  $f(s)$  liefert — wobei als Maß der Approximation das Integral über das Quadrat des Fehlers gilt — indem man  $b_\nu = c_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) setzt.

Bilden insbesondere die  $\varphi_n(s)$  ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem, so ist für jedes  $f(s)$

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b (f(s) - (c_1\varphi_1(s) + \dots + c_n\varphi_n(s)))^2 ds = 0.$$

Für die Fourierkonstanten einer beliebigen Funktion  $f(s)$  gilt die Besselsche Ungleichung

$$(58) \quad c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 + \dots \leq \int_a^b (f(s))^2 ds.$$

Damit ein normiertes Orthogonalsystem vollständig sei, ist notwendig und hinreichend, daß bei beliebigem  $f(s)$  und  $g(s)$

$$(59) \quad c_1 c_1' + c_2 c_2' + \dots + c_n c_n' + \dots = \int_a^b f(s) g(s) ds,$$

wo die  $c_n$  die Fourierkonstanten von  $f(s)$ , die  $c_n'$  die von  $g(s)$  bedeuten.

Bilden die Funktionen  $\varphi_n(s)$  ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem (bezüglich des Intervalles  $(a, b)$ ), und werden mit  $c_n$  die Fourierkonstanten von  $f(s)$  bezeichnet, so gilt für  $(a \leq s \leq b)$  die Gleichung

$$(60) \quad \begin{aligned} \int_a^s f(s) ds &= c_1 \int_a^s \varphi_1(s) ds + c_2 \int_a^s \varphi_2(s) ds + \dots \\ &+ c_n \int_a^s \varphi_n(s) ds + \dots, \end{aligned}$$

und die rechts stehende Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig im Intervalle  $(a, b)$ .

In diesen Sätzen ist vorausgesetzt, daß die auftretenden Funktionen samt ihrem Quadrate integrierbar seien. Wegen ihrer

Gültigkeit in anderen Fällen vgl. Hahn, *Wiener Denkschr.* **93** (1916), 676 ff.

Ist ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem gegeben sowie eine Folge von Zahlen  $c_n$  mit konvergenter Quadratsumme, so gibt es stets eine und (abgesehen von additiven Nullfunktionen) nur eine Funktion  $f(s)$ , deren Fourierkonstanten die gegebenen Zahlen  $c_n$  sind.

Wegen der Theorie der orthogonalen Funktionssysteme siehe Schmidt, *Math. Ann.* **63** (1907), 433; *C. R.* **143** (1906), 955; F. Riesz, *Gött. Nachr.* 1907, 116; *Math. Ann.* **69** (1910), 449; Fischer, *C. R.* **144** (1907), 1022, 1148; Haar, *Gött. Diss.* 1909; *Math. Ann.* **71** (1911), 38; Weyl, *Math. Ann.* **67** (1909), 225; Plancherel, *Palermo Rend.* **33** (1910), 289; Hahn, *Wiener Denkschr.* **93** (1916), 657; Rademacher, *Math. Ann.* **87** (1922), 112; Menchoff, *Fund. Math.* **4** (1922), 82; Kaczmarz, *Math. Zeitschr.* **23** (1925), 263; *Math. Ann.* **96** (1926), 148; Kolmogoroff und Menchoff, *Math. Zeitschr.* **26** (1927), 432. Über biorthogonale Funktionensysteme vgl. A. J. Pell, *Trans. of the Am. Math. Soc.* **12** (1911), 135, 165; Møllerup, *Palermo Rend.* **47** (1923), 375.

Es sei das Intervall  $(a, b)$  irgendwie in eine endliche Anzahl von Teilintervallen zerlegt und  $V(s)$  bedeute eine Funktion, die in diesen Teilintervallen abwechselnd die Werte  $+1$  und  $-1$  hat. Mit  $K(s, t)$  werde ein *reeller symmetrischer Kern* von positivem Typus bezeichnet. Dann heißt die Gleichung

$$(61) \quad f(s) = V(s) \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

eine *polare Integralgleichung*; sie ist als Spezialfall in der Gleichung (1a) enthalten, denn durch Multiplikation mit  $V(s)$  geht sie über in

$$(62) \quad V(s) f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b V(s) K(s, t) \varphi(t) dt,$$

und das ist eine Gleichung der Form (1a) mit dem unsymmetrischen Kerne  $V(s)K(s, t)$ . Die singulären Parameterwerte der Gleichung (62) werden als die *Eigenwerte*, die zugehörigen Nulllösungen in  $s$  als die *Eigenfunktionen* der polaren Integralgleichung (61) bezeichnet; diese Eigenfunktionen sind im allgemeinen nur abteilungsweise stetig.

Die polare Integralgleichung (61) besitzt dann und nur dann keinen Eigenwert, wenn

$$(63) \quad \int_a^b K(s, r) V(r) K(r, t) dr = 0.$$

Sämtliche Eigenwerte einer polaren Integralgleichung sind reell.

Gehören die Eigenfunktionen  $\pi_p(s)$  und  $\pi_q(s)$  zu verschiedenen Eigenwerten, so ist

$$(64) \quad \int_a^b V(s) \pi_p(s) \pi_q(s) ds = 0.$$

Gehört die Eigenfunktion  $\pi_p(s)$  zum Eigenwerte  $\lambda_p$ , so ist

$$(65) \quad \int_a^b V(s) (\pi_p(s))^2 ds$$

von Null verschieden und hat das Vorzeichen von  $\lambda_p$ . Indem man  $\pi_p(s)$  mit einer geeigneten Konstanten multipliziert, kann man also stets erreichen, daß das Integral (65) einen der Werte  $+1$  oder  $-1$  erhält; wir werden im folgenden voraussetzen, die Eigenfunktionen  $\pi_p(s)$  seien entsprechend dieser Festsetzung gewählt, wir nennen sie dann normiert. Gehören zu einem Eigenwerte mehrere linear unabhängige Eigenfunktionen, so kann man dieselben immer so gewählt denken, daß sie zu je zweien der Bedingung (64) genügen; und dies werden wir im folgenden annehmen.

Unter den Fourierkonstanten einer Funktion  $f(s)$  bezüglich des Systems der Eigenfunktionen  $\pi_p(s)$  von (61) versteht man die Zahlen

$$(66) \quad c_p = \text{sign } \lambda_p \int_a^b V(s) f(s) \pi_p(s) ds, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

wo  $\text{sign } \lambda_p$  das Vorzeichen des zu  $\pi_p(s)$  gehörigen Eigenwertes  $\lambda_p$  bedeutet.

Ist die Funktion  $f(s)$  mit Hilfe einer stetigen Funktion  $h(s)$  in der Form darstellbar

$$(67) \quad f(s) = \int_a^b \int_a^b V(s) K(s, t) V(t) K(t, r) h(r) dr dt.$$

so ist im Intervalle  $(a, b)$

$$(68) \quad f(s) = c_1 \pi_1(s) + c_2 \pi_2(s) + \cdots + c_n \pi_n(s) + \cdots,$$

und die rechts stehende Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Ist der Kern  $K(s, t)$  abgeschlossen, so besitzt die polare Integralgleichung (61) sowohl unendlich viele positive als unendlich viele negative Eigenwerte.

Die Theorie der polaren Integralgleichung rührt her von Hilbert, der sie mit Hilfe seiner Theorie der quadratischen Formen begründete. Siehe § 6, wo auch der Name *polar* erklärt wird. Weitere Literatur: Marty, *C. R.* **150** (1910), 515, 603; Fubini, *Ann. di Mat.* (3) **17** (1910), 111; Garbe, *Math. Ann.* **76** (1915), 527.

## § 5. Die Formen von unendlich vielen Veränderlichen.

Es wird im folgenden die Rede sein von Linearformen, Bilinearformen und quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen.

Seien diese Veränderlichen bezeichnet mit  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ; wir werden stets (wo nicht anders bemerkt) voraussetzen, daß sie der Ungleichung genügen

$$(69) \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \cdots \leq 1.$$

Der Kürze halber setzen wir

$$(70) \quad \begin{aligned} (x, x) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \cdots, \\ (x, y) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n + \cdots. \end{aligned}$$

Eine Funktion von unendlich vielen Veränderlichen

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

heißt *stetig*, wenn aus  $\lim_{\nu=\infty} (\varepsilon^{(\nu)}, \varepsilon^{(\nu)}) = 0$  folgt

$$(71) \quad \begin{aligned} \lim_{\nu=\infty} F(x_1 + \varepsilon_1^{(\nu)}, x_2 + \varepsilon_2^{(\nu)}, \dots, x_n + \varepsilon_n^{(\nu)}, \dots) \\ = F(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \end{aligned}$$

sie heißt *vollstetig*, wenn (71) schon folgt aus

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_1^{(\nu)} = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_2^{(\nu)} = 0, \quad \dots, \quad \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_n^{(\nu)} = 0, \quad \dots$$

Seien  $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$  beliebige reelle Konstante; wir bilden für jedes  $n$

$$(72) \quad \sum_{p=1}^n l_p x_p = L_n(x).$$

Wenn  $\sum_{p=1}^{\infty} l_p^2$  konvergiert (und auch nur dann), gibt es eine Konstante  $M$ , so daß für alle der Ungleichung (69) genügenden  $x$  und für alle  $n$  die Ungleichung besteht

$$|L_n(x)| < M;$$

dann ist für alle genannten  $x$  die Reihe  $\sum_{p=1}^{\infty} l_p x_p$  konvergent.

Wir setzen dann

$$(73) \quad L(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = L(x) = \sum_{p=1}^{\infty} l_p x_p = \lim_{n=\infty} L_n(x)$$

und nennen diesen Ausdruck eine *beschränkte Linearform* der *unendlich vielen Veränderlichen*  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ . Der Ausdruck (72) heißt der  $n^{\text{te}}$  Abschnitt der Form (73).

Eine beschränkte Linearform ist *vollstetig*.

Eine beschränkte Linearform  $\sum_{p=1}^{\infty} l_p x_p$  heißt *normiert*, wenn

$$(74) \quad \sum_{p=1}^{\infty} l_p^2 = 1.$$

Zwei beschränkte Linearformen  $\sum_{p=1}^{\infty} l_p x_p$  und  $\sum_{p=1}^{\infty} m_p x_p$  heißen *zueinander orthogonal*, wenn

$$(75) \quad \sum_{p=1}^{\infty} l_p m_p = 0.$$

Ein System beschränkter Linearformen, die sämtlich normiert und zu je zweien orthogonal sind, heißt ein *normiertes Orthogonalsystem*. Ein solches System enthält höchstens abzählbar unendlich viele Formen. Ein normiertes Orthogonalsystem heißt *vollständig*, wenn es keine beschränkte Linearform gibt, die zu allen Formen des Systemes orthogonal ist. Ein nicht vollständiges Orthogonalsystem kann durch Hinzufügung endlich oder abzählbar unendlich vieler Formen zu einem vollständigen ergänzt werden.

Damit das System der Formen

$$(76) \quad O_q(x) = \sum_{p=1}^{\infty} o_{pq} x_p \quad (q = 1, 2, \dots)$$

ein vollständiges Orthogonalsystem sei, ist notwendig und hinreichend, daß

$$(77) \quad \begin{cases} \sum_{p=1}^{\infty} o_{pq}^2 = 1 & \sum_{p=1}^{\infty} o_{pq} o_{pq'} = 0 \quad (q \neq q') \quad (q, q' = 1, 2, \dots) \\ \sum_{q=1}^{\infty} o_{pq}^2 = 1 & \sum_{q=1}^{\infty} o_{pq} o_{p'q} = 0 \quad (p \neq p') \quad (p, p' = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

Setzt man  $O_q(x) = x'_q$ , so ist umgekehrt

$$(78) \quad x_q = \sum_{p=1}^{\infty} o_{qp} x'_p \quad (q = 1, 2, \dots).$$

Man sagt dann: die Formeln (77), (78) definieren eine *orthogonale Transformation zwischen den unendlich vielen Veränderlichen  $x$  und  $x'$* .

Seien  $a_{pq}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ;  $q = 1, 2, \dots$ ) beliebige reelle Konstante; wir bilden für jedes  $n$

$$(79) \quad A_n(x, y) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{pq} x_p y_q.$$

Gibt es eine Konstante  $M$ , so daß für alle der Ungleichung (69) genügenden  $x$  und  $y$  die Ungleichung besteht

$$|A_n(x, y)| < M,$$

so ist die Doppelreihe  $\sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q$  konvergent für alle genannten Wertsysteme der Veränderlichen  $x$  und  $y$ . Wir setzen dann

$$(80) \quad \begin{aligned} A(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) &= A(x, y) \\ &= \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x, y) \end{aligned}$$

und nennen diesen Ausdruck eine *beschränkte Bilinearform der unendlich vielen Veränderlichen  $x$  und  $y$* . Der Ausdruck (79) heißt der  $n^{\text{te}}$  Abschnitt der Form (80).







eine quadratische Form der unendlich vielen Veränderlichen  $x$ . Damit die quadratische Form  $K(x, x)$  vollstetig sei, ist notwendig und hinreichend die Vollstetigkeit der Bilinearform  $K(x, y)$ .

Eine vollstetige quadratische Form kann auf die Gestalt gebracht werden

$$(86) \quad K(x, x) = \frac{(L_1(x))^2}{\lambda_1} + \frac{(L_2(x))^2}{\lambda_2} + \cdots + \frac{(L_n(x))^2}{\lambda_n} + \cdots,$$

wo die  $\lambda_n$  von Null verschiedene reelle Zahlen in endlicher oder abzählbar unendlicher Menge bedeuten, die im letzteren Falle der Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$  genügen, die  $L_n(x)$  aber beschränkte

Linearformen sind, die ein normiertes Orthogonalsystem bilden. Die Zahlen  $\lambda_n$  heißen die Eigenwerte der quadratischen Form  $K(x, x)$ , und zwar heißt ein Eigenwert  $k$ -fach, wenn er in  $k$  Gliedern der Summe (86) als Nenner auftritt.  $L_n(x)$  heißen die linearen Eigenformen der Form  $K(x, x)$ . Die Eigenwerte samt ihrer Vielfachheit sind durch  $K(x, x)$  eindeutig bestimmt, ebenso die zu den einfachen Eigenwerten gehörigen Formen  $L_n(x)$ ; die  $k$  zu einem  $k$ -fachen Eigenwert gehörigen Formen  $L(x)$  sind hingegen nur bis auf eine orthogonale Transformation dieser Formen untereinander bestimmt.

Ist das System der Formen  $L_i(x)$  vollständig, so heißt die Form  $K(x, x)$  abgeschlossen; im andern Falle kann man das System der  $L_i(x)$  durch Hinzufügung geeigneter Formen  $M_i(x)$  zu einem vollständigen normierten Orthogonalsystem ergänzen. Setzt man dann<sup>1)</sup>

$$(87) \quad L_i(x) = x'_i; \quad M_i(x) = x''_i,$$

so stellen die Formeln (87) eine orthogonale Transformation der Veränderlichen  $x$  in neue Veränderliche dar, und es wird

$$(88) \quad (x, x) = (x', x') + (x'', x''); \quad K(x, x) = \sum_i \frac{x_i'^2}{\lambda_i}.$$

Unser obiger Satz ist also das Analogon zur orthogonalen Transformation einer Oberfläche 2. Ordnung mit Mittelpunkt in einem  $n$ -dimensionalen Raume auf ihre Hauptachsen.

1) In diesen, wie in den folgenden Formeln sind, wenn  $K(x, x)$  abgeschlossen ist, die Veränderlichen  $x''$ , bzw. die Formen  $M_i(x)$  wegzulassen.





und von positivem Typus ist, heißt *positiv definit*. Die Eigenwerte einer Form von positivem Typus sind durchwegs positiv.

Sei  $K(x, x)$  eine vollstetige definite Form und sei

$$(97) \quad V(x, x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \cdots + v_p x_p^2 + \cdots,$$

wo die  $v_p$  die Werte  $+1$  oder  $-1$  bedeuten. Dann gilt der Satz:

*Die Form  $K(x, x)$  läßt sich in die Gestalt bringen*

$$(98) \quad K(x, x) = k_1 (L_1(x))^2 + k_2 (L_2(x))^2 + \cdots + k_p (L_p(x))^2 + \cdots,$$

wo die  $k_p$  unendlich viele positive, gegen Null konvergierende Zahlen bedeuten, und die  $L_p(x)$  beschränkte Linearformen

$$L_p(x) = l_1^{(p)} x_1 + l_2^{(p)} x_2 + \cdots + l_q^{(p)} x_q + \cdots \quad (p=1, 2, \dots)$$

sind, die den Bedingungen genügen

$$(99) \quad \sum_{r=1}^{\infty} v_r (l_r^{(p)})^2 = v_p, \quad \sum_{r=1}^{\infty} v_r l_r^{(p)} l_r^{(q)} = 0 \quad (p \neq q).$$

Setzt man die Form  $K(x, x)$  nicht als abgeschlossen voraus, so modifiziert sich dieser Satz in folgender Weise:

*Die Form  $K(x, x)$  läßt sich in die Gestalt bringen*

$$(100) \quad K(x, x) = (A_1(x))^2 + (A_2(x))^2 + \cdots + (A_p(x))^2 + \cdots,$$

wo die  $A_p(x)$  beschränkte Linearformen

$$A_p(x) = \lambda_1^{(p)} x_1 + \lambda_2^{(p)} x_2 + \cdots + \lambda_q^{(p)} x_q \cdots \quad (p=1, 2, \dots)$$

sind, die den Bedingungen genügen

$$(101) \quad \sum_{r=1}^{\infty} v_r (\lambda_r^{(p)})^2 = \kappa_p, \quad \sum_{r=1}^{\infty} v_r \lambda_r^{(p)} \lambda_r^{(q)} = 0, \quad (p \neq q)$$

wobei mit  $\kappa_p$  Konstante bezeichnet sind, die sowohl positiv, als negativ, als Null sein können und, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden, jedenfalls gegen Null konvergieren.

Diese Sätze wurden von Hilbert bewiesen (Gött. Nachr. 1906, 209); sie bilden für unendlich viele Veränderliche das Analogon der Sätze über die Überführbarkeit einer quadratischen Form

$\sum_{p,q=1}^n k_{pq} x_p x_q$  in eine Normalform  $\sum_{p=1}^n k_p x_p^2$  durch



Transformationen, die eine Form  $\sum_{p=1}^n v_p x_p^2$  ( $v_p = \pm 1$ ) in sich überführen. Geometrisch ist dies (etwa für  $n = 4$ ) das Problem, ein gemeinsames Poltetraeder der durch Nullsetzen der beiden Formen gegebenen Flächen 2. Ordnung aufzufinden.

### § 6. Die Formen von unendlichvielen Veränderlichen und lineare Integralgleichungen.

Wir bezeichnen nun mit  $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots, \Phi_n(s), \dots$  irgendein vollständiges normiertes Orthogonalsystem in bezug auf das Intervall  $(a, b)$ .

Es sei die Integralgleichung (1a) vorgelegt, über deren Kern wir nur voraussetzen, daß  $\int_a^b \int_a^b (K(s, t))^2 ds dt$  existiert. Wir setzen in (1a)  $\lambda = -1$  und erhalten

$$(102) \quad f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt.$$

Seien  $a_1, a_2, \dots, a_p, \dots$  die Fourierkonstanten von  $f(s)$  in bezug auf unser Orthogonalsystem,  $k_1(s), k_2(s), \dots, k_p(s), \dots$  die von  $K(s, t)$  (wenn man  $K(s, t)$  als Funktion von  $t$  betrachtet),  $a_{1q}, a_{2q}, \dots, a_{pq}, \dots$  die von  $k_q(s)$ ; also

$$(103) \quad \begin{aligned} k_p(s) &= \int_a^b K(s, t) \Phi_p(t) dt; \\ a_{pq} &= \int_a^b \int_a^b K(s, t) \Phi_p(s) \Phi_q(t) ds dt. \end{aligned}$$

Durch zweimalige Anwendung von (58) auf  $K(s, t)$  und  $k_p(s)$  folgt die Konvergenz von  $\sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}^2$  und mithin die Vollstetigkeit der Bilinearform  $\sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q$ . Bezeichnet man noch mit  $x_1, x_2, \dots, x_p, \dots$  die Fourierkonstanten der unbekannten Funktion  $\varphi(s)$ , wendet auf  $\int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$  die Formel (59) an, bildet sodann von beiden Seiten von (100) die Fourierkonstanten bezüglich

unseres Orthogonalsystems und setzt die entsprechenden Fourierkonstanten einander gleich, so erhält man für die  $x_p$  gerade das Gleichungssystem (83). Es gilt der Satz:

*Die Fourierkonstanten einer jeden Lösung von (102) genügen den Gleichungen (83), umgekehrt liefert jede Lösung von (83) (mit konvergenter Quadratsumme) die Fourierkonstanten einer der Gleichung (102) genügenden Funktion.*

Die beiden bezüglich der Lösbarkeit von (83) oben unterschiedenen Fälle treten ein, je nachdem der von uns in (1a) eingesetzte Parameterwert  $\lambda = -1$  für diese Gleichung nicht singulär oder singulär ist. Im zweiten Falle liefern die Lösungen der homogenen Gleichungen (81) die Fourierkonstanten der Nulllösungen in  $s$ , die Lösungen von (82) die der Nulllösungen in  $t$ , und die Bedingung für die Lösbarkeit von (83) ist genau die in § 1 für die Lösbarkeit von (1a) angegebene.

Ist die orthogonale Integralgleichung (42) vorgelegt, deren Kern wieder lediglich der Bedingung zu genügen hat, daß

$\int_a^b \int_a^b (K(s, t))^2 ds dt$  existiert, und geht man so vor, wie eben bei der Gleichung (102), so wird  $a_{pq} = a_{qp}$ . Wir schreiben  $k_{pq}$  statt  $a_{pq}$ ; dann ist die quadratische Form

$$K(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \sum_{p, q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q$$

vollständig, und wir werden statt auf die Gleichungen (83) auf die Gleichungen (93) geführt. Es gelten die Sätze:

*Die Eigenwerte des symmetrischen Kernes  $K(s, t)$  sind identisch mit denen der Form  $K(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  (einschließlich der Vielfachheit). Die Fourierkonstanten der Eigenfunktionen von  $K(s, t)$  sind die Koeffizienten der Formen  $L_i(x)$  in der Darstellung (86) von  $K(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ .*

*Ist der Kern  $K(s, t)$  abgeschlossen, so ist es auch die Form  $K(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  und umgekehrt. Ist  $K(s, t)$  nicht abgeschlossen, so sind die Koeffizienten der Formen  $M_i(x)$  die Fourierkonstanten der der Gleichung (52) genügenden Funktionen  $h(s)$  (die selbst bei stetigem  $K(s, t)$  nicht notwendig stetig sind).*

Aus der ersten Formel (88) folgt sofort

$$(88a) \quad (x, y) = \sum_i L_i(x) L_i(y) + \sum_i M_i(x) M_i(y);$$

ebenso aus (86)

$$(86a) \quad K(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) = \sum_i \frac{L_i(x) L_i(y)}{\lambda_i}.$$

Setzt man in (88a) für die  $x_p$  die Fourierkonstanten einer Funktion  $h(s)$ , für die  $y_p$  die Ausdrücke  $k_p(s)$  aus (103), so erhält man, indem man rechts und links Gleichung (59) anwendet,

$$(49a) \quad \int_a^b K(s, t) h(t) dt = \frac{\varphi_1(s)}{\lambda_1} \int_a^b \varphi_1(t) h(t) dt \\ + \frac{\varphi_2(s)}{\lambda_2} \int_a^b \varphi_2(t) h(t) dt + \dots,$$

und das ist nichts anderes als Gleichung (49). Setzt man in (86a) für die  $x_p$  die Fourierkonstanten einer Funktion  $f(s)$ , für die  $y_p$  die einer Funktion  $g(s)$ , so erhält man die Gleichung (47).

Die Anwendung der Theorie der Formen von unendlich vielen Veränderlichen auf die Theorie der Integralgleichungen stammt von Hilbert, *Gött. Nachr.* 1906, 439. Dieser Methode sind auch orthogonale Integralgleichungen zugänglich, für die

$\int_a^b \int_a^b (K(s, t))^2 ds dt$  nicht existiert (singuläre Integralgleichungen).

Es kommt hauptsächlich darauf an, daß die nach obigem Verfahren dem Kerne  $K(s, t)$  zugeordnete quadratische Form  $\sum k_{pq} x_p x_q$  beschränkt ausfällt. Entsprechend dem in der Formel (86) dann im allgemeinen auftretenden Integralbestandteile, erscheint dann auch in (49) ein Bestandteil von der Art des Fourierschen Integrales (Kap. XXV). Hilb, *Math. Ann.* **66** (1908), 1; *Ber. d. Phys.-Med. Soz. Erlangen* **43** (1911), 68; Weyl, *Gött. Diss.* (1908); *Math. Ann.* **66** (1909), 273; *Jahresb. d. D. Math.-Ver.* **20** (1911), 129; Plancherel, *Riv. di fis. mat. e sc. nat.* **10** (1909), 37; *Pal. Rend.* **30** (1910), 289; *Math. Ann.* **67** (1909), 515; 519. Carleman, *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique*, Upsala 1923. Spezielle singuläre Integralgleichungen: Poincaré, *Leçons de mécanique céleste*, Bd. III, 1910, 250 ff.; F. Noether, *Math. Ann.* **82** (1920), 42; Carleman, *Arkiv for Mat. och Fysik* **16** (1922), Nr. 26; Tricomi, *Math. Zeitschr.* **27** (1927), 87.

Auf den am Schluß des § 5 angeführten Sätzen beruht die Theorie der polaren Integralgleichung in ähnlicher Weise wie die der orthogonalen auf Gleichung (86) (Hilbert, *Gött. Nachr.* 1906, 462). Von der genannten geometrischen Analogie rührt die Bezeichnung *polar* her.

### § 7. Anwendungen der Integralgleichungen auf die Randwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Es sei der *lineare Differentialausdruck 2. Ordnung* in  $u(x)$

$$(104) \quad L(u) \equiv p(x)u''(x) + q(x)u'(x) + r(x)u(x)$$

vorgelegt; dabei bedeuten  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  gegebene Funktionen die für  $a \leq x \leq b$  folgenden Bedingungen genügen:  $q(x)$  ist einmal,  $p(x)$  zweimal stetig differenzierbar<sup>1)</sup>,  $p(x)$  ist im Intervalle  $(a, b)$ , die Grenzen eingeschlossen, *von Null verschieden*, und zwar *positiv*;  $u(x)$  ist eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion,  $u'(x)$ ,  $u''(x)$  ihre erste und zweite Ableitung.

Der Differentialausdruck

$$(105) \quad M(u) \equiv \frac{d^2}{dx^2}(pu) - \frac{d}{dx}(qu) + ru$$

heißt zu  $L(u)$  *adjungiert*. Für jedes Paar zweimal stetig differenzierbarer Funktionen gilt dann der *Greensche Satz*

$$(106) \quad \int_a^b [vL(u) - uM(v)]dx = p(u'v - uv') + uv(q - p') \Big|_a^b,$$

wo durch  $\Big|_a^b$  angedeutet wird, daß rechts zuerst  $b$ , dann  $a$  einzusetzen, und der zweite Wert vom ersten zu subtrahieren ist.

Ist  $M(u) \equiv L(u)$ , so heißt  $L(u)$  *sich selbst adjungiert*; die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist

$$(107) \quad q(x) = p'(x).$$

Der Greensche Satz nimmt dann die einfachere Form an

$$(108) \quad \int_a^b [vL(u) - uL(v)]dx = p(u'v - uv') \Big|_a^b.$$

1) Eine Funktion heißt einmal (bzw. zweimal) stetig differenzierbar, wenn sie samt ihrer ersten (bzw. ersten und zweiten) Ableitung stetig ist.

Ein beliebiger Differentialausdruck  $L(u)$  kann in einen sich selbst adjungierten verwandelt werden, indem man ihn mit  $e^{\int \frac{q-p'}{p} dx}$  multipliziert. Bei Betrachtung der Differentialgleichung  $L(u) = 0$  ist es daher keine wesentliche Einschränkung, wenn man  $L(u)$  als sich selbst adjungiert voraussetzt. Wir machen im folgenden diese Voraussetzung. Auch genügt es dann für die Gültigkeit von (108),  $p(x)$  als einmal stetig differenzierbar voranzusetzen.

Sei also

$$(109) \quad L(u) \equiv \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + ru = 0$$

eine sich selbst adjungierte lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Unter einer *Grundlösung* von (109) versteht man eine für  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq \xi \leq b$  definierte Funktion  $\gamma(x, \xi)$  der Variablen  $x$  und des Parameters  $\xi$ , die als Funktion von  $x$  überall, außer für  $x = \xi$ , der Gleichung (109) genügt und die Form hat

$$\gamma(x, \xi) = -\frac{1}{2}\gamma_1(x, \xi)|x - \xi| + \gamma_2(x, \xi),$$

wo  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind, und für alle Werte von  $\xi$

$$\gamma_1(\xi, \xi) = 1$$

ist. Sind  $u_1(x)$  und  $u_2(x)$  zwei linear unabhängige Lösungen von (109), so ist

$$-\frac{1}{2} \frac{|x - \xi|}{x - \xi} \frac{u_2(\xi)u_1(x) - u_1(\xi)u_2(x)}{u_2(\xi)u_1'(\xi) - u_1(\xi)u_2'(\xi)}$$

eine Grundlösung.

Als *erste Randwertaufgabe* bezeichnet man das Problem, eine Lösung von (109) zu finden, die für  $x = a$  und  $x = b$  vorgeschriebene Werte annimmt. Ist  $g(x, \xi)$  eine für  $x = a$  und  $x = b$  verschwindende Grundlösung von (109), so wird der Ausdruck

$$(110) \quad G^I(x, \xi) = \frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$$

als *Greensche Funktion erster Art* von (109) (für das Intervall  $(a, b)$ ) bezeichnet. Es gilt das *Symmetriegesetz*

$$(111) \quad G^I(x, \xi) = G^I(\xi, x).$$

Eine Greensche Funktion erster Art für das Intervall  $(a, b)$  existiert dann und nur dann nicht, wenn es eine von Null verschiedene, in  $a$  und  $b$  verschwindende Lösung von (109) gibt.

Existiert die Greensche Funktion  $G^I(x, \xi)$  für das Intervall  $(a, b)$ , so ist für dieses Intervall die erste Randwertaufgabe bei beliebig vorgeschriebenen Randwerten eindeutig lösbar und die Lösung von (109), die in  $a$  und  $b$  die Werte  $A$  und  $B$  annimmt, wird geliefert durch

$$(112) \quad u(x) = p(a)A \left[ \frac{\partial G^I(x, \xi)}{\partial x} \right]_{\xi=x}^{x=a} - p(b)B \left[ \frac{\partial G^I(x, \xi)}{\partial x} \right]_{\xi=x}^{x=b}.$$

Ferner besitzt dann die inhomogene Gleichung

$$(113) \quad L(u) = \varphi(x)$$

eine und nur eine in  $a$  und  $b$  verschwindende<sup>1)</sup> Lösung, die gegeben ist durch

$$(114) \quad u(x) = - \int_a^b G^I(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Man erhält die Formel (112) (bzw. (114)), indem man in (108) für  $u$  die gesuchte Lösung von (109) (bzw. (113)), für  $v$  die Funktion  $G^I(x, \xi)$  einsetzt. Von dem letzten Satze gilt die Umkehrung:

Ist  $u(x)$  eine zweimal stetig differenzierbare, in  $a$  und  $b$  verschwindende Funktion, so wird die Integralgleichung erster Art

$$(115) \quad u(x) = \int_a^b G^I(x, \xi) v(\xi) d\xi$$

gelöst durch  $v(x) = -L(u)$ .

Aus (113) erhält man die Gleichung

$$(116) \quad L(u) + \lambda u = 0,$$

indem man  $\varphi(x) = -\lambda u$  setzt; dabei bedeute  $\lambda$  einen Parameter. Aus (114) wird dann die homogene orthogonale Integralgleichung

$$(117) \quad u(x) - \lambda \int_a^b G^I(x, \xi) u(\xi) d\xi = 0,$$

---

1) Durch Kombination der Formeln (112) und (114) findet man sofort, daß in dem von uns betrachteten Falle die erste Randwertaufgabe für die Gleichung (113) auch bei beliebigen Randwerten eindeutig lösbar ist.



deren Kern, wie aus (115) folgt, abgeschlossen ist. Die Anwendung der Sätze von § 3 auf (117) ergibt:

Die Gleichung (116) besitzt dann und nur dann eine in  $a$  und  $b$  verschwindende Lösung (die nicht identisch Null ist), wenn  $\lambda$  ein Eigenwert des symmetrischen Kernes  $G^I(x, \xi)$  ist. Es gibt unendlich viele solche Werte von  $\lambda$ , und sie häufen sich nur im Unendlichen; sie sind sämtlich einfache Eigenwerte von  $G^I(x, \xi)$  und die zugehörige Eigenfunktion ist die betreffende Lösung von (116).

Wir nennen die Eigenwerte des Kernes  $G^I(x, \xi)$  auch *Eigenwerte der Differentialgleichung (116) für die erste Randwertaufgabe* (bezüglich des Intervalles  $(a, b)$ ), die zugehörigen Eigenfunktionen nennen wir *Eigenlösungen*.

Zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenlösungen sind orthogonal.

Sei  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$  das System der normierten Eigenlösungen von (116); aus (115) im Verein mit (48), (49) folgt dann:

Jede in  $a$  und  $b$  verschwindende, im Intervalle  $(a, b)$  zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f(x)$  läßt sich in die in  $(a, b)$  absolut und gleichmäßig konvergierende Reihe entwickeln

$$(118) \quad f(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) + \dots,$$

wo die  $c_n$  die Fourierkonstanten von  $f(x)$  in bezug auf die  $u_n(x)$  sind.

Für jeden von sämtlichen Eigenwerten verschiedenen Wert von  $\lambda$  besitzt die Gleichung (116) eine Greensche Funktion erster Art (für das Intervall  $(a, b)$ ), die nichts anderes ist, als der zum Kerne  $G^I(x, \xi)$  gehörige lösende Kern.

Ein wichtiges Beispiel dieser Theorie liefert der Differentialausdruck  $L(u) \equiv \frac{d^2 u}{dx^2}$ . Seine Greensche Funktion erster Art für das Intervall  $(0, 1)$  ist

$$(119) \quad \begin{aligned} G^I(x, \xi) &= (1 - \xi)x \quad \text{für } x \leq \xi, \\ G^I(x, \xi) &= (1 - x)\xi \quad \text{für } x \geq \xi. \end{aligned}$$

Der durch (119) gegebene symmetrische Kern hat also die Eigenwerte  $\lambda_n = n^2 \pi^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) mit den zugehörigen normierten Eigenfunktionen  $\sqrt{2} \sin n\pi x$ .

In ähnlicher Weise wie die erste Randwertaufgabe läßt sich auch die zweite Randwertaufgabe behandeln: eine Lösung

von (109) zu finden, deren erste Ableitung in  $a$  und  $b$  vorgeschriebene Werte hat.

Erste und zweite Randwertaufgabe sind enthalten in der folgenden, die wir als *dritte Randwertaufgabe* bezeichnen:

Eine Lösung  $u$  von (109) zu finden, für die in  $a$  der Ausdruck  $\alpha u + \beta u'$ , in  $b$  der Ausdruck  $\gamma u + \delta u'$  vorgeschriebene Werte annimmt, wobei  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  gegebene Konstante sind. Als zugehörige Greensche Funktion  $G^{\text{III}}(x, \xi)$  bezeichnet man eine durch  $p(\xi)$  dividierte Grundlösung, die den Bedingungen genügt

$$(120) \quad \begin{aligned} \alpha G^{\text{III}}(a, \xi) + \beta \left. \frac{\partial G^{\text{III}}(x, \xi)}{\partial x} \right]_{x=a} &= 0, \\ \gamma G^{\text{III}}(b, \xi) + \delta \left. \frac{\partial G^{\text{III}}(x, \xi)}{\partial x} \right]_{x=b} &= 0. \end{aligned}$$

Es gelten analoge Sätze wie für die erste Randwertaufgabe; insbesondere:

*Es gibt unendlich viele sich nur im Unendlichen häufende Werte von  $\lambda$ , für welche die Gleichung (116) Lösungen besitzt, die den Bedingungen genügen*

$$(121) \quad \alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, \quad \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0.$$

*Jede zweimal stetig differenzierbare, gleichfalls den Bedingungen (121) genügende Funktion läßt sich nach diesen Lösungen entwickeln.*

In ganz analoger Weise wie (116) läßt sich die Gleichung

$$(122) \quad L(u) + \lambda k(x)u = 0$$

behandeln, falls  $k(x)$  eine im Intervalle  $(a, b)$ , die Grenzen eingeschlossen, *positive* stetige Funktion bedeutet; an Stelle von (117) tritt die Integralgleichung

$$(123) \quad u(x) - \lambda \int_a^b G^{\text{I}}(x, \xi) k(\xi) u(\xi) d\xi = 0,$$

die sich durch Multiplikation mit  $\sqrt{k(x)}$  und die Substitution

$$u(x) \sqrt{k(x)} = v(x); \quad G^{\text{I}}(x, \xi) \sqrt{k(x)k(\xi)} = G(x, \xi)$$

in eine orthogonale Integralgleichung verwandeln läßt. Ihre Eigenfunktionen pflegt man als Sturm-Liouvilleschen Funktionen zu bezeichnen.

Ist hingegen die stetige Funktion  $k(x)$  in  $(a, b)$  *teils positiv, teils negativ* (mit einer endlichen Anzahl von Zeichenwechseln), so erhält man aus (123) durch Multiplikation mit  $\sqrt{|k(x)|}$  und die Substitution

$$V(x)u(x)\sqrt{|k(x)|} = v(x), \quad G^I(x, \xi)\sqrt{|k(x)||k(\xi)|} = G^*(x, \xi),$$

wo mit  $V(x)$  da $\beta$  Vorzeichen von  $k(x)$  bezeichnet ist, die polare Integralgleichung

$$(124) \quad V(x)v(x) - \lambda \int_a^b G^*(x, \xi)v(\xi)d\xi = 0.$$

Ist ferner in  $L(u)$  (Gleichung (109))  $r$  negativ, so ist der Kern  $G^*(x, \xi)$  definit und es ergeben sich (nach § 4) die Sätze:

*Die Gleichung (122) besitzt dann und nur dann eine in  $a$  und  $b$  verschwindende Lösung (die nicht identisch Null ist), wenn  $\lambda$  ein Eigenwert der polaren Integralgleichung (124) ist; es gibt unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte; sie häufen sich nur im Unendlichen; die betreffenden Lösungen (Eigenlösungen) von (122) sind die durch  $V(x)\sqrt{|k(x)|}$  dividierten Eigenfunktionen von (124).*

Zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenlösungen  $u_m(x)$  und  $u_n(x)$  genügen der Gleichung

$$(125) \quad \int_a^b k(x)u_m(x)u_n(x)dx = 0.$$

Sei nun  $\pi_1(x), \pi_2(x), \dots$  das normierte (vgl. S. 1272) System der Eigenfunktionen von (124); wir leiten daraus die Eigenlösungen

$$(126) \quad u_\nu(x) = V(x) \frac{\pi_\nu(x)}{\sqrt{|k(x)|}} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

von (122) ab und nennen  $\lambda_\nu$  den zu  $u_\nu(x)$  gehörigen Eigenwert von (122). Jede in  $a$  und  $b$  verschwindende viermal stetig differenzierbare Funktion  $f(x)$ , (die in den Nullstellen von  $k(x)$  noch gewisse Bedingungen erfüllt<sup>1)</sup>), läßt sich in die in  $(a, b)$  absolut und gleichmäßig konvergierende Reihe entwickeln

1) Man erhält diese Bedingungen leicht, indem man anschreibt, da $\beta$  die Funktion  $f(s)V(s)\sqrt{|k(s)|}$  die Darstellung (67) für  $K(s, t) = G^*(s, t)$  gestatten soll.

$$(127) \quad f(\xi) = c_1 u_1(\xi) + c_2 u_2(\xi) + \cdots + c_n u_n(\xi) + \cdots,$$

wo

$$(128) \quad c_n = \text{sign } \lambda_n \int_a^b f(x) k(x) u_n(x) dx. \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Die im Vorstehenden wiedergegebenen Anwendungen der linearen Integralgleichungen stammen von Hilbert, *Gött. Nachr.* 1904, 213; 1906, 473. Man findet dort auch die Behandlung weiterer Randwertaufgaben; von besonderem Interesse sind die Fälle, in denen  $p(x)$  in einem oder in beiden Endpunkten des Intervalles  $(a, b)$  verschwindet. Wird z. B.  $p(x)$  in  $a$  von der  $k^{\text{ten}}$  Ordnung Null ( $k \geq 1$ ) und hat die Gleichung (109) eine in  $a$  endlich bleibende Lösung, so kann man als Randbedingung für eine Lösung von (116) im Endpunkte  $a$  das Endlichbleiben für  $x = a$ , im Endpunkte  $b$  aber irgendeine der obengenannten Randbedingungen vorschreiben. Die Differentialgleichungen der *Legendreschen Polynome* und der *Besselschen Funktionen* sind diesen Methoden zugänglich. Die Entwicklungen nach den Eigenlösungen wurden eingehender behandelt von Kneser, *Math. Ann.* **63** (1907), 477 (vorher nach anderen Methoden *Math. Ann.* **58** (1904), 81; **60** (1905), 402). Vgl. ferner Hilb, *Math. Ann.* **71** (1912), 76; *Journ. f. Math.* **140** (1911), 205. Über die Entwicklungen nach den *Sturm-Liouvilleschen Funktionen* unter allgemeineren Bedingungen vgl. Hobson, *Lond. M. S. Proc.* (2) **6** (1908), 349; (2) **7** (1909), 24; Haar, *Math. Ann.* **69** (1910), 331; **71** (1912), 38; Prüfer, *Math. Ann.* **95** (1926), 499. Auch falls  $L(u)$  nur für  $a < x \leq b$  die zu Beginn dieses Paragraphen formulierten Bedingungen erfüllt, für  $x = a$  aber beliebiges Verhalten zeigt, läßt sich das Studium von (116) auf Integralgleichungen zurückführen, und zwar wird man auf singuläre Integralgleichungen geführt, wie sie S. 1284 erwähnt werden. In der Entwicklungsformel (118) treten dann dementsprechend im allgemeinen Glieder von der Art des Fourierschen Integrales auf. Weyl, *Gött. Nachr.* 1909, 1; *Math. Ann.* **68** (1910), 220; *Jahresb. d. D. Math.-Ver.* **20** (1911), 129; vgl. auch Hilb, *Math. Ann.* **66** (1909), 1.

Eine analoge Behandlung von Systemen von Differentialgleichungen 2. Ordnung Hilbert, *Gött. Nachr.* 1906, 474.

Man kann auch auf die Differentialgleichung (120) direkt die Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen anwenden, wodurch man, wenn  $k(x)$  beliebiges

Vorzeichen hat, zu weitergehenden Resultaten gelangt (Lichtenstein *C. R.* **156** (1913), 993; *Palermo Rend.* **38** (1914), 113). Wir bezeichnen im folgenden die unabhängige Veränderliche mit  $t$  und betrachten der Einfachheit halber die Differentialgleichung

$$(129) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda k u = 0$$

im Intervalle  $(0,1)$ .

Damit in diesem Intervalle die Funktion  $u(t)$  der Gleichung (129) genüge, ist (wie die Variationsrechnung lehrt) notwendig und hinreichend, daß für jede stetige, in 0 und 1 verschwindende Funktion  $v(t)$ , die unbestimmtes Integral einer samt ihrem Quadrate integrierbaren Funktion ist, die Gleichung bestehe

$$(130) \quad \int_0^1 \left( \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} - \lambda k u v \right) dt = 0.$$

Wie aus der Theorie der Fourierschen Reihen folgt, kann jede solche Funktion  $v(t)$  in der Form dargestellt werden:

$$(131) \quad v(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{y_p}{p} \sin p\pi t \quad \left( \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2 \text{ konvergent} \right),$$

und umgekehrt: jede in der Form (131) darstellbare Funktion  $v(t)$  hat die genannten Eigenschaften.

Setzen wir auch

$$(132) \quad u(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{p} \sin p\pi t \quad \left( \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \text{ konvergent} \right),$$

so wird, bei Benutzung der Bezeichnungen (70) und (80)

$$(133) \quad \int_0^1 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} dt = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} x_p y_p = \frac{1}{2} (x, y)$$

sowie

$$(134) \quad \int_0^1 k u v dt = \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p y_q = \frac{1}{2} K(x, y),$$

wo

$$k_{pq} = k_{qp} = \frac{2}{p q} \int_0^1 k \sin p\pi t \sin q\pi t dt.$$

Die Gleichung (130) geht somit über in

$$(135) \quad (x, y) - \lambda K(x, y) = 0.$$

Da  $\sum_{p, q=1}^{\infty} k_{pq}^2$  augenscheinlich konvergiert, ist die quadratische Form  $K(x, x)$  *vollstetig*. Ist  $k(x)$  nicht streckenweise  $= 0$ , so ist, wie sich zeigen läßt,  $K(x, x)$  *abgeschlossen*, was wir der Einfachheit halber annehmen wollen.

Wir betrachten nun insbesondere die erste Randwertaufgabe für die Differentialgleichung (129) im Intervalle  $(0, 1)$ . Aus dem Gesagten folgert man leicht: die Eigenwerte für diese Randwertaufgabe sind identisch mit den Eigenwerten der Form  $K(x, x)$ . Man erhält die zum Eigenwerte  $\lambda_n$  gehörigen Eigenlösungen der Randwertaufgabe, indem man in (132) für die  $x_p$  die Koeffizienten  $l_p^{(n)}$  der zum Eigenwerte  $\lambda_n$  gehörigen linearen Eigenformen

$$L_n(x) = \sum_{p=1}^{\infty} l_p^{(n)} x_p$$

von  $K(x, x)$  einsetzt. Sind die  $L_n(x)$  insbesondere normiert  $\left(\sum_{p=1}^{\infty} (l_p^{(n)})^2 = 1\right)$ , und setzt man

$$(136) \quad u_n(t) = \sqrt{2|\lambda_n|} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{l_p^{(n)}}{p} \sin p\pi t,$$

so erhält man die *normierten* Eigenlösungen

$$(137) \quad \int_0^1 k(x) u_n(x) u_m(x) dt = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ \operatorname{sgn} \lambda_n & (n = m). \end{cases}$$

Das Entwicklungstheorem nach den normierten Eigenfunktionen (136) erhält man in folgender Weise: Nach (131) gilt für die durch (119) gegebene Greensche Funktion  $G^{(I)}(t, \tau)$  des Differentialausdruckes  $\frac{d^2 u}{dt^2}$  eine Entwicklung

$$(138) \quad G^{(I)}(t, \tau) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{g_p}{p} \sin p\pi t \quad \left( \sum_{p=1}^{\infty} g_p^2 \text{ konvergent} \right).$$



Setzt man in der aus (88) sich ergebenden Formel

$$(139) \quad (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n(x) L_n(y)$$

für die  $x_p$  die in (138) auftretenden  $g_p$ , für die  $y_p$  die in (131) auftretenden  $y_p$ , so wird zufolge (133)

$$(x, y) = 2 v(\tau); \quad L_n(x) = \sqrt{\frac{2}{|\lambda_n|}} u_n(\tau),$$

und bei Beachtung von (130)

$$L_n(y) = \sqrt{\frac{2}{|\lambda_n|}} \lambda_n \int_0^1 k(t) u_n(t) v(t) dt,$$

so daß (139) übergeht in

$$(140) \quad v(\tau) = \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{sgn} \lambda_n \cdot \int_0^1 k(t) v(t) u_n(t) dt \cdot u_n(\tau).$$

Durch (140) ist die Entwicklung von  $v(\tau)$  nach den gemäß (137) normierten Eigenfunktionen  $u_n(\tau)$  der betrachteten Randwertaufgabe gegeben, wobei  $v(\tau)$  eine stetige, in 0 und 1 verschwindende Funktion bedeutet, die unbestimmtes Integral einer samt ihrem Quadrate integrierbaren Funktion ist. Die in (140) auftretende Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig in  $(0, 1)$ .

Eine ähnliche Behandlung gestatten die zweite, die dritte und verschiedene andere Randwertaufgaben der Differentialgleichung (122). Man gelangt dabei zu analogen Sätzen (Lichtenstein, *Palermo Rend.* **38** (1914), 113).

Andere Methoden zur Behandlung der Randwertaufgaben bei gewöhnlichen (auch nichtlinearen) Differentialgleichungen 2. und höherer Ordnung sind zum Teil erheblich früher im Anschluß an die Arbeiten von Sturm, Liouville und Schwarzenamentlich von Picard, Poincaré, Stekloff, Zaremba, Korn, Bôcher, Kneser, Dini, später von Mason, Birkhoff, Picone, Haar, Hilb und anderen gegeben worden. Ausführliche Literatur (betreffend Randwertaufgaben und Entwicklungssätze bei gewöhnlichen Differentialgleichungen) bei Bôcher, *Enzykl. II A 7 a*; *Leçons sur les méthodes de Sturm*, Paris 1917; *Boundary problems in one dimension*, Intern. Congress

of *Math. Cambridge* 1912, **1**, 163; Lichtenstein, *Palermo Rend.* **38** (1914), 113; Geiringer, *Math. Zeitschr.* **12** (1922), 17. Man vgl. ferner Mammanna, *Math. Zeitschr.* **25** (1926), 734; *Annali della R. Scuola Superiore di Pisa* **15** (1926), 3, sowie Tamarkin, *Math. Zeitschr.* **27** (1927), 1; Hilb-Szász, *Enzykl. II C* 11.

### § 8. Lineare Integralgleichungen und die Randwertaufgaben der Potentialtheorie.

Unter einer in einem Gebiete  $T$  der  $xy$ -Ebene *harmonischen Funktion* (auch *Potentialfunktion*) versteht man eine in  $T$  samt ihren Ableitungen der 1. und 2. Ordnung stetige Funktion  $u(x, y)$ , die der *Laplaceschen Differentialgleichung* genügt

$$(141) \quad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Eine solche Funktion ist in  $T$  regulär analytisch.

Sei  $q$  ein fester Punkt mit den Koordinaten  $(\xi, \eta)$ ,  $p$  der variable Punkt  $(x, y)$ . Wir setzen

$$r_{pq} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

Dann ist

$$(142) \quad g(p, q) = \log \frac{1}{r_{pq}}$$

eine überall, außer im Punkte  $q$ , harmonische Funktion des Punktes  $p$ ; sie wird bezeichnet als das (logarithmische) Potential der im Punkte  $q$  befindlichen Masseneinheit.

Wir legen durch  $q$  eine bestimmte Richtung, die wir mit  $\nu$  bezeichnen. Betrachten wir  $g(p, q)$  als Funktion von  $q$  und bilden im Punkte  $q$  die Ableitung nach der Richtung  $\nu$ , so erhalten wir die Funktion

$$(143) \quad h(p, q; \nu) = \frac{1}{r_{pq}} \cos(\nu, r_{pq}),$$

wo unter dem Winkel  $(\nu, r_{pq})$  derjenige zu verstehen ist, den die Richtung  $\nu$  mit dem von  $q$  nach  $p$  gezogenen Radiusvektor einschließt.

Die Funktion  $h(p, q; \nu)$  ist eine überall, außer im Punkte  $q$ , harmonische Funktion des Punktes  $p$ ; sie wird bezeichnet als das Potential eines in  $q$  befindlichen Doppelpoles, dessen Achse die Richtung  $\nu$  hat.

Sei  $C$  eine einfache geschlossene rektifizierbare Kurve; die rechtwinkligen Koordinaten ihrer Punkte seien zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $x(s)$ ,  $y(s)$  des Bogens  $s$ . Der Punkt  $(x(s), y(s))$  von  $C$  werde kurz als der Punkt  $s$  bezeichnet;  $\mu(s)$ ,  $\kappa(s)$  seien abteilungsweise stetige Funktionen des Punktes  $s$ ;  $n_s$  bezeichne die Richtung der vom Punkte  $s$  ins Innere von  $C$  gezogenen Normalen von  $C$ . Mit  $\int_{(C)}$  werde eine über die Kurve  $C$  erstreckte Integration bezeichnet. Das von  $C$  begrenzte endliche Gebiet möge  $T$  heißen.

*Die beiden Funktionen*

$$(144) \quad V(p) = \int_{(C)} \mu(s) g(p, s) ds,$$

$$(145) \quad W(p) = \int_{(C)} \kappa(s) h(p, s; n_s) ds$$

sind überall, außer in den Punkten von  $C$ , harmonisch.

Der Ausdruck  $V(p)$  wird bezeichnet als *Potential einer (auf  $C$  ausgebreiteten) einfachen Schicht von der Dichte  $\mu(s)$* , der Ausdruck  $W(p)$  als *Potential einer Doppelschicht von der Dichte  $\kappa(s)$* . Die  $V(p)$  und  $W(p)$  darstellenden Integrale behalten einen Sinn, auch wenn der Punkt  $p$  auf  $C$  liegt. Die Funktion  $V(p)$  ist überall (auch in den Punkten von  $C$ ) stetig.

Legen wir die Normale von  $C$  im Punkte  $s$ , wählen auf ihr als positiv die Richtung von  $s$  ins Innere von  $C$ , und betrachten wir die Funktion  $V(p)$  auf dieser Geraden. Die Ableitung  $\frac{\partial V(p)}{\partial n}$  hat, wenn sich  $p$  dem Punkte  $s$  von innen oder von außen nähert, je einen Grenzwert. Wir bezeichnen diese Grenzwerte mit  $\frac{\partial V^+(s)}{\partial n}$  bzw.  $\frac{\partial V^-(s)}{\partial n}$ . Sowohl  $\frac{\partial V^+(s)}{\partial n}$  als auch  $\frac{\partial V^-(s)}{\partial n}$  sind entlang der Kurve  $C$  abteilungsweise stetig. Es gelten die Gleichungen

$$(146) \quad \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V^-(s)}{\partial n} - \frac{\partial V^+(s)}{\partial n} \right] = \pi \mu(s),$$

$$(147) \quad \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V^-(s)}{\partial n} + \frac{\partial V^+(s)}{\partial n} \right] = \int_{(C)} \mu(t) h(t, s; n_s) dt.$$

Die Funktion  $W(p)$  ist in den Punkten der Kurve  $C$  unstetig; doch hat sie, sowohl wenn man sich dem Kurvenpunkt  $s$

von innen her, als auch wenn man sich ihm von außen her nähert, je einen Grenzwert; wir bezeichnen diese Grenzwerte mit  $W^+(s)$  bzw.  $W^-(s)$ ; sie sind entlang der Kurve  $C$  abteilungsweise stetig. Es gelten die Gleichungen

$$(148) \quad \frac{1}{2} [W^+(s) - W^-(s)] = \pi \kappa(s),$$

$$(149) \quad \frac{1}{2} [W^+(s) + W^-(s)] = \int_{(C)} \kappa(t) h(s, t; n_t) dt = W(s).$$

Wir legen die Normale von  $C$  im Punkte  $s$  wie oben und bezeichnen mit  $\varepsilon$  die Abszissen auf dieser Geraden, vom Punkte  $s$  als Nullpunkt gerechnet. Die Funktion  $W(p)$ , auf dieser Geraden betrachtet, werde mit  $W(\varepsilon)$  bezeichnet. Für  $\varepsilon \neq 0$  existiert dann die Ableitung  $\frac{dW}{d\varepsilon}$ . Es gilt der Satz: Existiert von den beiden Grenzwerten  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{dW}{d\varepsilon}$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \frac{dW}{d\varepsilon}$  der eine, so existiert auch der andere, und sie sind einander gleich (Tauber, *Monatsh. f. Math.* 8 (1897), 79; *Wiener Ber.* 132 (1927), 309; Liapounoff, *J. de Math.* (5) 4 (1898), 241).

Für irgend zwei im Innern von  $T$  sowie auf  $C$  samt ihren Ableitungen 1. und 2. Ordnung stetige Funktionen  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  gilt der Greensche Satz

$$(150) \quad \int_T (v \Delta u - u \Delta v) dx dy = - \int_{(C)} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

Dabei ist das links stehende Integral über das von  $C$  begrenzte Flächenstück  $T$  zu erstrecken, und mit  $\frac{\partial u}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial n}$  sind die Ableitungen von  $u$  und  $v$  in dem Punkte  $s$  in der Richtung der inneren Normale bezeichnet.

Sind  $u$  und  $v$  im Innern von  $T$  harmonisch, auf  $C$  stetig, existieren auf  $C$  die Ableitungen  $\frac{\partial u}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial n}$  und sind diese Ableitungen entlang  $C$  ebenfalls stetig, so ist

$$(151) \quad \int_{(C)} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0.$$

Für jede im Innern von  $T$  harmonische, auf  $C$  den Bedingungen des vorigen Satzes genügende Funktion  $u$  ist

$$(152) \quad \int_{(C)} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Der Wert einer solchen Funktion in einem Innenpunkte  $p$  von  $T$  ist gegeben durch

$$(153) \quad u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} u(s) h(p, s; n_s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} u(s) g(p, s) ds;$$

für jede solche Funktion  $u$  gilt, sofern sie nicht konstant ist, die Ungleichung

$$(154) \quad \int_{(C)} u \frac{\partial u}{\partial n} ds < 0.$$

Eine im Punkte  $p$  sowie in seiner Umgebung harmonische Funktion kann in  $p$  weder ein Maximum noch ein Minimum haben. Eine in  $T$  und auf  $C$  stetige, im Inneren von  $T$  harmonische Funktion, die sich bei beliebiger Annäherung an  $C$  (von innen her) der Grenze Null nähert, ist demnach identisch Null.

Als erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie (*Dirichlet'sches Problem*) bezeichnet man die Aufgabe, eine in  $T$  und auf  $C$  stetige, im Innern von  $T$  harmonische Funktion zu finden, die auf  $C$  eine vorgegebene stetige Wertfolge annimmt. Es kann nicht mehr als eine solche Funktion geben.

Als zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie bezeichnet man die Aufgabe, eine in  $T$  und auf  $C$  stetige, im Innern von  $T$  harmonische Funktion zu finden, für die in den Punkten von  $C$  die Ableitung in der Richtung der inneren Normalen existiert und vorgegebene Werte hat, die wir als stetig annehmen wollen. Eine solche Funktion ist bis auf eine additive Konstante vollkommen bestimmt. Die für die normale Ableitung auf  $C$  vorgeschriebenen Werte mögen mit  $f(s)$  bezeichnet werden. Die Aufgabe ist wegen (152) nur dann lösbar, wenn

$$(155) \quad \int_{(C)} f(s) ds = 0.$$

Es sei  $\lambda$  ein Parameter,  $f(s)$  eine auf der Kurve  $C$  gegebene stetige Funktion. Als *Neumannsches Problem* werden die beiden folgenden Randwertaufgaben bezeichnet:

Eine Doppelschicht auf  $C$  so zu bestimmen, daß ihr Potential der Bedingung genügt

$$(156) \quad \frac{1}{2} [W^+(s) - W^-(s)] - \frac{\lambda}{2} [W^+(s) + W^-(s)] = f(s).$$

Eine einfache Schicht auf  $C$  so zu bestimmen, daß ihr Potential der Bedingung genügt

$$(157) \quad \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V^-(s)}{\partial n} - \frac{\partial V^+(s)}{\partial n} \right] - \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{\partial V^-(s)}{\partial n} + \frac{\partial V^+(s)}{\partial n} \right] = f(s).$$

Die Lösung von (156) für  $\lambda = -1$  liefert uns zugleich die Lösung der ersten Randwertaufgabe, die Lösung von (157) für  $\lambda = +1$  die der zweiten Randwertaufgabe.

Sei  $\kappa(s)$  die Belegung von  $W(p)$  in (156) und  $\mu(s)$  die Belegung von  $V(p)$  in (157); sind  $s$  und  $t$  Punkte von  $C$ , so schreiben wir  $K(s, t)$  statt  $\frac{1}{\pi} h(s, t; n_t)$ . Wegen (148), (149) und (146), (147) sind (156) und (157) äquivalent den beiden Fredholmschen Integralgleichungen für  $\kappa(s)$  und  $\mu(s)$ :

$$(158a) \quad \frac{1}{\pi} f(s) = \kappa(s) - \lambda \int_{(C)} K(s, t) \kappa(t) dt,$$

$$(158b) \quad \frac{1}{\pi} f(s) = \mu(s) - \lambda \int_{(C)} K(t, s) \mu(t) dt,$$

deren Kern  $K(s, t)$  eine stetige Funktion ist.

Der Wert  $\lambda = -1$  ist für die Gleichungen (158) nicht singulär; denn sonst hätte (158a) für  $f(s) = 0$  und  $\lambda = -1$  eine Lösung  $\varphi(s)$ , die als Belegung einer Doppelschicht ein Potential liefern würde, das, ohne identisch zu verschwinden, sich bei Annäherung an  $C$  von innen her der Null nähert, und das ist nach einem obigen Satze unmöglich. Daher:

*Die erste Randwertaufgabe ist bei beliebig gegebenen stetigen Randwerten stets eindeutig lösbar.*

Der Wert  $\lambda = +1$  ist für die Gleichungen (158) stets singulär. Die Gleichung (158a) besitzt für  $f(s) = 0$  und  $\lambda = 1$  die Lösung  $\varphi(s) = 1$ . Eine von dieser Lösung unabhängige Lösung  $\varphi_1(s)$  kann sie nicht besitzen; denn  $\varphi_1(s)$  würde als Belegung einer Doppelschicht ein Potential  $W_1(s)$  liefern, für das  $W_1^-(s) = 0$  ist;  $W_1(s)$  wäre daher außerhalb  $C$  identisch



Null; nach einem obigen Satze von Tauber und Liapounoff müßte daher  $\frac{\partial W_1^{+}(s)}{\partial n}$  existieren und gleich Null sein; daher wäre nach (154)  $W_1(s)$  im Innern von  $C$  konstant und folglich  $\varphi_1(s)$  konstant. Durch Anwendung der Sätze über die Auflösbarkeit einer Fredholmschen Gleichung für einen singulären Parameterwert (§ 1) folgt:

*Die zweite Randwertaufgabe ist dann und nur dann lösbar, wenn (155) erfüllt ist; ihre Lösung ist bis auf eine additive Konstante bestimmt.*

Sei  $q = (\xi, \eta)$  ein Punkt im Innern von  $T$ . Aus der Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe folgt die Existenz einer Funktion

$$G(\xi, \eta; x, y) = G(q; p),$$

die als Funktion von  $p = (x, y)$  mit Ausnahme des Punktes  $q$  in  $T$  und auf  $C$  stetig, im Innern von  $T$  harmonisch ist, in der Umgebung von  $q$  die Gestalt hat

$$\log \frac{1}{r_{pq}} + \text{eine harmonische Funktion}$$

und die auf  $C$  den Wert 0 hat. Sie heißt die zur ersten Randwertaufgabe gehörige *Greensche Funktion* oder die *Greensche Funktion* schlechthin. Ihre ersten Ableitungen nach  $x$  und  $y$  sind auf  $C$  stetig. Für alle Punkte  $p$  im Innern von  $T$  ist

$$G(q; p) > 0.$$

Ferner ist in allen Punkten  $s$  vom  $C$

$$\frac{\partial}{\partial n} G(q; s) > 0.$$

(Vgl. z. B. Lichtenstein, *Math. Zeitschr.* **11** (1921), 319.) Schließlich gilt

$$G(p; q) = G(q; p)$$

für je zwei Punkte  $p$  und  $q$  im Innern von  $T$ .

Kennt man diese Greensche Funktion, so wird die erste Randwertaufgabe gelöst durch folgende Formel:

Die in  $T$  harmonische Funktion  $u(p)$ , die auf  $C$  die stetige Wertfolge  $f(t)$  annimmt, ist gegeben durch

$$(159) \quad u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} f(t) \frac{\partial}{\partial n} G(p; t) dt.$$

Die im obigen festgehaltene Voraussetzung, daß die gegebenen Randwerte stetig seien, kann durch die weitere Voraussetzung ersetzt werden, die Randwerte seien nur *abteilungsweise* stetig. Dann aber muß wenn die Unität der Lösung gesichert sein soll, vorausgesetzt werden, daß die Lösung *beschränkt* ist.

Die Greensche Funktion kann in folgender Weise zur Lösung der ersten Randwertaufgabe für die inhomogene Gleichung

$$(160) \quad \Delta u = \varphi(x, y)$$

verwendet werden:  $\varphi(x, y)$  sei eine in  $T$  und auf  $C$  stetige Funktion, die in  $T$  der Hölderschen Bedingung genügt

$$(161) \quad |\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)| < c(|h| + |k|)^{\lambda},$$

$$c = \text{const.}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Dann ist

$$(162) \quad u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \iint \varphi(x, y) G(\xi, \eta; x, y) dx dy$$

diejenige (in  $T$  und auf  $C$  stetige, im Innern von  $T$  mit stetigen partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung versehene) Lösung von (160), die auf  $C$  den Wert 0 annimmt. Durch Kombination der Formeln (159) und (162) erhält man für diejenige Lösung von (160), die auf  $C$  eine vorgegebene stetige (oder abteilungsweise stetige) Wertfolge  $f(s)$  annimmt,

$$(163) \quad u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \iint_T \varphi(x, y) G(\xi, \eta; x, y) dx dy$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_C f(t) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta; t) dt.$$

Ähnliche Sätze gelten für die Gleichung  $\Delta u = 0$  in drei Variablen

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Die Funktionen, die ihr in einem Gebiete  $G$  des dreidimensionalen Raumes genügen, werden auch als *Newtonsche Potentiale* bezeichnet. Vgl. Kap. XXII d. Bandes.

Die Zurückführung der Randwertaufgaben der Potentialtheorie auf Integralgleichungen stammt von Fredholm (*Stockh.*

*Öfvers.* **57** (1900), 39) und bildete den Ausgangspunkt für die ganze Theorie der Integralgleichungen. Näheres bei Plemelj, *Monatsh.* **15** (1904), 337 und **18** (1907), 180; *Potentialtheoretische Untersuchungen*, Leipzig 1911; Picard, *Rend. Pal.* **22** (1906), 241 und **29** (1910), 93; Blumenfeld und Mayer, *Wiener Ber.* **123** (1914), 2011; F. Riesz, *Acta math.* **41** (1916), 71; Radon, *Wiener Ber.* **128** (1919), 1083, 1123.

Näheres über Newtonsches und logarithmisches Potential in den Lehrbüchern: Poincaré, *Théorie du potentiel Newtonien*, Paris 1889; Korn, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, Berlin 1899; Burkhardt und Meyer, *Enzykl. II A 7 b*; Lichtenstein, *Enzykl. II C 3*; Harnack, *Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials*, Leipzig 1887; Picard, *Traité d'Analyse*, Bd. I und II, 2. Aufl., Paris 1905.

Wir nennen noch die berühmtesten Methoden, nach denen die Randwertaufgaben der Potentialtheorie vor Fredholm behandelt wurden: die *Methode der arithmetischen Mittel* von C. Neumann (*Math. Ann.* **11** (1877), 558), die im wesentlichen darin besteht, die unbekannte Funktion  $\kappa(t)$  der Integralgleichung (158 a) in die Neumannsche Reihe (8) zu entwickeln und die Konvergenz dieser Reihe nachzuweisen; das *alternierende Verfahren* von Schwarz (*Zürich. Vierteljahrsschr.* **15** (1870), 113, 272; *Berl. Ber.* 1870, 767; *Ges. Abh.* **2**, 133, 166, Berlin 1890), das es gestattet, wenn die Lösung der Randwertaufgabe für zwei sich teilweise überdeckende Bereiche  $T_1$  und  $T_2$  bekannt ist, daraus ihre Lösung für den Bereich  $T_1 + T_2$  zu bilden; endlich die *Ausfegungsmethode* (*méthode du balayage*) von Poincaré (*C. R.* **194** (1887), 44; *Amer. J. of math.* **12** (1890), 216). Über die Lösung der Randwertaufgaben durch Methoden der Variationsrechnung vgl. Kap. XIV, § 8.

### § 9. Anwendungen der Theorie der linearen Integralgleichungen auf die Randwertaufgaben bei linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.

Es sei der lineare Differentialausdruck 2. Ordnung in  $u(x, y)$

$$\begin{aligned}
 (164) \quad A(u) \equiv & A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 & + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y) u
 \end{aligned}$$

gegeben. Dabei mögen die Funktionen  $A, B, C$  samt ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen,  $D, E$  samt ihren Ableitungen der ersten Ordnung stetig sein; die Funktion  $F$  sei schlechthin stetig;  $u(x, y)$  bezeichnet eine beliebige nebst ihren Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung stetige Funktion.

Der Differentialausdruck

$$(165) \quad M(u) \equiv \frac{\partial^2(Au)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2(Bu)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(Cu)}{\partial y^2} - \frac{\partial(Du)}{\partial x} - \frac{\partial(Eu)}{\partial y} + Fu$$

heißt zu  $A(u)$  adjungiert. Man überzeugt sich leicht, daß  $A(u)$  umgekehrt zu  $M(u)$  adjungiert ist.

Es seien  $S_1, S_2, \dots, S_m$  geschlossene, doppelpunktlose, stetig gekrümmte, einander weder schneidende noch berührende Kurven in der Ebene der Variablen  $x$  und  $y$  und  $T$  das von ihnen begrenzte als endlich vorauszusetzende Gebiet.<sup>1)</sup> Es seien endlich  $u'(x, y), v'(x, y)$  beliebige in  $T$  und auf  $S$  nebst ihren partiellen Ableitungen 1. Ordnung stetige Funktionen, deren partielle Ableitungen 2. Ordnung sich im Innern von  $T$  stetig verhalten. Es gilt der Greensche Satz

$$(166) \quad \iint_T [v' A(u') - u' M(v')] dx dy = \int_S (Q dy - P dx)$$

$$P = B \left( v' \frac{\partial u'}{\partial x} - u' \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + C \left( v' \frac{\partial u'}{\partial y} - u' \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \left( E - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) u' v',$$

$$Q = A \left( v' \frac{\partial u'}{\partial x} - u' \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + B \left( v' \frac{\partial u'}{\partial y} - u' \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \left( D - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) u' v'.$$

Ist  $M(u) \equiv A(u)$ , so heißt  $A(u)$  *sich selbst adjungiert*. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist

$$(167) \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = D, \quad \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = E.$$

Im Gegensatz zu den in § 7 behandelten gewöhnlichen Differentialausdrücken läßt sich nicht jeder partielle Differentialausdruck der Form (164) durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor in einen sich selbst adjungierten überführen.

1) Zur Vereinfachung wird die Gesamtheit der Kurven  $S_1, S_2, \dots, S_m$  kurz mit  $S$  bezeichnet.

Der Ausdruck  $A(u)$  heißt vom *elliptischen*, *hyperbolischen* oder *parabolischen* Typus in  $T$ , je nachdem in diesem Gebiete  $B^2 - AC$  *negativ*, *positiv* oder *gleich Null* ist. Wir werden uns im folgenden nur mit Differentialausdrücken vom elliptischen Typus beschäftigen.

Setzt man  $A = C = 1$ ,  $B = 0$ ,  $D = a$ ,  $E = b$ ,  $F = c$ , so erhält man einen elliptischen Differentialausdruck 2. Ordnung in der *Normalform*

$$(168) \quad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu.$$

Der adjungierte Differentialausdruck lautet jetzt

$$(169) \quad M(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) u.$$

Der Greensche Satz nimmt die Form an

$$(170) \quad \iint_T [v' L(u') - u' M(v')] dx dy \\ = - \int_S \left( v' \frac{\partial u'}{\partial n} - u' \frac{\partial v'}{\partial n} \right) ds + \int_S u' v' (a dy - b dx),$$

unter  $\frac{\partial}{\partial n}$  die Ableitung in der Richtung der Innennormale verstanden. Für die Gültigkeit des Satzes genügt es bereits, wenn die Funktionen  $u'$  und  $v'$  in  $T$  und auf  $S$  stetig sind, ihre partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung sich im Innern von  $T$  stetig verhalten und die Ableitung in der Richtung der Innennormale bei der Annäherung an den Rand gegen einen Grenzwert gleichmäßig konvergiert.

Da unter sehr allgemeinen Voraussetzungen der allgemeine Differentialausdruck (164) vom elliptischen Typus durch Einführung neuer Veränderlicher für  $x$  und  $y$  auf die Normalform (168) gebracht werden kann (vgl. § 11), beschränken wir uns nun auf diese. Wir setzen dabei voraus, daß  $a$  und  $b$  in  $T$  und auf  $S$  nebst ihren partiellen Ableitungen 1. Ordnung stetig sind und daß der Ausdruck  $\Pi(x, y) = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$  sowie die in  $T$  und auf  $S$  stetige Funktion  $c$  in  $T$  der Hölderschen Bedingung (vgl. (161))

$$\begin{aligned}
 & |\Pi(x+h, y+k) - \Pi(x, y)| < C_0[|h| + |k|]^\lambda, \\
 (171) \quad & |c(x+h, y+k) - c(x, y)| < C_0[|h| + |k|]^\lambda, \\
 & 0 < \lambda < 1 \quad (C_0 = \text{Const.})
 \end{aligned}$$

genügen. Es sei schließlich  $f(x, y)$  irgendeine in  $T$  und auf  $S$  stetige, in  $T$  ebenfalls der Hölderschen Bedingung genügende Funktion.

Als *erste Randwertaufgabe* der Differentialgleichung  $L(u) = f$  bezeichnet man die Aufgabe, eine Lösung dieser Differentialgleichung zu finden, die in  $T$  und auf  $S$  stetig ist, im Innern von  $T$  stetige partielle Ableitungen der 1. und 2. Ordnung besitzt (eine solche Lösung heißt kurz eine *reguläre Lösung*) und auf  $S$  eine vorgeschriebene stetige Wertfolge annimmt. (Vgl. Kap. XXII dieses Bandes.)

Es seien  $S'_1, S'_2, \dots, S'_m$  geschlossene, regulär analytische doppelpunktlose Kurven im Innern von  $T$ , die einander weder schneiden noch berühren, und  $T'$  das von ihnen begrenzte  $m$ -fach zusammenhängende Gebiet. Die Begrenzung von  $T'$  möge  $S'$  heißen. Es seien  $v(x, y)$  und  $v'(x, y)$  diejenigen beschränkten, entsprechend in  $T$  und in  $T'$  regulären harmonischen Funktionen, die auf  $S$  bzw.  $S'$  dieselben Werte wie die gesuchte Lösung  $u(x, y)$  annehmen. Es seien endlich  $G(x, y; \xi, \eta)$  und  $G'(x, y; \xi, \eta)$  die zu  $T$  bzw.  $T'$  gehörigen Greenschen Funktionen für die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie (§ 8). Aus

$$(172) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} - cu + f$$

folgt nach Formel (163)<sup>1)</sup> für alle  $(x, y)$  in  $T'$

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{T'} G'(x, y; \xi, \eta) \\
 (173) \quad & \left[ a(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) u(\xi, \eta) - f(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta \\
 & \quad + v'(x, y)
 \end{aligned}$$

1) Um diese Formel anwenden zu können, mußte  $T$  durch  $T'$  ersetzt werden, weil über das Verhalten von  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  am Rande von  $T$  von vornherein nichts bekannt ist.



oder nach einer teilweisen Integration

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & -\frac{1}{2\pi} \iint_{T'} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [a(\xi, \eta) G'(x, y; \xi, \eta)] \right. \\
 & + \frac{\partial}{\partial \eta} [b(\xi, \eta) G'(x, y; \xi, \eta)] - c(\xi, \eta) G'(x, y; \xi, \eta) \Big\} u(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
 (174) \quad & + \frac{1}{2\pi} \int_S G'(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) [a(\xi, \eta) d\eta - b(\xi, \eta) d\xi] \\
 & - \frac{1}{2\pi} \iint_{T'} G'(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + v'(x, y).
 \end{aligned}$$

Läßt man jetzt das Gebiet  $T'$  gegen  $T$  konvergieren, so erhält man in der Grenze

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & -\frac{1}{2\pi} \iint_T \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [a(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta)] \right. \\
 (175) \quad & + \frac{\partial}{\partial \eta} [b(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta)] - c(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) \Big\} u(\xi, \eta) d\xi d\eta - \\
 & - \frac{1}{2\pi} \iint_T G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + v(x, y).
 \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Integralgleichung; ihr Kern wird für  $x = \xi$ ,  $y = \eta$  wie  $[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{-\frac{1}{2}}$  unendlich; durch zweimalige Iteration gelangt man zu einer äquivalenten Integralgleichung mit stetigem Kern. Der Integralgleichung (175) muß nun die gesuchte Lösung  $u$  der Randwertaufgabe genügen, und umgekehrt läßt sich zeigen, daß eine Lösung  $u$  von (175) stetige partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung hat, auf  $S$  die vorgeschriebenen Randwerte annimmt, und im Innern von  $T$  der Differentialgleichung  $L(u) = f$  genügt. Ist insbesondere  $f(x, y) = 0$ , und sind die für  $u$  vorgeschriebenen Randwerte  $= 0$ , so erhält man die zu (175) gehörige homogene Integralgleichung. Man gelangt also zu dem Satze: *Entweder hat  $L(u) = f$  bei beliebigen stetigen Randwerten eine und nur eine beschränkte, in  $T$  reguläre Lösung, oder die Differentialgleichung  $L(u) = 0$  hat eine endliche Anzahl linear unabhängiger, in  $T$  regulärer, auf  $S$  verschwindender Lösungen.* Wir sagen auch kürzer: Entweder hat das nicht homogene Randwertproblem stets eine und nur eine Lösung, oder das zugehörige ho-

homogene Randwertproblem hat eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen. Im letzteren Falle hat das nicht homogene Problem nur dann Lösungen, wenn die Randwerte und die Funktion  $f(x, y)$  gewissen Integralbeziehungen genügen. Die Lösung ist nicht mehr eindeutig.

Das erste Randwertproblem ist stets eindeutig lösbar, wenn entweder  $c \leq 0$  ist (Paraf, *Ann. de Toulouse*, **6** (1892), 1; Picard, *Traité d'Analyse II* (1905), 34), oder wenn

$$c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \leq 0$$

oder endlich, wenn

$$c - \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial y} \leq 0$$

ist.

Bei den jetzt folgenden Betrachtungen wird vorausgesetzt, daß die nichthomogene Randwertaufgabe der Differentialgleichung  $L(u) = f$  eindeutig lösbar ist.

Es sei  $(x_0, y_0)$  irgendein Punkt im Innern von  $T$ . Es gibt eine und nur eine Lösung  $\mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y)$  der Differentialgleichung  $L(u) = 0$ , die in  $T$ , außer im Punkte  $(x_0, y_0)$  regulär ist, auf  $S$  verschwindet und in der Umgebung von  $(x_0, y_0)$  logarithmisch unendlich wird. Setzt man

$$\mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y) = \log \frac{1}{r} + g(x_0, y_0; x, y), \quad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

so wird weiter gefordert, daß die Funktionen

$$(176) \quad g(x_0, y_0; x, y), \quad \left| \log \frac{1}{r} \right|^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \left| \log \frac{1}{r} \right|^{-1} \frac{\partial g}{\partial y}$$

in  $(x_0, y_0)$  beschränkt sind.

Zur Bestimmung der Funktion  $g$  erhält man die Differentialgleichung

$$(177) \quad L(g) = -L\left(\log \frac{1}{r}\right)$$

und eine zu (175) analoge Integralgleichung.  $\mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y)$  wird die zu dem Gebiete  $T$  gehörige, am Rande verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung  $L(u) = 0$  genannt. Ihre partiellen Ableitungen nach  $x$  und  $y$  sind auf  $S$  stetig. Die Existenz der Greenschen Funktion folgt unter der Voraussetzung analytischer Koeffizienten und hinreichend kleiner Gebiete aus den Arbeiten von Picard (*C. R.* **112** (1891), 685;

**136** (1903), 1293) und Holmgren (*Math. Ann.* **58** (1904), 404). Den allgemeinen Existenzbeweis hat zuerst Hilbert geführt (*Gött. Nachr.* 1904, 248).

Ist, wie vorausgesetzt, die erste Randwertaufgabe der Differentialgleichung  $L(u) = f$  eindeutig lösbar, so ist, wie sich leicht zeigen läßt, auch die erste Randwertaufgabe der adjungierten Differentialgleichung  $M(u) = f$  eindeutig lösbar. Also existiert die auf  $S$  verschwindende Greensche Funktion  $\mathfrak{H}(x_0, y_0; x, y)$  der Differentialgleichung  $M(u) = 0$ . Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y}$  sind auf  $S$  stetig. Setzt man in (170) für  $u'$  und  $v'$  entsprechend  $\mathfrak{G}(x_1, y_1; x, y)$  und  $\mathfrak{H}(x_2, y_2; x, y)$  ein, unter  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  zwei verschiedene Punkte im Innern von  $T$  verstanden, so erhält man

$$(178) \quad \mathfrak{G}(x_1, y_1; x_2, y_2) = \mathfrak{H}(x_2, y_2; x_1, y_1).$$

(Sommerfeld, *Enzykl. d. Math. Wiss.* II A 7c, 516).

Für diejenige reguläre Lösung  $u$  der Gleichung  $L(u) = f$ , die auf  $S$  die Randwerte  $\varphi(s)$  annimmt, erhält man die (zu (163) analoge) Formel

$$(179) \quad \begin{aligned} u(x_0, y_0) = & -\frac{1}{2\pi} \iint_T \mathfrak{H}(x_0, y_0; x, y) f(x, y) dx dy + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{H}(x_0, y_0; x, y) \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Sie wurde zuerst von Sommerfeld a. a. O. aufgestellt, unter allgemeineren Voraussetzungen bewiesen von Lichtenstein, *Journ. f. Math.* **142** (1913), 16; *Acta Math.* **36** (1913), 345.

Die Zurückführung der behandelten Randwertaufgabe auf lineare Integralgleichungen rührt her von Hilbert, *Gött. Nachr.* 1904, 248; Picard, *Pal. Rend.* **22** (1906), 250; *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **23** (1906), 509; Lichtenstein, *Math. Ann.* **67** (1909), 559; *C. R.* **149** (1909), 624; *Journ. f. Math.* **142** (1913), 1. Vorher wurde diese Randwertaufgabe vielfach nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen behandelt (Picard, *Journ. de Math.* (4) **6** (1890), 145; (4) **9** (1893), 217; (5) **6** (1900), 129; *Acta Math.* **25** (1902), 121; Paraf, *Ann. de Toulouse* **6** (1892), 1; Dini, *Acta Math.* **25** (1902), 185; Lichtenstein, *Pal. Rend.* **28** (1909), 267; *Ber. d. Berl. Math. Ges.* **14** (1925), 130), das

aber nur für „hinreichend kleine“ Gebiete  $T$  zum Ziele führte. (Über Anwendung des *alternierenden Verfahrens* auf die Differentialgleichung  $L(u) = f$  vgl. Paraf, loc. cit.; Lichtenstein, *Monatsh. f. Math.* **21** (1910), 172).

Bei Benutzung der Methode der sukzessiven Approximationen wird in der Regel vorausgesetzt, daß die Randwerte, als Funktionen der Bogenlänge aufgefaßt, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. Auch Hilb und Picard gehen von den gleichen Voraussetzungen aus. Der Fall, daß die Randwerte schlechthin stetig oder nur abteilungsweise stetig sind, wurde behandelt von Lichtenstein, *Math. Ann.* **67** (1909), 559; *C. R.* **149** (1909), 624; *Journ. f. Math.* **142** (1913), 3 sowie **143** (1913), 51; *Acta Math.* **36** (1913), 395. Wir legen dem folgenden diese Annahmen zugrunde.

Ferner war bisher vorausgesetzt, daß die Begrenzung  $S$  des Gebietes  $T$  aus geschlossenen, stetig gekrümmten Kurven besteht. Die angeführten Sätze genügen also nicht, um die Randwertaufgabe für ein so einfaches Gebiet, wie ein Dreieck aufzulösen. Der Fall, daß  $S$  eine endliche Anzahl von Ecken oder Spitzen aufweist, wurde behandelt von Lichtenstein, *Acta Math.* **36** (1913), 345; *Journ. f. Math.* **142** (1913), 1. An der zuletzt angegebenen Stelle finden sich auch allgemeinere Ergebnisse.

Eine Auflösung der ersten Randwertaufgabe unter Zugrundelegung eines beliebigen beschränkten einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes und beliebiger stetiger oder abteilungsweise stetiger Randwerte gab Lichtenstein in einer späteren Arbeit (*Ber. der Berl. Math. Ges.* **15** (1916), 123). Weitere Literatur: Lichtenstein, *Palermo Rend.* **33** (1912), 201 und **34** (1912), 278; *Math. Zeitschr.* **20** (1924), 194; Gevrey, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **35** (1918), 129; sowie verschiedene Noten in den *C. R.* Ausführliche Literaturangaben gibt Lichtenstein in der *Enz. der Math. Wiss.* II C 12 an.

## § 10. Die zu dem ersten Randwertproblem gehörigen Entwicklungssätze.

Es sei  $p(x, y)$  eine wesentlich positive ( $p(x, y) \geq p_0 > 0$ ), nebst ihren partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung in  $T$  und auf  $S$  stetige Funktion; es seien ferner  $q(x, y)$  und  $h(x, y)$  gewisse in  $T$  und auf  $S$  stetige, in  $T$  der Hölderschen Bedingung (vgl. (161), (171)) genügende Funktionen. Die elliptische Differentialgleichung

$$(180) \quad \bar{L}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + qu = h$$

ist sich selbst adjungiert.<sup>1)</sup> Wir nehmen an, daß die erste Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist, was, wie wir wissen, insbesondere stets eintritt, wenn  $q \leq 0$  ist. Es sei  $\mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y)$  die zu  $T$  gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung  $\bar{L}(u) = 0$ . Wir setzen

$$(181) \quad \Gamma(x_0, y_0; x, y) = \frac{\mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y)}{p(x_0, y_0)}.$$

Der Greensche Satz (166) nimmt jetzt die Gestalt an

$$(182) \quad \iint_T [v' \bar{L}(u) - u' \bar{L}(v')] dx dy = - \int_S p \left( v' \frac{\partial u'}{\partial n} - u' \frac{\partial v'}{\partial n} \right) ds.$$

Formel (178) geht über in den Reziprozitätssatz

$$(183) \quad \Gamma(x_1, y_1; x_2, y_2) = \Gamma(x_2, y_2; x_1, y_1),$$

und Formel (179) geht nach einiger Umrechnung über in

$$(184) \quad \begin{aligned} u(x, y) = & - \frac{1}{2\pi} \iint_T \Gamma(x, y; \xi, \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_S p(s) \frac{\partial}{\partial n} \Gamma(x, y; \xi, \eta) \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

(Hilbert, *Gött. Nachr.* 1904, 236.)

Betrachten wir speziell die Differentialgleichung

$$(185) \quad \bar{L}(u) + \lambda ku \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + qu + \lambda ku = 0,$$

in der  $\lambda$  einen Parameter,  $k$  eine in  $T$  und auf  $S$  stetige, in  $T$  der Hölderschen Bedingung genügende Funktion bezeichnen.

---

1) Vergleicht man die Gleichungen  $L(u) = f$  und (180) miteinander, so findet man im vorliegenden Falle  $a = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $b = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y}$ . Die zwecks Ableitung der Formel (175) (übrigens nur der Einfachheit halber) eingeführte Voraussetzung, daß  $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$  in  $T$  der Hölderschen Bedingung genügt, ist jetzt überflüssig. Dies kommt daher, daß (180) sich selbst adjungiert ist und die Formel (166) durch (182) zu ersetzen ist.

Wir nehmen an, daß die Greensche Funktion der Differentialgleichung  $\bar{L}(u) = 0$  existiert, und suchen *diejenigen beschränkten, in  $T$  regulären Lösungen  $u(x, y)$  der Differentialgleichung (185) zu bestimmen, die auf  $S$  verschwinden*. Die Formel (184) ergibt für diese Lösungen die homogene Integralgleichung

$$(186) \quad u(x, y) - \frac{\lambda}{2\pi} \iint_T \Gamma(x, y; \xi, \eta) k(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0$$

(Hilbert, *Gött. Nachr.* 1904, 239).

Der Kern dieser Integralgleichung wird für  $\xi = x$ ,  $\eta = y$  logarithmisch unendlich. Der erste iterierte Kern ist durchweg stetig. Ist  $k(x, y)$  in  $T$  und auf  $S$  wesentlich positiv (oder wesentlich negativ), so läßt sich (186) in eine orthogonale Integralgleichung transformieren. Wechselt  $k(x, y)$  in  $T$  das Vorzeichen, so gelangt man zu einer polaren Integralgleichung.

Es sei zunächst  $k(x, y) \neq 0$ . Aus der Theorie der orthogonalen Integralgleichungen ergibt sich zunächst, *daß es unendlich viele, sich nur im Unendlichen häufende Werte  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) des Parameters  $\lambda$  gibt, für die die Differentialgleichung*

$$L(u) + \lambda qu = 0$$

*von Null verschiedene, in  $T$  reguläre, auf  $S$  verschwindende Lösungen  $u_i(x, y)$  ( $i=1, 2, \dots$ ), s. g. Eigenlösungen hat*. Ist  $k(x, y) > 0$ , so sind alle  $\lambda_i$  positiv, ist  $k(x, y) < 0$ , so sind alle  $\lambda_i$  negativ. Nach einer leichten Umformung erhält man den weiteren Satz:

*Jede in der Form*

$$(187) \quad \iint_T \Gamma(x, y; \xi, \eta) \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

*unter  $\psi(\xi, \eta)$  eine stetige Funktion verstanden, darstellbare, insbesondere jede nebst ihren partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung in  $T$  und auf  $S$  stetige, auf  $S$  verschwindende Funktion  $u(x, y)$  läßt sich in eine unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe<sup>1</sup>*

$$(188) \quad u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x, y) \iint_T k(\xi, \eta) u(\xi, \eta) u_i(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

*entwickeln. Die unendliche Reihe*

$$(189) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}$$

*konvergiert.*



Die Zurückführung des soeben betrachteten Randwertproblems der Differentialgleichung (180) auf eine Integralgleichung und die daraus folgende Ableitung des Entwicklungssatzes im Falle  $k(x, y) \neq 0$  stammt von Hilbert (*Gött. Nachr.* 1904, 239). Die Existenz der Eigenwerte war vorher auf anderem Wege von Schwarz, *Acta Fenn.* **15** (1885), 315; *Ges. Abh.* **1**, 241; Picard, *C. R.* **118** (1894), 379; **137** (1903), 502 und Poincaré, *Pal. Rend.* **8** (1894), 57 bewiesen worden. Der Entwicklungssatz ist zuerst von Poincaré in den soeben zitierten Arbeiten abgeleitet worden.

Es möge jetzt die Funktion  $k(x, y)$  in  $T$  das Vorzeichen wechseln. Unter gewissen Voraussetzungen über die Nullstellen von  $k(x, y)$  folgt aus der Hilbertschen Theorie der polaren Integralgleichungen die Existenz unendlich vieler positiver und negativer Eigenwerte. Jede nebst ihren partiellen Ableitungen der vier ersten Ordnungen in  $T$  und auf  $S$  stetige, gewissen zusätzlichen Voraussetzungen genügende Funktion läßt sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe

$$(190) \quad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) \cdot \text{sign } \lambda_n \cdot \iint_T k(\xi, \eta) u(\xi, \eta) u_n(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

entwickeln (Hilbert, *Gött. Nachr.* 1906, 474). Die Existenz der Eigenwerte ist auf anderem Wege zuerst von Mason bewiesen worden (*Journ. de Math.* (5) **10** (1904), 445). Weiter führt eine Anwendung der Theorie vollstetiger quadratischer Formen mit unendlich vielen Veränderlichen. Vgl. Lichtenstein, *Math. Zeitschr.* **3** (1919), 127.

## § 11. Analoge Randwertprobleme und Entwicklungssätze. Integro-Differentialgleichungen.

Es sei jetzt  $T$  ein der Einfachheit halber einfach zusammenhängendes Gebiet. Die Gleichung der Randkurve sei  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ , unter  $s$  die Bogenlänge verstanden. Es wird vorausgesetzt, daß  $x(s)$ ,  $y(s)$  stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen haben. Die zweite Randwertaufgabe, d. h. die Bestimmung einer in  $T$  regulären Lösung der Differentialgleichung  $L(u) = f$ , die auf  $S$  der Beziehung  $\frac{\partial u}{\partial n} = h$  genügt, unter  $\frac{\partial}{\partial n}$  die Ableitung in der Richtung der Innennormale, unter  $h$  eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Funktion verstanden,

läßt sich auf die erste Randwertaufgabe zurückführen (Hilbert, *Gött. Nachr.* 1904, 250; Picard, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **24** (1907), 335; Lichtenstein, *Journ. f. Math.* **143** (1913), 51; *Math. Zeitschr.* **20** (1924), 194). Man gewinnt einen Existenzsatz, der demjenigen, der bei der ersten Randwertaufgabe gilt, ganz analog ist.

Es liege insbesondere die Differentialgleichung

$$(191) \quad L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

vor. Der Greensche Satz (182) ergibt

$$(192) \quad \iint_T [v' L(u') - u' L(v')] dx dy = - \int_S p \left( v' \frac{\partial u'}{\partial n} - u' \frac{\partial v'}{\partial n} \right) ds.$$

Hier hat die homogene Randwertaufgabe  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ auf } S \right)$  eine von Null verschiedene Lösung  $u_0(x, y) = \text{Const.}$  Also gibt es keine zu dem zweiten Randwertproblem gehörige Greensche Funktion. Dagegen existiert eine Greensche Funktion „in weiterem Sinne“ (Hilbert, *Gött. Nachr.* 1905, 4)  $\mathfrak{G}^{II}(x, y; \xi, \eta)$  d. h. eine, außer für  $x = \xi, y = \eta$ , reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$L(u) = 0,$$

die für  $x = \xi, y = \eta$  wie

$$(193) \quad - \frac{1}{2p(\xi, \eta)} \log \{ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \}$$

unendlich wird und den Beziehungen

$$(194) \quad \frac{\partial \mathfrak{G}^{II}}{\partial n} = \frac{2\pi}{\int_S p(s) ds}, \quad \int_S p(s) \mathfrak{G}^{II}(\xi, \eta; s) ds = 0$$

genügt.

Wir fragen nach den in  $T$  regulären Lösungen der Differentialgleichung (191), die auf  $S$  der Beziehung

$$(195) \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0$$

genügen, unter  $\lambda$  einen Parameter verstanden. Führt man in die Formel (192) für  $u'$  und  $v'$  entsprechend  $u$  und  $\mathfrak{G}^{II}$  ein, so

erhält man zur Bestimmung einer solchen Lösung  $u(x, y)$  die Beziehung

$$(196) \quad u(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_S \mathfrak{G}^{II}(x, y; s) p(s) u(s) ds + \frac{1}{\int_S p ds} \int_S p u ds.$$

Setzt man in (192) wieder  $u' = u$ , aber  $v = 1$ , so findet man

$$(197) \quad \int_S p \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

oder nach (195)

$$\int_S p u ds = 0.$$

Läßt man noch  $(x, y)$  in einen Punkt  $s_1$  auf  $S$  übergehen, so wird demnach aus (196)

$$(198) \quad u(s_1) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_S \mathfrak{G}^{II}(s_1; s) p(s) u(s) ds.$$

Die Randwerte  $u$  der der Randbedingung (195) genügenden Lösungen von (191) sind also identisch mit den Lösungen der homogenen Integralgleichung (198). Der Kern dieser Integralgleichung wird für  $s = s_1$  logarithmisch unendlich; sie kann leicht in eine Integralgleichung mit symmetrischem Kerne verwandelt werden. In bekannter Weise ergeben sich hieraus Entwicklungssätze (Hilbert, *Gött. Nachr.* 1904, 255). Vgl. ferner Lichtenstein, *Prace matematyczne* 26 (1915), 219, woselbst dasselbe Problem mit Hilfe der Methode der unendlichvielen Variabeln behandelt wird.

Über die dritte und die höheren Randwertaufgaben, insbesondere über das Randwertproblem mit gemischten Randbedingungen vergleiche Hilbert, *Gött. Nachr.* 1904, 256; Lichtenstein, *Journ. f. Math.* 143 (1913), 93; *Math. Zeitschr.* 20 (1924), 194. Die zu den zweiten und den dritten Randwertaufgaben gehörigen Entwicklungssätze der Differentialgleichung  $\overline{L}(u) + \lambda u = 0$  (wo  $\overline{L}(u)$  den Ausdruck (180) bedeutet) siehe bei Hilbert, *Gött. Nachr.* 1904, 240; Lichtenstein, *Math. Zeitschr.* 3 (1919), 127. (Analoge Sätze für die spezielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0$$

sind früher nach anderen Methoden von Stekloff, *Ann. de la Fac. de Toulouse* (2) **6** (1904), 351 abgeleitet worden.)

Betrachten wir jetzt die allgemeine lineare Differentialgleichung vom elliptischen Typus (vgl. (164))  $\mathcal{A}(u) = 0$ . Eine außer im Punkte  $(x, y)$  reguläre Lösung  $\mathfrak{G}_0(x, y; \xi, \eta)$  von  $\mathcal{A}(u) = 0$ , die sich in  $(x, y)$  wie

$$(215) \quad -\frac{1}{2} \log \{ C(x, y) (x - \xi)^2 - 2B(x, y) (x - \xi) (y - \eta) + A(x, y) (y - \eta)^2 \} = g_0(x, y; \xi, \eta)$$

verhält, wird *Grundlösung* genannt. Es wird vorausgesetzt, daß die Ausdrücke

$$\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}_0 - g_0, \quad \left[ \left| \frac{\partial \overline{\mathfrak{G}}}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial \overline{\mathfrak{G}}}{\partial \eta} \right| \right] [\log \{ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \}]^{-1}$$

beschränkt sind.

Die Bestimmung einer Grundlösung der Differentialgleichung  $\mathcal{A}(u) = 0$  ist unter der Voraussetzung, daß die partiellen Ableitungen 2. Ordnung der Funktionen  $A, B, C$  der Hölderschen (oder allgemeiner einer Dinischen) Bedingung genügen, die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktionen  $D, E, F$  stetig sind, von E. E. Levi auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung zurückgeführt worden (*Palermo Rend.* **24** (1907), 275).

Hieraus folgt die Möglichkeit der konformen Abbildung nicht-analytischer, singularitätenfreier Flächenstücke auf Teile einer Ebene, sofern die kartesischen Koordinaten der Punkte jener Flächenstücke als Funktionen der Gaußschen Parameter  $p_0, q_0$  stetige, der Hölderschen oder allgemeiner einer Dinischen Bedingung genügenden Ableitungen 3. Ordnung haben. Es genügt aber sogar die Existenz der die Lipschitzsche Bedingung

$$(216) \quad |\Omega(p_0 + h, q_0 + k) - \Omega(p_0, q_0)| < \text{Const.} \{ |h| + |k| \}$$

erfüllenden Ableitungen 1. Ordnung der kartesischen Koordinaten der Punkte des (immer als singularitätenfrei vorauszusetzenden) Flächenstückes (Lichtenstein, *Abh. der Berlin. Akad.* 1911).

Aus der Existenz der Grundlösungen  $\mathfrak{G}_0(x, y; \xi, \eta)$  kann ferner gefolgert werden, daß der Differentialausdruck (164)  $\mathcal{A}(u)$  durch Einführung neuer Veränderlicher für  $x$  und  $y$  auf die Normalform (168) gebracht werden kann (Lichtenstein, *Journ. f. Math.* **142** (1913), 35). Auf anderem Wege ist diese Aufgabe unter

Zugrundelegung analytischer Koeffizienten von Picard, *Traité d'Analyse* II (1905), 27 und S. Bernstein, *Math. Ann.* **69** (1910), 91 gelöst worden.

Die Bestimmung der auf geschlossenen Flächen regulären Lösungen gewisser (sich selbst adjungierter) linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung vom elliptischen Typus in der nicht-normalen Form ist von Hilbert auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung reduziert worden (Methode der Parametrix, *Gött. Nachr.* 1910, 8). Dasselbst die sich anschließenden Entwicklungssätze. Ferner bei Haupt, *Math. Ann.* **88** (1922), 136.

Wegen Anwendung der Integralgleichungen auf vollkommen elliptische Differentialgleichungen  $2p^{\text{ter}}$  Ordnung (Existenz von Grundlösungen, Randwertaufgaben) s. E. E. Levi, *Pal. Rend.* **24** (1907), 275; *Mem. d. Soc. It. d. Scienze* (3) **16** (1909), 3). Dabei heißt eine Differentialgleichung  $2p^{\text{ter}}$  Ordnung,

$$\sum_{l+m=2n} a_{lm}(x, y) \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^l \partial y^m} + \sum_{l+m < 2n} b_{lm}(x, y) \frac{\partial^{l+m} u}{\partial x^l \partial y^m} = 0$$

vollkommen elliptisch, wenn ihre Charakteristiken imaginär sind, d. h. wenn die Gleichung

$$\sum_{l+m=2n} a_{lm}(x, y) z^l = 0$$

keine reelle Wurzel hat.

Weitere Anwendungen der linearen Integralgleichungen auf die zwei- und dreiparametrischen Randwertaufgaben und das Kleinsche Oszillationstheorem bei Hilbert, *Gött. Nachr.* 1910, 58 (vgl. hierzu Richardson, *Math. Ann.* **73** (1913), 289); die Funktionentheorie, Hilbert, *Gött. Nachr.* 1905, 1; Plemelj, *Monatshefte* **19** (1908), 211; Systeme zweier linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung vom elliptischen Typus: Hilbert, *Gött. Nachr.* 1910, 1; W. A. Hurwitz, *Gött. Diss.* 1910. Weitere Anwendungen bei Picard, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **25** (1908), 585; (3) **26** (1909), 9; *Pal. Rend.* **37** (1914), 249.

Untersuchungen über die Verteilung der zu der ersten und der zweiten Randwertaufgabe der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (\lambda k - q)u = 0$$

sowie zu gewissen Differentialgleichungen der mathematischen Physik gehörigen Eigenwerte sind von Weyl und Courant an-



gestellt worden: Weyl, *Math. Ann.* **71** (1912), 441; *Journ. f. Math.* **141** (1912), 163; **143** (1913), 177; Courant, *Math. Zeitschr.* **7** (1920), 1; **15** (1922), 195.

Über die Anwendungen der linearen Integralgleichungen auf die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie vgl. Fredholm, *Arkiv for Mat.* **2** (1906) Nr. 28; Hadamard, *Mém. présentés à l'Ac. des Sc.* **33** (1908); Haar, *Gött. Nachr.* 1907, 280. Hierzu die andere Methoden benutzenden Arbeiten von E. und F. Cosserat, Korn, Hadamard, Lauricella, Zaremba und anderen.

Mit der Existenz der Eigenwerte besonderer linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung vom elliptischen Typus bei verschiedenen Randbedingungen sowie mit der Entwicklung willkürlicher Funktionen beschäftigen sich außer der bereits zitierten zahlreiche weitere die Methoden der Integralgleichungen nicht benutzende Arbeiten von Poincaré, Korn (namentlich *Berl. Abhdl.* 1909, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.* **9** (1910), 38; **11** (1912), 11; **13** (1914), 61; *Schwarz-Festschr.* (1914), 215), Zaremba und Stekloff. In diesen Arbeiten sind die fraglichen Sätze zum Teil erheblich früher entwickelt worden. Der unter dem Einfluß von Hilbert entstandenen Variationsmethoden bedienen sich Ritz, *Journ. f. Math.* **135** (1908) 1; *Ann. de Phys.* **28** (1909), 737; Courant, *Math. Zeitschr.* **7** (1920), 1; *Math. Ann.* **85** (1922), 280; Plancherel, *Bull. sciences math.* (2) **47** (1923), 376, 397.

Die partielle Differentialgleichung

$$(217) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} + du = f$$

läßt sich vielfach wie die Differentialgleichung  $L(u) = f$  behandeln. Literatur unter anderem Picard, *Journ. d. Math.* **2** (5) (1896), 295; de Roy, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **14** (1897), 379; (5) **8** (1902), 59; *Krakauer Anz.* 1905, 69; 1910, 313; Zaremba, *Journ. de Math.* (5) **3** (1897), 311; E. E. Levi, *Pal. Rend.* **24** (1907), 275, ferner Sternberg, *Math. Zeitschr.* **21** (1924), 286; Geppert, *Math. Ann.* **95** (1926), 368, 519.

Wegen anderer Methoden zur Behandlung der Randwertaufgaben überhaupt (auch bei Gleichungen von hyperbolischem und parabolischem Typus) sei auf Sommerfeld, *Enzykl. II A 7c* und Lichtenstein, *Enzykl. II C 12*, speziell wegen der Gleichungen vom hyperbolischen Typus auch auf d'Adhémar,



*Équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles* (Sammlung Scientia Nr. 29 (1907)) verwiesen Anwendungen der Integralgleichungen auf Gleichungen vom hyperbolischen Typus Myller, *Math. Ann.* **68** (1910), 75; Picone, *Palermo Rend.* **30** (1910), 349; **31** (1911), 133, 188. Wegen der Gleichungen vom parabolischen Typus sei auf Volterra, *Leçons sur l'intégr. des équations diff. aux dérivées partielles*, Upsala 1912 sowie die Arbeiten von Holmgren, Zaremba, E. E. Levi hingewiesen.

Eine neue Art von Funktionalgleichungen ist von Volterra unter dem Namen der *Integro-Differentialgleichungen* eingeführt worden. Es sei  $S$  ein von einer geschlossenen, regulär analytischen, singularitätenfreien Fläche  $\sigma$  begrenzter endlicher Raumteil;  $\chi(t, \tau)$ ,  $\varphi(t, \tau)$ ,  $\psi(t, \tau)$  seien gewisse in dem Intervalle  $(0, T)$  erklärte stetige Funktionen der beiden Variablen  $t$  und  $\tau$ . Die Beziehung

$$(218) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, z; t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, z; t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x, y, z; t) + \\ + \int_0^t \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, z; \tau) \chi(t, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, z; \tau) \varphi(t, \tau) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x, y, z; \tau) \psi(t, \tau) \right] d\tau = 0$$

ist eine Integro-Differentialgleichung von Volterra. Allgemeiner kann man statt der Null rechter Hand eine bekannte Funktion  $X(x, y, z; t)$  setzen.

Es liegen nun folgende zwei Aufgaben vor, die dem ersten und dem zweiten Randwertproblem der Potentialtheorie analog sind:

Es ist eine für alle Werte von  $t$  in dem Intervalle

$$0 \leq t \leq T$$

und alle  $(x, y, z)$  in  $S$  und auf  $\sigma$  beschränkte, in  $S$  nebst ihren Ableitungen 1. und 2. Ordnung stetige Lösung der Integro-Differentialgleichung (218) zu bestimmen, wenn bekannt ist entweder, daß

1. auf  $\sigma$  die Lösung  $u(x, y, z; t)$  eine für alle  $t$  in dem Intervalle  $0 \leq t \leq T$  vorgegebene stetige Wertfolge annimmt, oder

## 2. die Funktion

$$\frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left\{ \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \chi(t, \tau) \cos(nx) + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) \cos(ny) + \right. \\ \left. + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \cos(nz) \right\} d\tau$$

einen in dem gleichen Gebiete vorgeschriebenen Wert hat. Unter  $\frac{\partial}{\partial n}$  wird hierbei die Ableitung in der Richtung der Innennormale verstanden.

Literatur: Volterra, *Acta math.* **35** (1912), 295 sowie zahlreiche andere Arbeiten; Evans, *Rom. Acc. L. Rend.* (5) **20**<sub>2</sub> (1911), 688; Fubini, *Ann. di Mat.* (3) **20** (1913), 217; Lichtenstein, *Schwarz-Festschrift* (1914), 274.

## § 12. Vertauschbare Funktionen.

Nach Volterra heißen zwei stetige Funktionen  $A(x, y)$  und  $B(x, y)$  *vertauschbar von der ersten Art* oder *im Intervall*  $(x, y)$ , wenn

$$(219) \quad \int_x^y A(x, s) B(s, y) ds = \int_x^y B(x, s) A(s, y) ds.$$

Das Integral nennt man das *Kompositionsprodukt* von  $A$  und  $B$  und schreibt es  $AB = BA$ . Bezeichnet man noch als *Kompositionspotenz* vom Grad  $n$  den durch die Rekursionsformel definierten Ausdruck

$$(220) \quad A_n(x, y) = \int_x^y A_1(x, s) A_{n-1}(s, y) ds,$$

wobei  $A_1$  die Funktion  $A$  selbst bedeutet, so erkennt man leicht folgende Eigenschaften:

1. Jede Funktion ist mit sich selbst vertauschbar.

2. Zwei Kompositionspotenzen derselben Funktion  $A(x, y)$  von den Graden  $m$  und  $n$  sind miteinander vertauschbar und ihr Kompositionsprodukt ist die  $(m+n)^{\text{te}}$  Kompositionspotenz von  $A(x, y)$ .

3. Zwei Summen von vertauschbaren Funktionen sind ebenfalls vertauschbar und ihr Kompositionsprodukt wird nach dem distributiven Gesetz der gewöhnlichen Multiplikation gebildet.

Daraus ergibt sich weiter:

Es seien  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$ ,  $\dots M(x, y)$   $n$  vertauschbare Funktionen im Intervall  $(x, y)$  und definiert in einem Intervall  $(a, b)$ . Wir bilden aus ihnen neue Funktionen, indem wir sie eine endliche Anzahl mal durch die algebraische Addition und Kompositionsmultiplikation verknüpfen. Die Gesamtheit aller so erhaltenen Funktionen nennen wir den Körper  $K$ , die ursprünglichen Funktionen  $A, B \dots M$  seine Basis. Wir betrachten daneben den Körper  $k$  aller Polynome von  $n$  Veränderlichen  $\alpha, \beta \dots \mu$  mit numerischen Koeffizienten; die Polynome sollen für  $\alpha = \beta = \dots = \mu = 0$  verschwinden. Ordnet man jeder Basisfunktion des Körpers  $K$  eine Variable des Körpers  $k$  zu, dem Kompositionsprodukt in  $K$  das gewöhnliche Produkt in  $k$ , der Addition in  $K$  die Addition in  $k$ , so erhält man eine eindeutige Beziehung zwischen  $K$  und  $k$ .

Wir erweitern den Körper  $k$  dadurch, daß wir auch Potenzreihen in den Variablen  $\alpha, \beta, \dots \mu$  zulassen, die im Punkte  $\alpha = \beta = \dots = \mu = 0$  verschwinden. Infolge der eindeutigen Beziehung zwischen  $K$  und  $k$  erhält man dadurch in  $K$  Reihen von vertauschbaren Funktionen, die im ganzen Intervall  $(a, b)$  konvergieren wegen der Ungleichung

$$(221) \quad P_n(x, y) < \frac{P^n(x - y)^n}{n!},$$

wenn  $|P(x, y)| < P$ . Auch für diese Reihen gelten die obigen drei Eigenschaften; sie können infolgedessen in den Körper  $K$  aufgenommen werden. Der so erweiterte Körper heißt der *ganze Integralkörper der Basisfunktionen*  $A, B, \dots M$ .

Ist nun die analytische Relation  $f(\alpha, \beta, \dots \mu) = 0$ , wo  $f(0, 0, \dots 0) = 0$ , mit Hilfe der analytischen Funktion  $\alpha = \varphi(\beta, \gamma, \dots \mu)$ , wo  $\varphi(0, 0, \dots 0) = 0$ , lösbar, so wird zufolge der eindeutigen Beziehung zwischen  $K$  und  $k$  die Integralgleichung  $f(A, B, \dots M) = 0$  durch die Formel  $A = \varphi(B, C, \dots M)$  gelöst. Wendet man das Übertragungsprinzip auf Differentialgleichungen und ihre Lösungen an, so gelangt man zur Lösung der entsprechenden Integrodifferentialgleichungen. Näheres siehe Lalesco, *Équ. intégr.* 133; Volterra, *Équ. intégr.* 147.

Beispiel: Zwischen dem Kern  $K(x, y)$  und dem lösenden Kern  $H(x, y)$  einer Volterraschen Integralgleichung besteht die Gleichung

$$H(x, y) = K(x, y) + \lambda \int_x^y K(x, s) H(s, y) ds.$$

$H$  ist mit  $K$  vertauschbar. Die entsprechende Gleichung im Körper  $k$  ist, wenn wir den Funktionen  $K$  und  $H$  die Variablen  $\alpha$  und  $\beta$  zuordnen,

$$\beta = \alpha + \lambda \alpha \beta,$$

$$\text{also} \quad \beta = \frac{\alpha}{1 - \lambda \alpha} = \alpha + \alpha^2 \lambda + \dots + \alpha^{m+1} \lambda^m + \dots,$$

daher

$$H(x, y) = K(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \dots + \lambda^m K_{m+1}(x, y) + \dots,$$

und diese Reihe ist eine ganze Funktion von  $\lambda$ , weil sie zufolge dem Übertragungsprinzip für jeden Wert von  $\lambda$  konvergiert. Wir haben somit die Neumannsche Reihe (8) für den lösenden Kern einer Volterraschen Integralgleichung wieder gefunden, von der wir schon zu Beginn von § 2 festgestellt haben, daß sie für alle  $\lambda$  konvergiert.

Nimmt man an Stelle der variablen Grenzen  $x, y$  feste Grenzen  $a, b$ , so nennt man die Funktionen *vertauschbar von der zweiten Art* oder *vertauschbar im Intervall*  $(a, b)$ . Auch hier gelten die drei erwähnten Eigenschaften. Ferner läßt sich eine eindeutige Beziehung zwischen zwei Körpern herstellen und zwar in folgender Art:

Betrachten wir den Körper  $k$  aller ganzen oder meromorphen Funktionen von  $\lambda$ , die mit  $\lambda$  verschwinden, und gleichzeitig den Körper  $K$  aller Funktionen, die man dadurch aus den Funktionen von  $k$  erhält, daß man die Potenzen von  $\lambda$  durch die Kompositionspotenzen einer Funktion  $\lambda A(x, y)$  ersetzt. Dann sind die Funktionen von  $K$  ganze oder meromorphe Funktionen von  $\lambda$ , wie sich durch Anwendung des ersten Fredholmschen Theorems ergibt. Analog läßt sich der oben erwähnte Auflösungssatz über Integral- und Integrodifferentialgleichungen übertragen. Er kann hier nach Volterra in folgender Form ausgesprochen werden:

Es sei ein System von Gleichungen gegeben

$$(222) \quad \Phi_s \left( z, z_1, z_2, \dots, u, u_1, u_2, \dots, v, v_1, v_2, \dots, \right. \\ \left. w, w_1, w_2, \dots, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \frac{\partial^{\mu + \mu_1 + \dots} \varphi_h}{\partial z^\mu \partial z_1^{\mu_1} \dots \partial u^\nu \partial u_1^{\nu_1} \dots}, \dots \right) = 0$$

$$(s = 1, 2, \dots).$$

$z, z_1, z_2, \dots, u, u_1, u_2, \dots$  sollen die unabhängigen Veränderlichen sein,  $v, v_1, v_2, \dots, w, w_1, w_2, \dots$  Parameter,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  die unbekannten Funktionen; die  $\Phi_s$  selbst mögen der Einfachheit halber Polynome von allen ihren Argumenten sein. Die Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  des Systems (222) sollen für  $z = u = v = w = \dots = 0$  verschwinden, ferner regulär in der Umgebung dieses Punktes und als Quotienten von ganzen Funktionen der Veränderlichen  $z, u, \dots$  und der Parameter  $v, w, \dots$  darstellbar sein, während die übrigen Veränderlichen  $z_1, z_2, \dots, u_1, u_2, \dots$  und die Parameter  $v_1, v_2, \dots, w_1, w_2, \dots$  in bestimmten Gebieten variieren.

Man kann sie daher in der Gestalt schreiben

$$(223) \quad \varphi_s = \frac{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \dots a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(s)} \dots z^{\alpha} u^{\beta} v^{\gamma} w^{\delta} \dots}{1 + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \dots b_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(s)} \dots z^{\alpha} u^{\beta} v^{\gamma} w^{\delta} \dots} \\ = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \dots c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(s)} \dots z^{\alpha} u^{\beta} v^{\gamma} w^{\delta} \dots,$$

wobei die letzte Potenzreihe in einem bestimmten Bereich um den Nullpunkt konvergiert.

Wir ersetzen nun in den Gleichungen (222) und (223) die Veränderlichen  $z, u, \dots$  und die Parameter  $v, w, \dots$  durch  $\xi_1 z, \xi_2 u, \xi_3 v, \xi_4 w, \dots$ , wobei  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots$  konstante Parameter bedeuten mögen. Man erhält dann an Stelle der Gleichungen (222) die Gleichungen

$$(224) \quad g_s(z, z_1, \dots, u, u_1, \dots, v, v_1, \dots, w, w_1, \dots, \\ f_1, f_2, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial z}, \dots, \xi_1, \xi_2, \dots) = 0$$

mit den Lösungen

$$(225) \quad f_s = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \dots c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(s)} \dots (z\xi_1)^{\alpha} (u\xi_2)^{\beta} (v\xi_3)^{\gamma} (w\xi_4)^{\delta} \dots$$

Der Übergang zu den vertauschbaren Funktionen wird jetzt in folgender Weise gemacht. Wir ersetzen in den Funktionen  $f_s$  die Produkte der Parameter  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots$  durch die Kompositionsprodukte von vertauschbaren Funktionen zweiter Art  $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$  in den Veränderlichen  $x, y$ . Die Funktionen  $f_s$  mögen dabei in die Funktionen  $F_s$  übergehen. Die Funktionen  $F_s$

sind dann selbst vertauschbar von der zweiten Art, Quotienten von ganzen Funktionen der Veränderlichen  $z, u, \dots$  und der Parameter  $v, w, \dots$  und befriedigen die Gleichungen  $G_s = 0$ , die man dadurch aus den Gleichungen (224) erhält, daß man in den  $g_s$  die Produkte der Parameter  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots$  und der Funktionen  $f_s$  durch die Kompositionsprodukte der Funktionen  $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$  und der Funktionen  $F_s$  ersetzt. Näheres siehe Lalesco, *Équ. intégr.*, 137 (vgl. S. 1258); Volterra, *Fonctions de lignes*, 194 (siehe unten).

Ein Beispiel möge die Übertragung erläutern: Die Differentialgleichung

$$(226) \quad \frac{d\varphi}{dz} = 1 + \varphi$$

hat die Lösung

$$(227) \quad \varphi = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Wir ersetzen  $z$  durch  $\xi z$  ( $\xi$  Parameter) und erhalten statt (226) und (227)

$$(228) \quad \frac{df}{dz} = \xi + \xi f$$

mit der Lösung

$$(229) \quad f = \xi z + \frac{\xi^2 z^2}{2!} + \frac{\xi^3 z^3}{3!} + \dots$$

Ersetzt man nun die Potenzen von  $\xi$  durch die Kompositionspotenzen einer vertauschbaren Funktion  $S(x, y)$ , so erhält man

$$(230) \quad F(z; x, y) = zS(x, y) + \frac{z^2}{2!} \int_a^b S(x, t_1) S(t_1, y) dt_1 \\ + \frac{z^3}{3!} \int_a^b \int_a^b S(x, t_1) S(t_1, t_2) S(t_2, y) dt_1 dt_2 + \dots$$

als Lösung der Integrodifferentialgleichung

$$(231) \quad \frac{dF(z; x, y)}{dz} = S(x, y) + \int_a^b S(x, t) F(z; t, y) dt.$$

Literatur: Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris 1913; Schlesinger, *Deutsche Math. Ver.* **24** (1915), 84;



Volterra, *Rom. Acc. L. Rend.* (5) **23**<sub>1</sub> (1914), 393, 551; *Rom. Acc. L. Mem.* (5) **11** (1916), 167; Andreoli, *Rom. Acc. L. Rend.* (5) **25**<sub>2</sub> (1916), 252, 299, 360, 427; **26**<sub>1</sub> (1917), 234; Hilb, *Math. Ann.* **77** (1916), 514; Hart, *Am. M. S. Trans.* **18** (1917), 125; Evans, *Rom. Acc. L. Rend.* (5) **28**<sub>1</sub> (1919), 262; Vergerio, *Rom. Acc. L. Rend.* (5) **28**<sub>1</sub> (1919), 274; Barnett, *Bull. Am. M. S.* (2) **26** (1920), 193; Pèrès, *Ann. de l'Éc. norm. sup.* (3) **36** (1919), 37; *Bull. de la Soc. Math. de France* **47** (1919), 16; Doetsch, *Math. Ann.* **89** (1922), 192; *Math. Zeitschr.* **22** (1925), 293; **25** (1926), 608; F. Bernstein u. Doetsch, *Math. Zeitschr.* **22** (1925), 285; **26** (1927), 89; Volterra u. Pèrès, *Leçons sur la composition et les fonctions permutables*, Paris 1924.

## Kapitel XXV.

### Trigonometrische Reihen.<sup>1)</sup>

Von A. Plessner in Gießen.

---

#### Einleitung.

##### A. Grundbegriffe. Definitionen.

Unter einer *trigonometrischen Reihe* (abgekürzt T. R.) verstehen wir hier eine Reihe von der Form

$$(1) \quad U \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x).$$

Jedes Glied der Reihe hat die Periode  $2\pi$ , und im Falle der Konvergenz stellt die Reihe eine periodische Funktion von  $x$  mit der Periode  $2\pi$  dar. Die Funktionen

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

bilden ein Orthogonalsystem (S. 1254 Fußnote und S. 1269) für ein Intervall von der Länge  $2\pi$ . Es ist nämlich, wenn  $\delta_{mm} = 1$ ,  $\delta_{mn} = 0$  ( $m \neq n$ ),

---

1) Die Lehrbuch-Literatur befindet sich am Schluß dieses Kapitels und wird im Text durch Einschließen der betreffenden Nummern in eckige Klammern zitiert, z. B. [7]. Die spezielle Literatur zu jedem Abschnitt ist am Ende des betreffenden Abschnitts zusammengestellt und wird im Text mit dem Namen des Verfassers zitiert, bei mehreren Abhandlungen desselben Verfassers durch Hinzufügung der Nummern (z. B. Young 2). Die Formeln sind paragraphenweise durchnummeriert, auf Formeln eines anderen Paragraphen bzw. der Einleitung wird durch Voranstellung der Paragraphennummer, bzw. von E verwiesen, z. B. (2, 7) und (E, 5).

$$\begin{aligned}
 \int_a^{a+2\pi} \cos mx \cos nx dx &= \pi \delta_{mn} & m = 0, 1, 2, 3, \dots \\
 \int_a^{a+2\pi} \cos mx \sin nx dx &= 0 \\
 \int_a^{a+2\pi} \sin mx \sin nx dx &= \pi \delta_{mn} & n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Setzt man zunächst die Reihe als gleichmäßig konvergent voraus, so daß sie eine stetige Funktion  $f(x)$  darstellt, so darf man nach Multiplikation mit  $\cos nx$  bzw.  $\sin nx$  gliedweise integrieren und erhält die *Euler-Fourierschen Formeln*

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Die Theorie der T. R. hat den stärksten Anstoß von dem Problem der Darstellbarkeit einer „willkürlichen“ Funktion erhalten (vgl. S. 1330). Die vorstehende Überlegung müßte von diesem Gesichtspunkt aus gesehen 1. die Möglichkeit der Entwicklung einer „willkürlichen“ Funktion  $f(x)$  in eine Reihe von der Form (1) voraussetzen, 2. die nachträgliche gliedweise Integration zur Koeffizientenbestimmung legitimieren ( $f(x)$  als integrierbar vorausgesetzt). Die Integralformeln (3) behalten aber ihren Sinn, wenn man von der Funktion  $f(x)$  nur die Integrierbarkeit voraussetzt. Es hat sich nun als besonders fruchtbar erwiesen, dem ganzen Problem eine andere Wendung zu geben, und zwar die Integralformeln (3) zum Ausgangspunkt zu nehmen. Auf diese Weise läßt sich einer Funktion  $f(x)$  eindeutig die Reihe (1) zuordnen, deren Koeffizienten  $a_n, b_n$  durch (3) gegeben sind. Die Reihe (1) heißt dann die *Fouriersche Reihe* (abgekürzt F. R.) der Funktion  $f(x)$ , und man drückt diese Zuordnung nach Hurwitz durch die Schreibweise aus

$$(4) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) \equiv U_f.$$

Die  $a_n$  und  $b_n$  heißen die Fourierkoeffizienten oder auch die Fourierkonstanten.

Um den Begriff der F. R.  $U_f$  genau festzulegen, muß noch angegeben werden, welcher Funktionengesamtheit die Funktion  $f(x)$  in (3) entnommen werden soll. Jeder solchen Funktionenklasse, die (in einem bestimmten Sinne) integrierbare Funktionen enthält, entspricht dann vermöge der Zuordnung (4) eine Reihenklasse. Wir nehmen vorerst an, die Funktionenklasse bestehe aus der Gesamtheit aller nach Lebesgue integrierbaren Funktionen (S. 1086) von der Periode  $2\pi$ , und sprechen dann bei Funktionen wie bei Reihen von der Klasse  $L$ .<sup>1)</sup> Zwei Funktionen der Klasse  $L$ , die sich nur in einer Menge vom Maße Null (S. 1040) unterscheiden, haben nach (3) dieselben Fourierkoeffizienten, also auch dieselbe F. R. Es gilt aber auch die Umkehrung, nämlich der *Eindeutigkeitssatz*:

*Zwei Funktionen der Klasse  $L$  haben dann und nur dann dieselbe F. R., wenn sie fast überall (vgl. S. 1063) übereinstimmen.*

Das Orthogonalsystem (2) ist also vollständig (S. 1269). Für diesen Satz werden sich aus der allgemeinen Theorie verschiedene Beweise ergeben (vgl. S. 1357). Einen einfachen, direkten Beweis für den Fall einer stetigen Funktion gibt Lebesgue [7]. Der allgemeine Fall läßt sich auf diesen mit Hilfe der partiellen Integration zurückführen, wenn man statt der F. R. der Funktionen  $f(x)$  die F. R. ihrer unbestimmten Integrale  $F(x)$  betrachtet. Dies führt auch zu der folgenden an sich wichtigen Betrachtung: Wird

$$F_1(x) = \int_c^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt$$

gesetzt, so ist  $F_1(x)$  wieder periodisch mit der Periode  $2\pi$ , und für die F. R. von  $F_1(x)$  erhält man durch partielle Integration

$$(5) \quad F_1(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n}. \quad (A_0 \text{ abhängig von } c.)$$

Die Zuordnung (4) gestattet also (bei geeigneter Normierung der Konstanten) die gliedweise Integration.

---

1) Es kann auch ein anderer Integralbegriff zugrunde gelegt oder noch beschränkende Bedingungen hinzugefügt werden, wenn nur die Linearität der Klasse gewahrt bleibt (vgl. § 8).

## Die Benutzung des unbestimmten Integrals

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt$$

gibt auch Anlaß zu folgender natürlicher Verallgemeinerung des Begriffs der F. R. Schreibt man die Formeln (3) in der Gestalt<sup>1)</sup>

$$(6) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dF(t), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dF(t),$$

wo  $F(x) = \int_c^x f(t) dt$  totalstetig (S. 1088) ist, verlangt aber von der Funktion  $F(x)$  nur, daß sie von beschränkter Schwankung (*Rep. I<sub>1</sub>*, S. 39) sei<sup>2)</sup>, so erhält man in den mit diesen Koeffizienten (6) gebildeten Reihen  $U_d F$  eine umfassendere Reihenklasse. (Sie besteht (abgesehen von der additiven Konstante) aus den gliedweise differenzierten F. R. von Funktionen beschränkter Schwankung.) Wir bezeichnen sie mit  $Y$  (Young 1, 2; Riesz). Für die Klasse  $Y$  lautet der Eindeigkeitssatz: *Zwei (verallgemeinerte) F. R.  $U_{dF_1}$  und  $U_{dF_2}$  sind dann und nur dann identisch, wenn  $F_1 - F_2$  eine Konstante ist.*

Oft ist es zweckmäßig, statt des Orthogonalsystems (2) die Funktionen

$$(7) \quad e^{i\nu x} = \cos \nu x + i \sin \nu x, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

zu benutzen, die ein komplexes Orthogonalsystem<sup>3)</sup> bilden. Die Reihe (1) geht dann über in

$$U \equiv \frac{1}{2} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_{\nu} e^{i\nu x}, \quad \text{wo} \quad c_{\nu} = a_{\nu} - ib_{\nu}, \quad c_{-\nu} = a_{\nu} + ib_{\nu}.$$

1) Unter  $\int_a^b g(x) dF(x)$ , wo  $g(x)$  in  $(a, b)$  stetig,  $F(x)$  von beschränkter Schwankung ist, verstehen wir den immer existierenden Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \{F(x_i) - F(x_{i-1})\}$ , wo  $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots x_n = b$ ;  $x_{i-1} < \xi_i \leq x_i$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_i - x_{i-1}) = 0$  (Stieltjessches Integral).

2) Über  $F(x)$  ist, entsprechend der Periodizitätseigenschaft von  $f(x)$ , noch  $F(x + 2\pi) = F(x) + \pi a_0$  vorauszusetzen.

3) Eine Folge von komplexen Funktionen  $\varphi_k(x) = \varphi_k^{(1)}(x) + i\varphi_k^{(2)}(x)$  eines reellen Argumentes  $x$  bilden für das Intervall  $(a, b)$  ein Ortho-

Neben diesen „reellen“ Reihen betrachtet man allgemeinere Reihen

$$(8) \quad U^* \equiv \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} e^{i\nu x},$$

in denen die  $c_{\nu}$  nicht der Bedingung  $c_{-\nu} = \bar{c}_{\nu}^{(1)}$  unterworfen sind. Man nennt auch hier die Reihe  $U^*$  eine F. R., wenn es eine  $L$ -integrierbare Funktion  $h(x) = f(x) - ig(x)$  bzw.  $H(x) = F(x) - iG(x)$  von beschränkter Schwankung gibt<sup>2)</sup>, so daß

$$(9) \quad c_{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{-i\nu t} dt, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

bzw.

$$c_{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\nu t} dH(t).$$

Sind in (8) für  $\nu < 0$  sämtliche  $c_{\nu} = 0$ , so heißt die Reihe  $U^*$  eine *Potenzreihe*  $W$ ; in dieser Form erscheint eine gewöhnliche Potenzreihe, wenn man sie auf dem Konvergenzkreise oder einem ihm konzentrischen Kreise betrachtet.

Zu jeder reellen Reihe (1) gehört eine andere

$$(10) \quad V \equiv \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x),$$

so daß

$$(11) \quad W = U - iV \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x)$$

gonalsystem, wenn  $\int_a^b \varphi_k(x) \bar{\varphi}_l(x) dx = 0$ , wo  $\varphi_k(x) = \varphi_k^{(1)} - i\varphi_k^{(2)}(x)$  ist und  $l \neq k$ . Ist das System so normiert, daß  $\int_a^b \varphi_k(x) \bar{\varphi}_l(x) dx = c \delta_{kl}$ , so sind die Fourierkoeffizienten (s. S. 1264) einer Funktion  $f(x)$  so zu definieren:

$$c_k = \frac{1}{c} \int_a^b f(t) \bar{\varphi}_k(t) dt.$$

1) Das Überstreichen ( $\bar{c}_{\nu}$ ) soll den Übergang zum konjugiert-komplexen bedeuten.

2) Außerdem wird  $h(x + 2\pi) = h(x)$  bzw.  $H(x + 2\pi) = H(x) + 2\pi c_0$  vorausgesetzt.



eine Potenzreihe wird, und umgekehrt läßt sich jede Potenzreihe  $W$  in dieser Form  $U - iV$  schreiben.  $V$  heißt die zu  $U$  *konjugierte Reihe* (abgekürzt K. R.). Ist eine Potenzreihe zugleich F. R., so nennen wir sie *Fouriersche Potenzreihe*. Es ist dies dann und nur dann der Fall, wenn beide Komponenten  $U$  und  $V$  F. R. sind. Ist die Reihe  $U$  F. R., so wird im allgemeinen  $V$  keine F. R. sein, z. B.

$$(12) \quad U \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\lg n}, \quad V \equiv - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\lg n}.$$

### B. Geschichtliches.<sup>1)</sup> Problemstellung.

Die Notwendigkeit, „willkürliche“ Funktionen zu betrachten (vgl. S. 1326), ergab sich bei der Integration von partiellen Differentialgleichungen, deren allgemeine Lösung (entsprechend den Anfangsbedingungen) von willkürlichen Funktionen abhängt. Für diesen Zweck glaubte Euler, dem damals vorherrschenden Funktionsbegriff, der durch einen analytischen Ausdruck gegebenen und dadurch nach der damaligen Ansicht durch ihre Werte in einem beliebigen kleinen Intervall vollständig bestimmten Funktion, einen andern Begriff der „willkürlichen“ Funktion an die Seite stellen zu müssen. Diese sollte die Möglichkeit geben, in verschiedenen Intervallen Teilfunktionen der obigen „analytischen“ Funktion vorzuschreiben und sie als eine einheitliche Funktion zu betrachten, und wurde von Euler viel allgemeiner und rein geometrisch durch eine willkürlich gezogene Kurve definiert.

Es war namentlich die Differentialgleichung der schwingenden Saite

$$(13) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

die zu dieser Auseinandersetzung und dem berühmten Streit zwischen den Mathematikern jener Zeit wie d'Alembert, Euler,

---

1) Für die hier nur skizzenhaft geschilderte geschichtliche Entwicklung, sowie für Zitate der Arbeiten von d'Alembert, Euler, Bernoulli, Lagrange, Fourier, sowie der hier nicht genannten von Cauchy, Poisson vgl. Burkhardt 1, 2, Lebesgue [7] und Riemann.

D. Bernoulli und Lagrange Veranlassung gab. Während d'Alembert und Euler die Lösung in der Form<sup>1)</sup>

$$y = \Phi(ct + x) - \Phi(ct - x), \quad \Phi(x + 2\pi) = \Phi(x)$$

angaben und nur über den hier zulässigen Funktionsbegriff in ihren Ansichten auseinandergingen, war es Daniel Bernoulli, der die Lösung mit den T. R. in Zusammenhang brachte. Er ging von den partikulären Lösungen von (13) aus:

$$(14) \quad y_n = \sin nx \cos nct,$$

die den einzelnen Tönen entsprechen, und setzte auf Grund der physikalischen Erkenntnis, daß die Saite nur diese Töne wiedergeben kann, die Lösung als Superposition der einfachen Schwingungen in der Form

$$(15) \quad y = \sum a_n \sin nx \cos n(ct - \alpha_n)$$

an.<sup>2)</sup> Von dieser behauptete er, sie sei die allgemeinste und müsse deshalb die Lösungen von d'Alembert und Euler enthalten. Euler erkannte zwar, daß dies dann und nur dann zutreffen würde, wenn eine in seinem Sinne willkürliche Funktion in eine trigonometrische Reihe entwickelbar wäre, glaubte aber, dies letztere entschieden verneinen zu müssen, da nach der damaligen Auffassung über die durch einen analytischen Ausdruck gegebene Funktion es undenkbar schien, daß eine nicht periodische oder aus Stücken verschiedener analytischer Kurven zusammengesetzte Funktion durch eine Reihe der Form (1) darstellbar sein könnte.<sup>3)</sup> Wenn auch der Streit, an dem auch Lagrange hervorragenden Anteil nahm<sup>4)</sup>, zu keinem greifbaren Ergebnis führte, insofern als im wesentlichen jeder bei seiner

1) Die Länge der Saite wird mit  $\pi$  angenommen. Die Saite soll in den Punkten 0,  $\pi$  befestigt sein, also ist als Randbedingung  $y = 0$  für  $x = 0$  und  $x = \pi$  zu wählen. Für die Integration dieser hyperbolischen Differentialgleichung vgl. S. 1161.

2) Für dieses Bernoullische Prinzip, die sogenannte Methode der partikulären Lösungen bei Integration von partiellen Differentialgleichungen vgl. S. 1142 und 1177.

3) Bernoulli kam auch hier dem wahren Sachverhalt wohl am nächsten (Entwicklung Bernoullischer Polynome in Fouriersche Reihen, mit Angabe des Intervalls, in dem die Entwicklung gültig ist, vgl. auch S. 1217—1218).

4) Lagrange setzte an Stelle der kontinuierlichen Saite ein schwingendes System von endlichvielen Massenpunkten und gelangte so zu Formeln für trigonometrische Interpolation. Den Grenzübergang zur F. R. hat er nur flüchtig berührt, ist jedenfalls nicht zur vollen Erkenntnis des Tatbestandes durchgedrungen. Für die trigonometrische Interpolation, die hier nicht behandelt ist, vgl. Courant [1].

Meinung blieb, so hat die ganze Fragestellung nach 50 Jahren durch Fourier eine neue Wendung genommen und den wesentlichen Anstoß zur Umbildung des Funktionsbegriffs gegeben. Fourier behauptete mit Bestimmtheit die von Euler bestrittene Möglichkeit der Darstellbarkeit einer willkürlichen Funktion durch eine T. R. und belegte dies mit zahlreichen Beispielen, die, wenn auch größtenteils vorher bekannt, dennoch merkwürdigerweise nicht beachtet worden waren. Er benutzte dabei ausgiebig die von ihm wiedergefundenen Formeln (3)<sup>1)</sup> zur Bildung der entsprechenden F. R. Zuerst mit Mißtrauen und Ungläubigkeit (Lagrange) aufgenommen, hat sich diese Erkenntnis doch bald durchgesetzt und die Veranlassung gegeben, einen allgemeinen (von Fourier nicht gegebenen) Beweis des Entwicklungssatzes zu suchen, der in dem Nachweis der Konvergenz der F. R. (4) gegen die Funktion  $f(x)$  gesehen wurde.

Einen solchen Beweis hat unter allgemeinen Bedingungen für  $f(x)$  zuerst Dirichlet in einer berühmten Abhandlung gegeben, und diese Arbeit sowie die Habilitationsschrift Riemanns sind dann zum Ausgangspunkt für die weitere Entwicklung der Theorie der T. R. geworden. Es scheint aber naturgemäß (mindestens von dem Ausgangspunkt Bernoullis), dem Entwicklungssatz auch eine andere Beleuchtung zu geben. Ähnlich Bernoullis Auffassung von der schwingenden Saite kann man die Zuordnung (4) als die Zerlegung eines komplexen periodischen Vorgangs  $f(x)$  in seine elementaren, harmonischen Schwingungen (Oberschwingungen) ansehen. Der Eindeutigkeitssatz besagt dann, daß durch die Kenntnis dieser elementaren Schwingungen der Vorgang selbst durch Superposition vollständig bestimmt ist. Er übernimmt auf diese Weise die Rolle des Hauptsatzes und kann so den Entwicklungssatz (als Konvergenzsatz verstanden) ersetzen.<sup>2)</sup> Um auf dieser Grund-

1) Diese sind, wenn auch schon vorher wahrscheinlich d'Alembert und Euler bekannt, zuerst von Clairaut (durch Grenzübergang aus den Formeln für trigonometrische Interpolation) angegeben worden. Die Überlegung mit der gliedweisen Integration geht auf Euler zurück, der sie auch vor Fourier angegeben hatte.

2) Andererseits läßt sich aus dem Eindeutigkeitssatz die Konvergenz der Reihe (4) gegen  $f(x)$  erschließen, sobald ihre gleichmäßige Konvergenz (oder allgemeiner eine solche, bei der die gliedweise Integration zulässig ist) feststeht. Dies ist z. B. der Fall, wenn  $f(x)$  das unbestimmte Integral einer Funktion beschränkter Schwankung ist, da dann  $|a_n| < \frac{k}{n^2}$ ,  $b_n| < \frac{k}{n^2}$  ist (vgl. (1, 6)). Vgl. hierzu Kneser, Lebesgue [7], Courant [1].

lage die Anwendbarkeit der F. R. und die Rechnung mit ihnen zu sichern, sind noch diejenigen Operationen anzugeben, bei denen die Äquivalenzzuordnung (4) erhalten bleibt oder in eine richtige Gleichung übergeht (vgl. hierzu insbesondere die mit (5) vorhin nachgewiesene Möglichkeit der Integration der Äquivalenz (4) und § 10). Die Konvergenz der F. R. (die nicht immer stattzufinden braucht) gegen die Funktion tritt hier als eine *Besonderheit* auf, die höchstens ein Verfahren gibt, um den durch die Oberschwingungen eindeutig bestimmten periodischen Vorgang  $f(x)$  zu berechnen. Dieser Zweck kann aber auch durch andere (manchmal durch die Problemstellung selbst gegebene) Methoden erreicht werden (das kommt besonders dem Falle der Nichtkonvergenz zustatten), was in naturgemäßer Weise auf andere Summationsmethoden von unendlichen Reihen führt (vgl. § 4).

Wir werden diesen Gesichtspunkt nicht weiter verfolgen und bemerken noch, daß in der vorliegenden Darstellung mit dieser Auffassung nur der Abschnitt II, wenn auch nicht ausdrücklich darauf zugeschnitten, in näherer Berührung steht. Dagegen werden gerade die „Besonderheiten“ das Ziel einer eingehenden Erörterung bilden. Hierbei wird es sich vornehmlich darum handeln, in den beiden zweigliedrigen Zuordnungen a) Funktion  $\rightarrow$  T. R. (Abschnitt I, II), b) T. R.  $\rightarrow$  Funktionen (Abschnitt II, III) aus den Eigenschaften des ersten Gliedes diejenigen des zweiten zu bestimmen und hieraus Sätze vom Typus Funktionen  $\leftrightarrow$  T. R. zu erschließen. Als solche erwähnen wir hier den Satz II § 9 und die Sätze I, II, III des § 13. Besonders in den Abschnitten I und III ergibt sich dabei die Notwendigkeit, neben den T. R. auch ihre K. R. zu betrachten, da diese nur vereint es gestatten, das Verhalten der entsprechenden Funktionen in einem Punkte vollständig zum Ausdruck zu bringen.

#### Literatur.

- Burkhardt, 1. *Entwicklungen nach oscillierenden Funktionen und Integration der Differentialgl. der math. Physik. Jahrb. D. Math. Ver.* Bd. 10 (1908). — 2. *Trigonometrische Reihen und Integrale* (bis 1850). *Encyklop. der Math. Wiss.* II A 12.
- Dirichlet, *Werke* I, 116—160.
- Fourier, *Théorie analytique de la Chaleur*. Paris 1822. *Œuvres t. I.*
- Kneser, A., *Math. Ann.* 58 und 60.
- Riemann, *Werke*, 2. Aufl., S. 227.
- Riesz, F., *Ann. Éc. Norm.* 28 (1911), 33.
- Young, W. H., 1. *Proc. Roy. Soc. A.* 88 (1913), 560. 2. *Proc. Lond. Math. Soc.* 13 (1913) S. 13.

## I. Abschnitt.

**Konvergenz und Summierbarkeit der Fourierschen und der konjugierten Reihen.****§ 1. Das Riemann-Lebesguesche Lemma und die Lokalisationssätze.**

Der Konvergenzuntersuchung wird zweckmäßig folgendes Lemma (Riemann-Lebesgue) vorausgeschickt<sup>1)</sup>:

*Gehört  $f(x)$  der Klasse  $L$  an, so gilt*

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt = 0$$

Für einen Beweis vgl. [5], [7], [8a], [10], [12a], [14], vgl. auch § 5 und (8, 9).

Von Wichtigkeit ist auch eine Verschärfung dieses Satzes im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz (Hobson [5], Plessner 2c).

*Gehört  $f(x)$  zur Klasse  $L$  und ist  $g(x)$  eine beschränkte meßbare Funktion, so gilt gleichmäßig in  $x$*

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t) \cos ntdt = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t) \sin ntdt = 0.$$

Für die Fourierkoeffizienten  $a_n, b_n$  der Klasse  $L$  ergibt (1)

$$(3) \quad a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

---

1) Für den Satz ist die absolute Integrierbarkeit von  $f(x)$  wesentlich. Diese Erkenntnis (vgl. auch Riemann) sowie die Ausdehnung des Satzes auf nicht beschränkte aber absolut integrierbare Funktionen und die damit verbundene Erweiterung der Dirichletschen Theorie der F. R. verdankt man Du Bois Reymond 3a. Es sei noch bemerkt, daß für stetiges  $f(x)$  das Lemma sich schon bei Hamilton findet.

während für die Koeffizienten der Reihe  $U_{dF}$  der Klasse  $Y$  sich vermöge der Formeln<sup>1)</sup>

$$(4) \quad |a_n| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |dF|, \quad |b_n| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |dF|$$

nur die Beschränktheit ergibt. Hieraus folgert man leicht vermittle partieller Integration (vgl. S. 1327):

a) Ist  $f(x)$  totalstetig, so ist<sup>2)</sup>

$$(5) \quad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) Ist  $f(x)$  von beschränkter Schwankung, so ist<sup>2)</sup>

$$(6) \quad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Es sei nun (E, 1) die zu  $f(x)$  gehörige F. R.  $U_f$  der Klasse  $L$  und (E, 10) die K. R.  $V_f$ . Wir verwenden im folgenden die Bezeichnungen

$$(7) \quad \varphi(h) = \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}, \quad \psi(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2},$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n U_k(x), \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^n V_k(x).$$

Dann ist<sup>3)</sup>

$$(8) \quad S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} D(n, t) \varphi(t) dt, \quad T_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} E(n, t) \psi(t) dt,$$

1) Mit  $\int_a^b |dF|$  bezeichnen wir bei einer Funktion beschränkter Schwankung die Totalschwankung im Intervall  $(a, b)$ . (Vgl. *Rep. I*, S. 39.)

2) Von hier ab benutzen wir gelegentlich die Landausche Bezeichnung  $\chi(n) = o(\mu(n))$  für  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\chi(n)|}{\mu(n)} = 0$  und  $\chi(n) = O(\mu(n))$  für

$\frac{|\chi(n)|}{\mu(n)} < \kappa$ , wo  $\kappa$  eine positive Konstante ist.

3) Es wird im folgenden  $V_0 = \frac{b_0}{2} = 0$  vorausgesetzt.



$$D(n, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

$$E(n, t) = \sum_{k=1}^n \sin kt = \frac{1}{2} \left( \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} \right).$$

Aus der Zerlegung

$$(9) \quad S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} + \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\pi/2} \quad \text{und} \quad T_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} + \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\pi/2}$$

folgt man nach (1), daß die beiden Integrale  $\int_0^{\pi/2}$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergieren (bei  $S_n(x)$  gegen 0), und nach (2), daß diese Konvergenz sogar *gleichmäßig* in  $x$  erfolgt. Somit gelten die Lokalisationssätze<sup>2)</sup>:

**Satz von Riemann:** *Die Konvergenz der F. R.  $U_f$  und der K. R.  $V_f$  in einem Punkte  $x$  (bei der F. R. auch der Konvergenzwert) hängt nur ab von dem Verhalten der Funktion  $f(x)$  in der unmittelbaren Umgebung von  $x$ .*

**Satz von Hobson:** *Stimmen zwei Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  in einem Intervall  $\Delta$  überein, so konvergieren die Reihen  $U_{f_1} - U_{f_2}$  und  $V_{f_1} - V_{f_2}$  im Innern<sup>3)</sup> von  $\Delta$  gleichmäßig, und zwar die erste gegen 0.*

## § 2. Die klassischen Grundbedingungen.

### A. Die Partialsummen. Konvergenzkriterien.

Nach dem Riemannschen Lokalisationssatz wird die Untersuchung von  $S_n(x)$  bzw.  $T_n(x)$  bei festem  $x$  für  $n \rightarrow \infty$  im wesentlichen bestimmt durch die Voraussetzungen, die über das Verhalten von  $\varphi(t)$  bzw.  $\psi(t)$  für  $t \rightarrow 0$  gemacht werden. Wir

1) In den Integralen sind die Integranden gemäß den obigen Formeln zu ergänzen.

2) Bei Riemann und Hobson nur für die F. R. aufgestellt.

3) D. h. in jedem Intervall, das mit seinen Endpunkten ganz im Innern von  $\Delta$  liegt.

wählen vorerst als solche Voraussetzungen die klassischen *Grundbedingungen* (abgekürzt G. B.)

$$(1) \quad (P_0) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = \alpha, \quad (Q_0) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \psi(h) = \beta.$$

Sind in  $x$  die beiden G. B.  $(P_0)$  und  $(Q_0)$  zugleich erfüllt, so heißt  $x$  ein (gewöhnlicher) *regulärer Punkt*.<sup>1)</sup> Ist außerdem  $\beta = 0$  (und  $\alpha = f(x)$ ), so ist  $x$  ein Stetigkeitspunkt. Allgemein wird  $2\beta$  als Sprung im Punkte  $x$  bezeichnet. Durch die Beziehungen<sup>2)</sup>

$$\int_0^\pi D(n, t) dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad \int_0^\pi E(n, t) dt = \lg n + \gamma_n, \quad \gamma_n \rightarrow C + \lg 2$$

läßt sich die Untersuchung auf den Fall  $\alpha = 0$  bzw.  $\beta = 0$  zurückführen. Unter dieser Voraussetzung ( $\alpha = 0$  bzw.  $\beta = 0$ ) gilt eine wichtige Bemerkung von Kronecker, daß bei Abänderung von  $\varphi(t)$  bzw.  $\psi(t)$  in dem Intervall  $0 < t < \delta_n$  die zu untersuchenden Integrale eine mit  $n$  gegen 0 strebende Änderung erfahren, wenn nur  $\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$  gewählt wird. Auf Grund dieser Überlegungen und (1, 1) läßt sich der wesentliche Teil der Untersuchung auf die Betrachtung folgender Integrale reduzieren:

$$D_\nu = \int_0^\xi \chi(t) \frac{\sin \nu t}{t} dt \quad \text{bzw.} \quad \bar{D}_\nu = \int_{\delta_\nu}^\xi \chi(t) \frac{\sin \nu t}{t} dt,$$

$$E_\nu = \int_{\delta_\nu}^\xi \chi(t) \frac{\cos \nu t}{t} dt, \quad \text{wo} \quad \frac{\kappa_1}{\nu} < \delta_\nu < \frac{\kappa_2}{\nu}. \quad (\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0).$$

Der Nachweis der hier erstrebten Formeln

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} D_\nu = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} E_\nu = 0$$

---

1) In einem regulären Punkt ist  $\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ ,  
 $\beta = \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$ . Für diese Bezeichnungen vgl. S. 1049.

2)  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right\}$  ist die Eulersche Konstante.

kann aber unter alleiniger Voraussetzung von  $\lim_{t \rightarrow 0} \chi(t) = 0$  nicht geführt werden (vgl. S. 1353 u. 1355), es sind vielmehr noch gewisse Zusatzbedingungen über  $\chi(t)$  vonnöten. Diese werden als *Konvergenzkriterien* bezeichnet. Die wichtigsten unter ihnen sind:

(K<sub>1</sub>)  $\chi(t)$  ist bei  $t = 0^1$ ) von beschränkter Schwankung.

(K<sub>2</sub>)  $\frac{|\chi(t)|}{t}$  ist noch integrierbar bei  $t = 0$ , insbesondere trifft das zu, wenn  $|\chi(t)| < \kappa t^\lambda$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) ist.

(K<sub>3</sub>)  $\chi_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \chi(u) du$  ist bei  $t = 0^1$ ) von beschränkter Schwankung, oder was dasselbe bedeutet

$$\left| \frac{\chi(t) - \chi_1(t)}{t} \right| = \left| \frac{\chi(t)}{t} - \frac{1}{t^2} \int_0^t \chi(u) du \right|$$

ist dort integrierbar.

(K<sub>4</sub>) Es ist  $t\chi(t)$  bei  $t = 0$  von beschränkter Schwankung und

$$\frac{1}{h} \int_0^h |d(t\chi(t))| < \kappa.$$

(K<sub>5</sub>) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\eta > 0$ , so daß

$$\int_\delta^\eta \left| \frac{\chi(t) - \chi(t + \delta)}{t} \right| dt < \varepsilon \quad (0 < \delta < \eta).$$

(K<sub>6</sub>) Es ist gleichmäßig für ein Intervall  $0 \leq t \leq \delta$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{ \chi(t + h) - \chi(t) \} \log \frac{1}{h} = 0.$$

Durch Kombination dieser Ergebnisse mit der vorherigen Überlegung ergibt sich als Schlußresultat:

**A<sub>0</sub>.** Erfüllt  $\varphi(t)$  neben der Grundbedingung ( $P_0$ ) noch eins der Kriterien (K<sub>1</sub>)–(K<sub>6</sub>) (bei (K<sub>2</sub>) ist statt  $\varphi(t)$   $\varphi(t) - \alpha$  zu setzen), so ist die F.R.  $U_f$  in  $x$  konvergent und

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \alpha.$$

1) Bei  $t = 0$  gleichbedeutend mit: in einer gewissen Umgebung von  $t = 0$ .

**B<sub>0</sub>.** Erfüllt  $\psi(t)$  neben der Grundbedingung ( $Q_0$ ) noch eins der Kriterien ( $K_1$ )–( $K_6$ ) (bei ( $K_2$ ) ist statt  $\psi(t)$   $\psi(t) - \beta$  zu setzen), so gilt

$$(3) \quad T_n(x) = \frac{2}{\pi} \beta (\lg n + \gamma_n) + \frac{1}{\pi} \int_{\delta_n}^{\pi} (\psi(t) - \beta) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt + \varepsilon_n,$$

wo  $\gamma_n \rightarrow C + \lg 2$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $\kappa_1 < n\delta_n < \kappa_2$  und

$$(4) \quad \int_{\delta_n}^{\pi} (\psi(t) - \beta) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt = o(\lg n)$$

Die K. R. ist also unter den hier gemachten Voraussetzungen dann und nur dann konvergent, wenn  $\beta = 0$  und das Integral in (3) für  $\delta_n \rightarrow 0$  einem endlichen Grenzwert zustrebt.<sup>1)</sup>

( $K_1$ ) stammt (für F. R.) im wesentlichen von Dirichlet, der bei der Untersuchung Funktionen mit endlich vielen Maxima und Minima zugrunde legte. Die Gültigkeit des Dirichletschen Resultates für die hier angegebene weitere Klasse ist von Du Bois Reymond 3a bemerkt und angegeben worden; in der Literatur ist es bekannt als Jordansches Kriterium. Die Kriterien ( $K_2$ ) und ( $K_6$ ) gehen auf Lipschitz und Dini [3] zurück. Die Kriterien ( $K_1$ ) und ( $K_2$ ) sind heterogener Natur; es gibt Funktionen, die eins von ihnen erfüllen, das andere nicht. Dagegen sind, wie schon Du Bois Reymond 4 zeigte, beide in ( $K_3$ ) enthalten, das von Du Bois Reymond 3a herrührt, in der Literatur aber nach De la Vallée Poussin bezeichnet wird.<sup>2)</sup> Verallgemeinerungen von ( $K_3$ ) bringt [3]. ( $K_4$ ) ist neuerdings von Young 1c angegeben worden. Es ist der Tragweite nach mit ( $K_2$ ) und ( $K_3$ ) nicht vergleichbar, ist aber enthalten in ( $K_6$ ), das auch die Kriterien ( $K_1$ )–( $K_3$ ) enthält. Für den Beweis von ( $K_5$ ) ist die oben erwähnte Kroneckersche Bemerkung von Wichtigkeit. Das Kriterium selbst in der obigen Form stammt von Lebesgue 1 und [1], doch sind die Entwicklungen bei Lebesgue, abgesehen von der später noch zu besprechenden Verallgemeinerung der G. B., von denen Kroneckers im wesentlichen

1) Die Existenz von  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt$  hat  $\beta = 0$  zur Folge

(( $Q_0$ ) als erfüllt vorausgesetzt).

2) Wie schon aus dem Beweise von Du Bois Reymond hervorgeht, ist die Voraussetzung der G. B. ( $P_0$ ) und ( $Q_0$ ) bei ( $K_3$ ) überflüssig, indem die F. R. gegen den bei Voraussetzung von ( $K_3$ )

existierenden Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(t) dt$  konvergiert, während ( $Q_0$ )

durch ( $Q_1$ ), vgl. S. 1346, zu ersetzen ist.

nur formal verschieden. Aus  $(K_5)$  folgt auch  $(K_6)$  unmittelbar. Für die Konvergenzkriterien  $(K_1)$ ,  $(K_2)$  vgl. [7] [8] [10] [12a] [13] [14], für  $(K_3)$  [12a], für  $(K_5)$  [7] [10] [12a], für  $(K_6)$  [7] [12a] [13] und Faber. Für die Vergleichung der Tragweite der Konvergenzkriterien vgl. Hardy 4. Den Beweisen für die Konvergenzkriterien  $(K_1) - (K_6)$  liegt die Verwendung des auf Abel zurückgehenden Prinzips der partiellen Summation (*Rep. I*, S. 428) zugrunde, das unter Ausnutzung des oszillierenden Charakters der trigonometrischen Funktionen direkt oder als zweiter Mittelwertsatz oder als partielle Integration auftritt. Auf anderer Grundlage beruht die auf Cauchy zurückgehende allgemeine Residuenmethode, die aber hier nicht so weittragend ist. Für diese vgl. z. B. Picard [8b], Poincaré [9].

Unter der Voraussetzung, daß nur die G. B.  $(P_0)$  und  $(Q_0)$  erfüllt sind, läßt sich nur folgendes nachweisen (Hardy 1b, Lukács 1):

$$(5) \quad A_0^* \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{\lg n} = 0 \quad \text{bzw.} \quad B_0^* \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n(x)}{\lg n} = \frac{2\beta}{\pi},$$

wodurch das Maß der Divergenz nach oben beschränkt wird.  $B_0^*$  bestimmt den Sprung unter der alleinigen Voraussetzung von  $(Q_0)$ . Für andere Bestimmungen des Sprunges vgl. Fejér 2b und S. 1343.

### B. Die Fejérschen Mittel.

Die Tatsache, daß zur Sicherung der in den Sätzen  $A_0$  und  $B_0$  ausgesprochenen Ergebnisse außer den G. B. noch gewisse nicht ganz natürliche Zusatzkriterien erforderlich sind, welche bei vielen Fragestellungen durch ihr Nichterfülltsein die Untersuchung komplizieren und stören, hat dazu geführt, statt der üblichen Definition der Summe einer unendlichen Reihe andere Summationsmethoden (*Rep. I*, 430) einzuführen. Obgleich schon fast seit dem Auftreten der trigonometrischen Reihen vereinzelte Summationsverfahren benutzt worden sind (Poisson) und für das Poissonsche Verfahren durch Prym, Schwarz und Hölder eine strenge Behandlung vorlag (vgl. *Rep. I*, 709), so hat doch in erster Linie Fejér durch den glücklichen und fruchtbaren Gedanken, die arithmetischen Mittel in der Theorie der T. R. zu verwenden, besonders dazu beigetragen, die allgemeine Erkenntnis über die Bedeutung von Summationsmethoden für eine systematische Untersuchung der T. R. zu fördern. Seither ist die Summationstheorie von verschiedenen Seiten ausgebaut worden und ist in ihren Anwendungen von immer steigender Bedeutung für die Theorie der T. R. geworden. Wir benutzen im folgenden die Cesàroschen Mittel von der Ord-

nung  $k^1$ ) (*Rep. I*<sub>1</sub>, S. 430), bezeichnen sie mit  $(C, k)$  und sprechen von der  $(C, k)$ -Summierbarkeit einer Reihe, wenn ihre  $(C, k)$ -Mittel gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren. (Über die  $(C, k)$ -Mittel vgl. Knopp [6].) Die  $(C, k)$ -Mittel der F. R. bezeichnen wir mit  $S_n^{(k)}(x)$ , der K. R. mit  $T_n^{(k)}$ .

Fejér 1a betrachtet die ersten arithmetischen Mittel<sup>2)</sup>

$$S_n^{(1)}(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)}{n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D^{(1)}(n, t) \varphi(t) dt,$$

$$T_n^{(1)}(x) = \frac{T_0(x) + T_1(x) + \cdots + T_{n-1}(x)}{n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi E^{(1)}(n, t) \psi(t) dt,$$

wo

$$D^{(1)}(n, t) = \frac{1}{2n} \left( \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2, \quad E^{(1)}(n, t) = \frac{1}{2} \left( \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{1}{2n} \frac{\sin nt}{\sin^2 \frac{t}{2}} \right).$$

Die den Integralen  $D_\nu$  und  $E_\nu$  analogen Integrale lauten jetzt

$$D_\nu^{(1)} = \frac{1}{\nu} \int_0^\xi \chi(t) \frac{\sin^2 \nu t}{t^2} dt, \quad E_\nu^{(1)} = \frac{1}{\nu} \int_{\delta_\nu}^\xi \chi(t) \frac{\sin \nu t}{t^2} dt.$$

Es ist hier aber  $D_\nu^{(1)} \rightarrow 0$  bzw.  $E_\nu^{(1)} \rightarrow 0$  unter der alleinigen Voraussetzung, daß  $\lim_{t \rightarrow 0} \chi(t) = 0$ ; dies erlaubt, ohne die Zusatz-

kriterien  $(K_1) - (K_6)$  voranzusetzen, Sätze aufzustellen, die den  $A_0$  und  $B_0$  analog sind.

$A_0^{(1)}$ . Ist  $(P_0)$  in  $x$  erfüllt, so konvergieren die  $(C, 1)$ -Mittel und es ist (Fejér 1a)

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)}(x) = \alpha.$$

$B_0^{(1)}$ . Ist  $(Q_0)$  in  $x$  erfüllt, so ist

$$(7) \quad T_n^{(1)}(x) = \frac{2\beta}{\pi} (\lg n + \gamma_n) + \frac{1}{\pi} \int_{\delta_n}^\pi \{ \psi(t) - \beta \} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt + \varepsilon_n,$$

1) Wir beschränken uns im folgenden auf ganzzahliges nicht-negatives  $k$ .

2) Nur für die F. R. Die Hinzuziehung der K. R. verdankt man Young 1a.



wo  $\gamma_n$ ,  $\delta_n$ ,  $\varepsilon_n$  dieselbe Bedeutung wie in  $(B_0)$  haben, und für das Integral gilt wieder (4).

Die K. R. ist unter Voraussetzung von  $(Q_0)$  dann und nur dann  $(C, 1)$ -summierbar, wenn  $\beta = 0$  ist und das Integral in (7) für  $\delta_n \rightarrow 0$  einem endlichen Grenzwert zustrebt.<sup>1)</sup>

Setzt man in  $A_0^{(1)}$  außer der G. B.  $(P_0)$  noch weitere Zusatzbedingungen über  $\varphi(t)$  voraus, so gelingt es, die Differenz  $S_n^{(1)}(x) - \alpha$  als Funktion von  $n$  genauer abzuschätzen (vgl. Szász 2, wo allgemeinere G. B. zugrunde gelegt sind). Eine Verschärfung in anderer Richtung haben Hardy-Littlewood 1 und 2 b angegeben; sie setzen neben  $f(x)$  auch  $|f(x)|^2$  als integrierbar voraus und beweisen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(S_1(x) - \alpha)^2 + (S_2(x) - \alpha)^2 + \cdots + (S_n(x) - \alpha)^2}{n} = 0.$$

### C. Verschärfung des Konvergenzbegriffs und die Gibbssche Erscheinung.

Der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  war bisher stets bei festem  $x$  ausgeführt worden. Man kann aber allgemeiner nach dem Verhalten von  $S_n(\bar{x})$ ,  $T_n(\bar{x})$ ,  $S_n^{(1)}(\bar{x})$ ,  $T_n^{(1)}(\bar{x})$  fragen, wenn gleichzeitig der doppelte Grenzübergang  $\bar{x} \rightarrow x$ ,  $n \rightarrow \infty$  ausgeführt wird. Wir betrachten hier nur die F. R., also  $S_n(\bar{x})$  und  $S_n^{(1)}(\bar{x})$ , unter der Voraussetzung, daß  $x$  ein regulärer Punkt (vgl. S. 1337) ist. Die hier geltenden Sätze lauten:

$A_{00}$ . Ist  $x$  ein regulärer Punkt und ist in ihm für  $\chi(t) = f(x+t)$  das Konvergenzkriterium  $(K_1)^2$ ) erfüllt, so gilt (Du Bois Reymond 1)

$$(8) \quad S_n(x+h) = \alpha + \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{nh} \frac{\sin t}{t} dt + \varepsilon_{nh}, \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \varepsilon_{nh} = 0.$$

$A_{00}^{(1)}$ . Ist  $x$  ein regulärer Punkt, so gilt (Fejér 2 b)

$$(9) \quad S_n^{(1)}(x+h) = \alpha + \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{nh} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt + \varepsilon_{nh}^{(1)}, \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \varepsilon_{nh}^{(1)} = 0.$$

Nach (8) kommt  $S_n(x+h)$  bei dem doppelten Grenzübergang durch geeignete Wahl von  $n$  und  $h$  dem Ausdruck

1) Vgl. Fußnote 1 auf S. 1339.

2) Ebenso für die Konvergenzkriterien  $(K_2) - (K_6)$ , wenn man diese für  $\chi(t+h) = f(x+t+h)$  gleichmäßig für kleine  $h$  erfüllt voraussetzt.

$\alpha + \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\xi} \frac{\sin t}{t} dt$  bei willkürlichem  $\xi$  beliebig nahe. Da das Maximum von  $\int_0^{\xi} \frac{\sin t}{t} dt$  (für  $\xi = \pi$ ) größer als  $\frac{\pi}{2}$  ist, so tritt

die als Gibbssche Erscheinung bekannte Tatsache auf<sup>1)</sup>, daß die Häufungswerte von  $S_n(x+h)$  über das Intervall zwischen  $n \rightarrow \infty$   $h \rightarrow 0$

$\alpha - \beta = f(x-0)$  und  $\alpha + \beta = f(x+0)$  hinausgreifen, und

zwar das Intervall  $\alpha - \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$  bis  $\alpha + \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$  über-

decken. Für  $S_n^{(1)}(x+h)$  tritt das nicht mehr ein, weil hier das Maximum des betreffenden Integrales, das für  $\xi = \infty$  eintritt, genau  $\frac{\pi}{2}$  ist. Da im Falle  $\beta = 0$  die Konvergenz in  $x$  stetig ist<sup>2)</sup>, so genügt es, für die Untersuchung der Erscheinung eine spezielle F. R. mit  $\beta \neq 0$  zugrunde zu legen. Als solche

kann  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  gewählt werden ( $x=0$ ). (8) und (9) gestatten

es auch,  $f(x+0)$  bzw.  $f(x-0)$  direkt zu berechnen, man hat nur durch geeignete Wahl von  $n$  und  $h$  zu bewirken, daß  $n \rightarrow \infty$ ,  $h \rightarrow 0$ ,  $nh \rightarrow \infty$  bzw.  $nh \rightarrow -\infty$  wird. Man hat hiermit auch eine neue Methode, den Sprung  $f(x+0) - f(x-0)$  zu bestimmen. Für die Formeln (8) und (9) vgl. Du Bois Reymond 1, Fejér 2b, für die Gibbssche Erscheinung außerdem Gibbs, Bôcher, Fejér 1b, Gronwall 1a. Für Kopplungen der Form  $\frac{S_n(x+h) + (-1)^x S_n(x-h)}{2}$ , wo  $h$  von  $n$  abhängt, vgl. Rogosinski 1.

Setzt man  $x$  als einen regulären Punkt und außerdem im Falle der Konvergenz eins der Kriterien  $(K_1)$ — $(K_6)$  gleichzeitig für  $\varphi(t)$

1) Auf diese Erscheinung, die schon früher von Wilbraham bemerkt wurde, hat Gibbs aufs neue hingewiesen. Merkwürdigerweise ist sie Du Bois Reymond, von dem die Formel (8) herrührt, entgangen, trotzdem er selbst die Möglichkeit dieser Erscheinung bei anderen Darstellungsintegralen betont (Du Bois Reymond 1).

2) Darunter versteht man die Existenz des Doppellimes  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} S_n(x+h)$ .

und  $\psi(t)$  als erfüllt voraus, so ist dieses damit gleichbedeutend, daß man diese Voraussetzungen für  $f(t)$  selbst im Punkte  $x$  macht und zwar gleichmäßig rechts und links von  $x$ . Wegen der Konvergenzverhältnisse, wenn man die Voraussetzungen nur einseitig macht, vgl. Rogosinski 2.

### § 3. Verallgemeinerung der Grundbedingungen.

#### A. Die Lebesguesche Verallgemeinerung.

Es sei  $\chi(t)$  für  $t \geq 0$  definiert und  $L$ -integrierbar. Wir sagen,  $\chi(t)$  habe für  $t \rightarrow 0$  den  $L$ -Grenzwert  $\gamma$ ,  $L\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} \chi(t) = \gamma$ , wenn

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |\chi(t) - \gamma| dt = 0.$$

Mit Benutzung dieser Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffs erhält man aus den G. B.  $(P_0)$  und  $(Q_0)$  neue G. B., wenn man in (2, 1) den Grenzübergang durch den  $L$ -limes ersetzt:

$$(2) \quad \begin{aligned} (P) \quad & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |\varphi(t) - \alpha| dt = 0, \\ (Q) \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |\psi(t) - \beta| dt = 0. \end{aligned}$$

Hierdurch verallgemeinert sich auch der Begriff des regulären Punktes (gleichzeitiges Bestehen von  $(P)$  und  $(Q)$ ), des Stetigkeitspunktes (wenn außerdem noch  $\beta = 0$  ist). Wir nennen auch hier  $2\beta$  den (verallgemeinerten) Sprung. Es läßt sich nun zeigen, daß die Sätze  $A_0, B_0, A_0^*, B_0^*, A_0^{(1)}, B_0^{(1)}$  (die von den G. B. abhängen) erhalten bleiben, wenn wir in ihnen die G. B.  $(P_0)$  bzw.  $(Q_0)$  durch  $(P)$  bzw.  $(Q)$  ersetzen. In dieser Verschärfung bezeichnen wir die Sätze mit denselben Buchstaben unter Weglassung des Index 0, also  $A, B, A^*, B^*, A^{(1)}, B^{(1)}$ . Für  $A, B$  bzw.  $A^*, B^*$  vgl. die Literatur zu  $A_0, B_0$  bzw.  $A_0^*, B_0^*$ , für  $A^{(1)}$  Lebesgue 1, 2; Schlesinger-Plessner [10]; Fejér 5; für  $B^{(1)}$  Young 1a, Plessner 1.

Bei den Sätzen  $A$  und  $B$  ist aber zu bemerken, daß bei den Kriterien  $(K_1)$  und  $(K_6)$   $(P_0)$  bzw.  $(Q_0)$  von selbst erfüllt sind,  $(K_2)$  ist unabhängig von einer Grundbedingung, ebenso können bei  $(K_3)$  die G. B. weggelassen werden (vgl. S. 1339 Fußnote 2 und S. 1346), so

daß die Bedeutung der Lebesgueschen Verallgemeinerung bei den Sätzen **A** und **B** nur auf die Konvergenzkriterien ( $K_4$ ) und ( $K_5$ ) beschränkt bleibt.

Ein weiterer Vorteil der neuen G. B. ist die Möglichkeit einer sinngemäßen Übertragung auf die Reihenklasse  $Y$ . Hier lauten die G. B.<sup>1)</sup>

$$(P) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |d_t(F(x+t) - F(x-t) - 2\alpha t)| = 0,$$

$$(Q) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |d_t(F(x+t) + F(x-t) - 2\beta t)| = 0.$$

Mit diesen G. B. bleiben die Sätze  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $A^{(1)}$ ,  $B^{(1)}$  auch für die Klasse  $Y$  gültig. In  $B^{(1)}$  ist dabei das Integral in (2, 7) durch<sup>1)</sup>

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_n}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} d_t(F(x+t) + F(x-t) - 2\beta t)$$

zu ersetzen. Vgl. für  $A^*$  und  $A^{(1)}$  Young 1b und Plessner 1, für  $B^*$  und  $B^{(1)}$  Plessner 1.

Die Sätze **A** und **B** lassen sich auf die Klasse  $Y$  nicht übertragen, da hier das Riemann-Lebesguesche Lemma (1, 1) und somit auch der Lokalisationssatz Riemanns nicht mehr gilt. Ersetzt man aber die Frage nach der Konvergenz gegen einen bestimmten Grenzwert durch die Frage nach der Endlichkeit der Unbestimmtheitsgrenzen ( $\limsup$  und  $\liminf$ , S. 1048), so läßt sich eine analoge Theorie (auch für die Sätze  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $A^{(1)}$ ,  $B^{(1)}$ ) entwickeln, die auch als Ergänzung des vorherigen gelten kann. Hierbei sind aber die G. B. gemäß der Problemstellung dahin abzuschwächen, daß statt der Existenz des Grenzwertes nur die Endlichkeit der Unbestimmtheitsgrenzen zu fordern ist, also sind die G. B. (**P**) und (**Q**) durch<sup>1)</sup>

$$(M) \quad \frac{1}{h} \int_0^h |d_t(F(x+t) - F(x-t))| < \kappa,$$

$$(N) \quad \frac{1}{h} \int_0^h |d_t(F(x+t) + F(x-t))| < \kappa$$

zu ersetzen.

1) Der Index  $t$  bei  $d_t$  zeigt an, daß der darauffolgende Ausdruck als Funktion von  $t$  zu betrachten ist, in der  $x$  als Parameter auftritt.

B. Die G. B.  $(P_1)$  und  $(Q_1)$ . Die Klasse D.-P.

Wir setzen

$$(6) \quad \begin{aligned} \varphi_1(h) &= \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(u) du = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}, \\ \psi_1(h) &= \frac{1}{h} \int_0^h \psi(t) dt = \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{2h} \end{aligned}$$

und wählen als Verallgemeinerung von  $(P_0)$  und  $(Q_0)$  die G. B.

$$(7) \quad (P_1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_1(h) = \alpha, \quad (Q_1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \psi_1(h) = \beta$$

$(P_1)$  und  $(Q_1)$  sind auch allgemeiner als  $(P)$  und  $(Q)$  und sind z. B. von selbst erfüllt, wenn man für  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  das Kriterium  $(K_3)$  der Sätze  $A_0$  und  $B_0$  zugrunde legt. Die G. B.  $(P_1)$  und  $(Q_1)$  sind auch für die Reihen  $U_{af}$  und  $V_{af}$  der Klasse  $Y$  brauchbar, da man die zweite Form für  $\varphi_1(h)$  und  $\psi_1(h)$  in (6) benutzen kann.

Die G. B.  $(P_1)$  und  $(Q_1)$  reichen nicht aus, um die Sätze  $A^{(1)}$  und  $B^{(1)}$  über die  $(C, 1)$ -Summierbarkeit zu beweisen (Hahn 1). Es sind nämlich für  $\varphi_1(t)$  und  $\psi_1(t)$  wieder ganz analoge Zusatzkriterien erforderlich wie in den Sätzen  $A_0$  und  $B_0$  für  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$ . Dagegen kann man zeigen, daß in den Sätzen  $A_0^{(1)}$  bzw.  $B_0^{(1)}$  die G. B.  $(P_0)$  bzw.  $(Q_0)$  durch  $(P_1)$  bzw.  $(Q_1)$  ersetzt werden dürfen, wenn gleichzeitig  $S_n^{(1)}(x)$  durch  $S_n^{(2)}(x)$  bzw.  $T_n^{(1)}(x)$  durch  $T_n^{(2)}(x)$  ersetzt wird. Die Sätze, die man auf diese Weise erhält, sollen mit  $A_1^{(2)}$  bzw.  $B_1^{(2)}$  bezeichnet werden. Vgl. hierzu Lebesgue 1, 2 und § 7.

Wenn man dagegen zu den  $(P_1)$  bzw.  $(Q_1)$  die Beschränktheitsbedingungen (5)  $(M)$  bzw.  $(N)$  hinzunimmt, die man für die Klasse  $L$  auch<sup>1)</sup>

$$(8) \quad (M) \quad \frac{1}{h} \int_0^h |\varphi(t)| dt < \varepsilon, \quad (N) \quad \frac{1}{h} \int_0^h |\psi(t)| dt < \varepsilon$$

schreiben kann, so vermögen die kombinierten G. B.  $(P_1 - M)$  bzw.  $(Q_1 - N)$ , die noch allgemeiner als  $(P)$  und  $(Q)$  sind, in

1) Die Bedingungen  $(M)$  und  $(N)$  sind also insbesondere erfüllt, wenn  $f(x)$  in der Umgebung von  $x$  beschränkt ist.

den Sätzen  $A^{(1)}$  und  $B^{(1)}$  die G. B.  $(P)$  bzw.  $(Q)$  zu ersetzen. In (2, 7) ist dabei  $\delta_n$  etwas anders zu wählen, nämlich zugleich  $n\delta_n \rightarrow \infty$  und  $n\delta_n \cdot \sup\{\psi_1(\delta_n) - \beta\} \rightarrow 0$ .<sup>1)</sup> (Bei der Klasse  $Y$  ist dabei das Integral in (2, 7) durch (4) zu ersetzen.) Für diese G. B. vgl. Noaillon, Hardy-Littlewood 4b.

Bei Zugrundelegung von  $(M)$  ist nach Hardy-Littlewood 3 und 4b  $(P_1)$  nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die  $(C, 1)$ -Summierbarkeit der F. R. der Klassen  $L$  und  $Y$ .<sup>2)</sup> Der entsprechende Satz für die K. R. lautet<sup>3)</sup>: Wird  $(N)$  als erfüllt vorausgesetzt, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die  $(C, 1)$ -Summierbarkeit der K. R. die Existenz des Grenzwertes

$$(9) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \quad \text{bzw.} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} d_t(F(x+t) + F(x-t)).$$

(Hierbei ist von selbst  $(Q_1)$  erfüllt mit  $\beta = 0$ .)

Überdies sind nach Hardy-Littlewood 4b in einem Punkt  $x$ , in dem  $(M)$  bzw.  $(N)$  erfüllt ist, die  $S_n(x)$  bzw.  $T_n(x)$ , wenn nicht schon  $(C, 1)$ -summierbar, auch mit keinen höheren Mitteln  $(C, k)$ -summierbar. In allen diesen Aussagen können  $(M)$  und  $(N)$  durch die Bedingungen  $\varphi(t) \geq -\kappa$ ,  $\psi(t) \geq -\kappa$  ersetzt werden; also ist z. B. die F. R. einer positiven Funktion in jedem Punkte entweder  $(C, 1)$ -summierbar oder mit keinem  $(C, k)$ , und  $(P_1)$  ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Summierbarkeit. Vgl. Hardy-Littlewood 4b.

Das Bestehen von  $(P_1)$  bzw. die Existenz des Grenzwertes (9) tritt auch als notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der F. R. bzw. der K. R. auf, wenn den Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  gewisse beschränkende Bedingungen auferlegt werden.

1)  $\sup\{\psi_1(\delta_n) - \beta\}$  ist gleich der oberen Grenze von  $\{\psi_1(t) - \beta\}$  für alle  $0 < t \leq \delta_n$ .

2) Der Satz ist bei Hardy-Littlewood 4b nur für die Klasse  $L$  ausgesprochen.

3) Der Beweis in einer noch zu erscheinenden Abhandlung des Verfassers.



Solche Bedingungen sind (1, 5), (1, 6) und

$$(10) \quad \sum n(a_n^2 + b_n^2) < \kappa,$$

$$(11) \quad na_n > -\kappa, \quad nb_n > -\kappa.$$

Für (1, 5) vgl. Fatou, für (1, 6), (10) und (11) Hardy-Littlewood 2a und 4a.

Die G. B.  $(P_1)$  und  $(Q_1)$  besitzen weiter den Vorteil, daß sie auch bei der Einführung von F. R. nicht absolut integrierbarer Funktionen anwendbar bleiben. Als allgemeinste F. R. dieser Art werden wir hier diejenigen betrachten, bei welchen die zugeordnete Funktion  $f(x)$  als im Denjoy-Perronschen Sinne integrierbar vorausgesetzt wird (spezielles  $D$ -Integral oder  $P$ -Integral, S. 1093–1094) und sprechen dann von der Klasse  $D$ - $P$ . Für die Koeffizienten gilt dann statt (1, 3) nur

$$(12) \quad a_n = o(n), \quad b_n = o(n).$$

Von den bisherigen Resultaten sind für die Klasse  $D$ - $P$  nur die Sätze  $A_1^{(2)}$  und  $B_1^{(2)}$  von Bedeutung, die für sie unverändert gelten, vgl. auch § 7.

#### § 4. Weitere Summationsmethoden.

Wir betrachten hier in erster Linie Summationsmethoden, die in der Bildung von

$$(1) \quad U(h, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \mu_n(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \mu_n(h) = 1, \quad h > 0$$

und der Untersuchung von  $U(h, x)$  für  $h \rightarrow 0$  bestehen.<sup>1)</sup> Man wird auf diese Weise mit Poisson dazu geführt, die F. R.  $U$  als Randwert der Funktion von zwei Veränderlichen  $U(h, x)$  anzusehen. Diese Auffassung erweist sich als besonders natürlich bei der Integration partieller Differentialgleichungen durch T. R., wo sie von selbst gegeben ist, da als Lösung eine Funktion  $U(h, x)$  von zwei (oder mehreren) Veränderlichen auftritt, die für  $h = 0$  in eine vorgeschriebene Randfunktion übergehen soll. So führen einzelne Probleme der Wärmeleitung in naturgemäßer Weise auf brauchbare Summationsmethoden (vgl. [9] und S. 1177).

1) Auf die allgemeinen an die  $\mu_n(h)$  noch zu stellenden Bedingungen gehen wir nicht ein, da wir nur spezielle Summationsmethoden im Auge haben.

A. Poisson.<sup>1)</sup>

$\mu_n(h) = e^{-nh}$ . Setzt man noch  $r = e^{-h}$ , so ist für die F. R.  $U$  und die K. R.  $V$

$$(2) \quad U(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \cdot r^n$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(t-x)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} f(t) dt \rightarrow \text{Klasse } L \text{ u. D.-P.} \\ dF \rightarrow \text{Klasse } Y. \end{array} \right.$$

$$V(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2r \sin(t-x)}{1+r^2-2r \cos(t-x)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} f(t) dt \\ dF \end{array} \right\}.$$

Da aus der  $(C, k)$ -Summierbarkeit für beliebiges  $k$  auch die Summierbarkeit nach Poisson folgt (*Rep. I<sub>2</sub>*, S. 771 und Knopp [6]), so genügt es, wenn wir hier die G. B.  $(P_1)$  und  $(Q_1)$  zugrunde legen, die für die  $(C, 2)$ -Mittel ausreichen (S. 1346) (oder allgemeiner die G. B.  $(P_k)$  und  $(Q_k)$ , vgl. (7, 5) und (7, 9)). Man erhält dann die Sätze (vgl.  $A_1^{(2)}$ ,  $B_1^{(2)}$ ):

$A_1^{(P)}$ . Unter Voraussetzung von  $(P_1)$  gilt  $\lim_{r \rightarrow 1} U(r, x) = \alpha$ .

$B_1^{(P)}$ . Unter Voraussetzung von  $(Q_1)$  gilt

$$(3) \quad V(r, x) = \frac{2\beta}{\pi} \lg \frac{1+r}{1-r} + \frac{1}{\pi} \int_{\delta_r}^{\pi} (\psi(t) - \beta) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt + \varepsilon_r,$$

wo  $\varepsilon_r \rightarrow 0$ ,  $\kappa_1(1-r) < \delta_r < \kappa_2(1-r)$ ,

$$\int_{\delta_r}^{\pi} (\psi(t) - \beta) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt = o\left(\lg \frac{1}{1-r}\right).$$

Bei der Klasse  $Y$  ist das Integral in (2) durch (3, 4) (mit  $\delta_r$  statt  $\delta_n$ ) zu ersetzen.

Die Bedingungen für die Existenz von  $\lim_{r \rightarrow 1} V(r, x)$  sind dieselben wie bei den  $(C, 2)$ -Mitteln, nämlich  $\beta = 0$  und die Existenz der Grenzwerte (3, 9). Vgl. für  $A_1^{(P)}$  Hölder, Fatou, für  $B_1^{(P)}$  Plessner 1.

1) Für das Poissonsche Summationsverfahren vgl. *Rep. I<sub>2</sub>*, S. 771 und 772 (Fußnote).

Die Funktionen  $U(r, x)$  und  $V(r, x)$  sind, wenn man  $r$  und  $x = \theta$  als Polarkoordinaten deutet, zwei im Einheitskreis konjugierte reguläre Potentialfunktionen, was wieder Beziehungen zur Theorie der analytischen Funktionen aufweist, die für die Zusammenhänge zwischen  $U$  und  $V$  von besonderer Wichtigkeit sind. Die F. R. und die K. R. erscheinen so als Randwerte der beiden Potentialfunktionen  $U(r, \theta)$  und  $V(r, \theta)$  und die Sätze  $A_1^P$  und  $B_1^P$  geben das Verhalten dieser Potentialfunktionen bei *radialer* Annäherung an den Randpunkt  $(1, \theta)$  an.

Hierdurch wird die Frage nach dem Verhalten bei beliebiger Annäherung  $\bar{\theta} \rightarrow \theta, r \rightarrow 1$  nahegelegt (vgl. S. 1342). Diese beantworten wir nur für  $U(r, \theta)$ . Es gilt (vgl.  $A_{00}^{(1)}$  S. 1342)

$A_{00}^{(P)}$ . Sind in  $\theta$   $(P_0)$  und  $(Q_0)$  zugleich erfüllt, so ist<sup>1)</sup>

$$(4) \quad U(r, \theta + h) = \alpha + \frac{2\beta}{\pi} \arctg_1 \frac{h}{1-r} + \varepsilon(r, h), \quad \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ h \rightarrow 0}} \varepsilon(r, h) = 0$$

und  $A_{11}^{(P)}$ . Die Formel (4) gilt für die G. B.  $(P_1)$  und  $(Q_1)$ , wenn dem doppelten Grenzübergang noch die Beschränkung  $\left| \frac{h}{1-r} \right| < \kappa$  auferlegt wird, die Annäherung also in einem Sehnwinkel erfolgt (vgl. auch Stolz'scher Weg *Rep. I*<sub>2</sub>, S. 771). Für  $A_{00}^{(P)}$  vgl. Prym, Schwarz, Du Bois Reymond 1, für  $A_{11}^{(P)}$  Fatou und [11].

#### B. Weierstraß.

$$\mu_n(h) = e^{-n^2 h}. \quad (1) \text{ ergibt hier}^2)$$

$$U(h, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \vartheta_3\left(\frac{t-x}{2\pi}, e^{-h}\right) dt.$$

Das Verfahren, das der Wärmeleitungstheorie entspringt (vgl. S. 1177), ist dem Poissonschen verwandt, aber durch das Auftreten der  $\vartheta$ -Funktion weniger elementar. Vgl. Weierstraß, [8a], [9] und Hahn 2.

1)  $\arctg \xi$  ist hier für reelle  $\xi$  eindeutig durch das Integral  $\int_0^{\xi} \frac{dt}{1+t^2}$  definiert.

2) Für die Definition der  $\vartheta_3$ -Funktion vgl. *Rep. I*<sub>2</sub> S. 787.

## C. Riemann.

$\mu_n(h) = \left( \frac{2 \sin \frac{nh}{2}}{nh} \right)^2$ . Hier ist  $U(h, x) = \varphi_2(h)$  (vgl. (7, 9) und S. 1357). Ebenso liefert für die Klassen  $L$  und  $Y$   $\mu_n(h) = \frac{\sin nh}{nh}$  eine Summation, bei der  $U(h, x) = \varphi_1(h)$  ist (vgl. S. 1357). Auch die höheren  $\varphi_k(h)$  für  $k > 2$  (vgl. (7, 9)) liefern auf diese Weise entsprechende Summationsverfahren. Für diese, auch für allgemeinere T. R., vgl. § 13.

## D. De la Vallée Poussin.

Ein Summationsverfahren, das ebenso wie das Poissonsche stärker als alle  $(C, k)$ -Mittel ist, dagegen nur auf endliche trigonometrische Summen führt, hat de la Vallée Poussin angegeben. Er betrachtet den Ausdruck

$$S_n^{(V)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{(n+1)(n+2) \cdots (n+k)} U_k(x) \\ = \frac{1}{\gamma_n} \int_0^\pi \varphi(t) \left( \cos \frac{t}{2} \right)^{2n} dt,$$

wo 
$$\gamma_n = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{2n \cdot (2n-1) \cdots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Ebenso wie bei dem Poissonschen Verfahren genügt es, um die Konvergenz zu sichern, die G. B.  $(P_1)$  (oder allgemeiner  $(P_k)$ , vgl. (7, 5) und (7, 9)) vorauszusetzen. Vgl. auch Gronwall 2.

## § 5. Die darstellenden oder singulären Integrale.

Indem man sich auf die F. R. und die G. B.  $(P_0)$  beschränkt, kann man den wesentlichen Teil der vorherigen Betrachtungen als die Untersuchung des Verhaltens für  $n \rightarrow \infty$  der Integrale vom Typus

$$(1) \quad \int_{\eta}^{\eta} \chi(t) K(n, t) dt$$

zusammenfassen. Dabei stehen zwei Sätze im Vordergrund:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\xi}^{\eta} \chi(t) K(n, t) dt = 0 \quad (0 < \xi < \eta \leq c)$$

(Riemann-Lebesguesches Lemma),

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\xi}^{\eta} \chi(t) K(n, t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) \quad (0 = \xi < \eta \leq c)$$

(Konvergenzsatz).

Setzt man noch die gleichmäßige Beschränktheit von  $K(n, t)$  außerhalb der singulären Stelle  $t = 0$  voraus<sup>1)</sup>

$$(4) \quad |K(n, t)| < K(\xi), \quad \text{für } t \geq \xi > 0,$$

so ist für das Bestehen von (2) notwendig und hinreichend

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\xi}^{\eta} K(n, t) dt = 0, \quad (0 < \xi < \eta \leq c)$$

während für die Gültigkeit von (3) sich als notwendige Bedingung ergibt

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\eta} K(n, t) dt = 1. \quad (0 < \eta \leq c)$$

Die Integrale (1) mit den Eigenschaften (5) und (6) heißen nach Du Bois Reymond 3a *darstellende*<sup>2)</sup>, nach Lebesgue 2 *singuläre* Integrale und  $K(n, t)$  ihr *Kern*. Die früher betrachteten Fälle waren  $K(n, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}$  der Fourier-

Dirichletsche Kern,  $K(n, t) = \frac{1}{2\pi n} \left( \frac{\sin n \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$  (Fejér),

$K(r, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos t}$ ,  $r = 1 - \frac{1}{n}$  (Poisson) usw. Um (3) (unter der Voraussetzung der G. B. ( $P_0$ ) für  $\chi(t)$ ) zu sichern, sind im allgemeinen außer (4), (5) und (6) noch weitere Zu-

1) Diese Bedingung ist auch notwendig, wenn man  $\chi(t)$  außerhalb von  $t = 0$  als nur  $L$ -integrierbar voraussetzt.

2) Bei Du Bois Reymond scheinen in die Definition auch (4) und (8) aufgenommen zu sein.

satzbedingungen nötig. Diese fallen fort, wie schon Du Bois Reymond 3a nachgewiesen hat, wenn man den Kern des Integrals noch der Bedingung

$$(7) \quad \varrho_n = \int_0^c |K(n, t)| dt < \kappa$$

unterwirft. Demgemäß teilt Du Bois Reymond die singulären Integrale in zwei Klassen, je nachdem die Folge der  $\varrho_n$  (die später von Fejér 2a als Lebesguesche Konstanten bezeichnet wurden) beschränkt ist oder nicht. Bei den Integralen der zweiten Klasse mit den Bedingungen (4), (5) und (6) und der folgenden

$$(8) \quad \left| \int_0^\eta K(n, t) dt \right| < \kappa \quad (0 < \eta \leq c)$$

gibt er das Kriterium ( $K_1$ ) (S. 1338) für die Gültigkeit von (3). Um schon das Kriterium ( $K_3$ ) als ausreichend hierfür zu erhalten, unterwirft er den Kern noch den weiteren Bedingungen<sup>1)</sup>

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow 0} t K(n, t) = 0, \quad |t K(n, t)| < \kappa.$$

Die schon von Du Bois Reymond erstrebten Methoden zur Umkehrung dieser Resultate hat Lebesgue gegeben, dem die Theorie der singulären Integrale ihren systematischen Ausbau verdankt. Lebesgue zeigte insbesondere (vgl. [7] und 2), daß (7) nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, wenn (3) für jedes  $\chi(t)$  (sogar stetiges) gelten soll. Da im Falle des Fourier-Dirichletschen Kernes die Konstanten  $\varrho_n$  wie  $\lg n$  ins Unendliche wachsen, so läßt sich hieraus nach Lebesgue [7] die Existenz von Divergenzpunkten bei F. R. stetiger Funktionen erschließen. Ebenso ist nach Haar und Lebesgue 2 (8) nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, damit (3) für jede Funktion  $\chi(t)$  von beschränkter Schwankung gilt.

Die von uns besprochenen Summationsverfahren hatten alle das Ziel, die Integrale mit dem Fourier-Dirichletschen Kern in solche zu transformieren, bei denen die Lebesgueschen Konstanten  $\varrho_n$  des Kernes beschränkt sind, wodurch, nach Du Bois Reymond, die G. B. ( $P_0$ ) ausreicht, um die Konvergenz zu sichern. Für

1) Hier kann für  $\chi(t)$  die G. B. ( $P_1$ ) zugrunde gelegt werden.



den weiteren Ausbau der Theorie der singulären Integrale vgl. Lebesgue 2 und Hahn 2, 3, für die Theorie der Lebesgueschen Konstanten beim Fourier-Dirichletschen Kern vgl. Fejér 2a, Gronwall 1b und insbesondere Szegő.

## § 6. Die Konvergenz- und Divergenzerscheinungen bei den F. R. und K. R.

A.  $f(x)$  ist eine Funktion beschränkter Schwankung.

Für die Koeffizienten gilt (1, 6). Bei dieser für die Anwendungen besonders wichtigen Klasse sind überall die G. B.  $(P_0)$  und  $(Q_0)$  sowie das Kriterium  $(K_1)$  erfüllt. Die F. R. konvergiert also überall und zwar gegen  $\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ , außerdem sind die Partialsummen *gleichmäßig beschränkt*. Der Konvergenzbeweis kann hier auch so geführt werden, daß man zunächst nur die Konvergenz der  $(C, 1)$ -Mittel bzw. des Poissonschen Verfahrens nachweist, um dann aus der Koeffizientenabschätzung (1, 6) auf Grund eines Satzes von Hardy 1a bzw. Littlewood die Konvergenz zu folgern.<sup>1)</sup> Ist  $f(x)$  außerdem noch überall stetig, so konvergiert die F. R. gleichmäßig. Wie sich aus der Verschärfung (1, 2) des Riemann-Lebesgueschen Lemmas ergibt, gilt das gleiche, wenn die Voraussetzungen für ein Teilintervall gemacht werden.

B.  $f(x)$  ist stetig oder besitzt allgemeiner nur gewöhnliche, reguläre Punkte.<sup>2)</sup>

Die G. B.  $(P_0)$  und  $(Q_0)$  sind überall erfüllt, nach Satz  $A_0^{(1)}$  (S. 1341) konvergieren also die  $(C, 1)$ -Mittel überall gegen  $\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  und stellen also mit Ausnahme von abzählbar unendlich vielen Punkten  $x$  die Funktion dar, während nach Satz  $B_0^{(1)}$  die  $(C, 1)$ -Mittel der K. R. gegen das Integral

$$(1) \quad g(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt$$

1) Diese Sätze besagen, daß eine  $(C, 1)$ - bzw. nach Poisson summierbare Reihe auch konvergiert, wenn für die Glieder die Abschätzung (1, 6) gilt.

2) Vgl. S. 1337.

konvergieren, sobald dieses Integral existiert (es ist dann von selbst  $\beta = 0$ ), was fast überall stattfindet. (Ähnlich für das Poissonsche Verfahren, vgl. § 4.)

Schwieriger liegen die Verhältnisse bei den Konvergenzfragen. Die Konvergenzkriterien sind allgemeiner Natur und gestatten noch, die Werte der Funktion  $f(x)$  in verschiedenen Intervallen unabhängig voneinander zu wählen, so daß die F. R. eine sogenannte „willkürliche“ Funktion darzustellen vermag. Überdies wird die F. R. in einem Intervall gleichmäßig konvergieren, wenn die Kriterien dort gleichmäßig erfüllt sind<sup>1)</sup> (vgl. auch (1, 2)). Das Bestehen dieser Kriterien ist aber nicht irgendwie mit der Stetigkeit verknüpft, so ist es nicht einmal bekannt, ob die F. R. einer stetigen Funktion notwendig auch nur einen Konvergenzpunkt besitzen muß. Die Existenz von Divergenzpunkten bei F. R. stetiger Funktionen hat zuerst Du Bois Reymond 2 nachgewiesen. Er hat hierzu genauer das asymptotische Verhalten des Integrals  $D_v$  (S. 1337) für gewisse stetige Funktionen  $\chi(t)$  betrachtet, die im Nullpunkt Singularitäten spezieller Natur besitzen. Seine Untersuchungen sind dann weiter durch Hardy 2 und Kuniyeda 1 und 2 sichergestellt und ausgebaut worden. Auf Grund des von Lebesgue gefundenen (vgl. § 5) Zusammenhanges zwischen Divergenz und dem Unendlichwerden der Konstanten  $q_n$  (5, 7) hat Fejér 2a und 4 besonders einfache Beispiele von F. R. stetiger Funktionen mit Divergenzpunkten konstruiert, sowie durch Anwendung der Methode der Verdichtung der Singularitäten erreicht, daß diese sogar überall dicht liegen. Da die Partialsummen dieser von Fejér konstruierten Reihen in den Divergenzpunkten nicht beschränkt sind, so folgt nach Steinhaus 1b aus allgemeinen mengentheoretischen Sätzen (vgl. auch Neder 1), daß die Divergenzpunkte in jedem Intervall sogar eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums bilden (vgl. [4b]). Die Frage, ob es dann überhaupt F. R. stetiger Funktionen mit nur abzählbar unendlich vielen überall dicht liegenden Divergenzpunkten gibt, wurde von Steinhaus 1b (vgl. auch Neder 1) aufgeworfen und im bejahenden Sinne entschieden.

Auf eine andere Singularität bei F. R. stetiger Funktionen hat Lebesgue [7] aufmerksam gemacht; eine solche Reihe kann

---

1) Die Bedeutung des „gleichmäßig“ läßt sich in jedem Falle leicht feststellen.

nämlich überall konvergieren, ohne aber gleichmäßig zu konvergieren. Darüber hinaus hat Steinhaus 1a die Existenz überall konvergenter F. R. stetiger Funktionen nachgewiesen, die in keinem Intervall gleichmäßig konvergieren. Für die Fourierschen Potenzreihen stetiger Funktionen (stetige Potenzreihen) liegen die Verhältnisse ähnlich, man muß aber hier die entsprechenden Beispiele besonders konstruieren. Vgl. für die Du Bois Reymondsche Singularität bei Potenzreihen Fejér 3a, 4 und Neder 1, für die Steinhaussche Ergänzung Neder 2, für die Lebesguesche Singularität Fejér 3b und Neder 1, 2, für die Steinhaussche Verschärfung Neder 2.

Nach S. Bernstein konvergiert die F. R. absolut,

$$\sum_1^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \kappa,$$

wenn  $|f(x+h) - f(x)| < \kappa' h^{\lambda} \left( \lambda > \frac{1}{2} \right)$  ist; dagegen gilt das nicht mehr, wenn  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Vgl. Hardy 3, Szász 1.

### C. Die Klassen $L$ , $Y$ und $D. P.$

Hier sind die G. B.  $(P_0)$  und  $(Q_0)$  im allgemeinen nicht erfüllt. Bei der Klasse  $L$  und  $Y$  ersetzt man sie durch die G. B.  $(P)$  und  $(Q)$ , die nach Lebesgue 1 (vgl. [7], [10], [12a]) (für die Klasse  $Y$  vgl. Young 1b und Plessner 1) fast überall erfüllt sind, wobei  $\beta$  fast überall gleich Null ist.<sup>1)</sup> Bei der Klasse  $D. P.$  sind dagegen die Bedingungen  $(P_1)$  und  $(Q_1)$  zugrunde zu legen, für die das gleiche gilt, weil auch die  $D. P.$  integrierbare Funktion fast überall die Ableitung ihres unbestimmten Integrals ist. Somit ergeben die Sätze  $A^{(1)}$  und  $B^{(1)}$  folgendes:

a) die F. R. der Klassen  $L$  bzw.  $Y$  sind fast überall  $(C, 1)$ -summierbar und zwar zum Summenwert  $f(x)$  bzw.  $F'(x)$ ;

b) die K. R. der Klassen  $L$  und  $Y$  sind fast überall  $(C, 1)$ -summierbar, bei  $L$  zum Integral (1), bei  $Y$  zum Integral (3, 4) ( $\delta_n \rightarrow 0$ ).

---

1) Hierauf beruht die Wichtigkeit der Lebesgueschen Verallgemeinerung der G. B. zu  $(P)$  und  $(Q)$ , denn erst diese ermöglicht es, die Untersuchung in einer Menge von Funktionswerten durchzuführen, die zur Bestimmung der F. R. und der K. R. zugleich notwendig und ausreichend ist.

Die Grenzwerte (1) und (3, 4) für  $\delta_n \rightarrow 0$  existieren fast überall. Für (1) vgl. Lichtenstein, Lusin, Plessner 1, Priwaloff 1, 2, unabhängig von der Theorie der F. R. Besicowitsch 1, 2, Titchmarsh; für (3, 4) vgl. Plessner 1.

Ebenso ergeben die Sätze  $A_1^{(2)}$  und  $B_1^{(2)}$ :

Die F. R. und die K. R. der Klasse D. P. sind fast überall (C, 2)-summierbar, die erste zu  $f(x)$ , die zweite zum Grenzwert (1), der auch hier fast überall existiert (vgl. Plessner 2 b). (Gleichlautende Sätze für alle drei Klassen L, Y und D. P. erhält man für die Poissonsche Summationsmethode.)

Da bei den F. R. der Klasse L bzw. D. P. die (C, 1)- bzw. (C, 2)-Mittel fast überall gegen  $f(x)$  konvergieren, so ist die Funktion eindeutig (bis auf eine Menge vom Maße Null) durch ihre F. R. bestimmt, und somit ist hierin ein Beweis des Eindeutigkeitssatzes (S. 1327) enthalten. Ein anderes Verfahren hierzu gewährt bei der Klasse L der Übergang zum unbestimmten Integral  $F(x) = \int_x^x f(x) dx$ . Da  $F_1(x) = F(x) - \frac{a_0 x}{2}$  periodisch, stetig und von beschränkter Schwankung ist, so konvergiert nach S. 1354 die F. R. (E, 5) von  $F_1(x)$  gleichmäßig, bestimmt also mit  $F_1(x)$  auch  $F(x)$  und somit auch fast überall

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

(vgl. § 4 C.). Für die Klasse D. P. benutzt man das zweimal iterierte Integral und bestimmt  $f(x)$  fast überall durch  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_2(h)$  (vgl. (7, 9); § 4 C.).

(E, 5) führt auch unmittelbar bei der F. R. der Klasse L zu der Gleichung

$$(2) \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{a_0}{2} (x_2 - x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n (\sin nx_2 - \sin nx_1)}{n} - \frac{b_n (\cos nx_2 - \cos nx_1)}{n} \right\},$$

womit die Gültigkeit der formalen Integration der F. R. der Klasse L dargetan ist.

Über die Konvergenzverhältnisse bei der F. R. ist weit weniger bekannt. Kolmogoroff hat ein Beispiel einer fast überall divergenten F. R. der Klasse L gegeben, dagegen ist

das Entsprechende nicht bekannt, wenn man noch gewisse Einschränkungen wie Stetigkeit oder quadratische Integrierbarkeit macht. Es sei hier außerdem angegeben, daß, wie Steinhaus 2 gezeigt hat, bei der sehr einschränkenden Voraussetzung (1, 5) über die Koeffizienten der F. R. die Divergenzpunkte in jedem Intervall noch immer eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums bilden können.

Allgemein ergeben aber die Sätze  $A^*$  und  $B^*$  (vgl. (2, 5)), daß für die Klassen  $L$  und  $Y$  fast überall

$$(3) \quad S_n(x) = o(\lg n), \quad T_n(x) = o(\lg n)$$

ist, und hieraus folgert man durch Kombination mit den früheren Sätzen über die  $(C, 1)$ -Summierbarkeit der F. R. und der K. R., daß für diese Klassen die beiden Reihen

$$(4) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{U_n(x)}{\lg n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V_n(x)}{\lg n}$$

fast überall konvergieren. Vgl. für die F. R.  $U$  Hardy 1 b, Young 1 b, für die K. R.  $V$  Plessner 1.

Für F. R. derjenigen Funktionen, deren Quadrat noch integrierbar ist, gilt folgende Verschärfung (Plessner 2a). Es ist fast überall<sup>1)</sup>

$$(5) \quad S_n(x) = o(\sqrt{\lg n})$$

und dementsprechend konvergiert fast überall die Reihe<sup>1)</sup>

$$(6) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{\sqrt{\lg n}}.$$

Das letzte Ergebnis läßt sich unter Zuhilfenahme des Fischer-Rieszschen Satzes (S. 1370) auch so aussprechen (Plessner 2a):

Die T. R.  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  konvergiert fast überall, wenn

$$(7) \quad \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \lg m < \kappa$$

oder, was dasselbe bedeutet,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \lg n$  konvergiert.

---

1) Infolge des Fischer-Rieszschen Satzes (S. 1370) würde dieselbe Aussage für  $T_n(x)$  nichts neues bedeuten.

Ebenso läßt sich die Konvergenz der Reihen (4) anders ausdrücken, indem man in der letzten Aussage (7) durch die minder einfachen Koeffizientenbedingungen

$$(8) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left| (C, 1) - \sum_{m=1}^n U_m(x) \lg m \right| dx < \kappa \quad \text{oder}$$

$$(9) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left| (C, 1) - \sum_{m=1}^n V_m(x) \lg m \right| dx < \kappa$$

ersetzt (vgl. § 9 Satz II). Man erhält auf diese Weise die allgemeinsten bisher bekannten Sätze über die T. R.<sup>1)</sup>, in welchen aus der Größenordnung der Koeffizienten die Konvergenz der Reihen mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null folgt.

### § 7. Die differenzierten Reihen.

Eine weitgehende Verallgemeinerung der bisherigen Theorie ergibt die Betrachtung derjenigen Reihen  $U_F^{(-r)}$  und  $V_F^{(-r)}$ , die durch  $r$ -malige gliedweise Differentiation der F. R.  $U(E, 1)$  einer Funktion  $F(x)$  der Klasse  $L$  und der zugehörigen K. R.  $V(E, 10)$  entstehen (Young 1c und 2). Es ist

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} U_F^{(-r)} &\equiv (-1)^{\frac{r}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^r U_n(x), \\ V_F^{(-r)} &\equiv (-1)^{\frac{r}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^r V_n(x), \end{aligned} \right\} r = 2p,$$

$$\left. \begin{aligned} U_F^{(-r)} &\equiv (-1)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^r V_n(x), \\ V_F^{(-r)} &\equiv (-1)^{\frac{r+1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^r U_n(x). \end{aligned} \right\} r = 2p + 1.$$

Auf Grund des Riemann-Lebesgueschen Satzes (1, 1) und seiner Verschärfung (1, 2) läßt sich leicht zeigen, daß die

1) Dies gilt hier bis auf die Verallgemeinerung, die man erzielen kann, wenn man restringierte F. R. (vgl. § 12) zugrunde legt.



Konvergenz der  $(C, r)$ -Mittel der Reihen  $U^{(-r)}$  und  $V^{(-r)}$  in einem Punkte  $x$  nur von dem Verhalten der Funktion  $F(x)$  in der unmittelbaren Umgebung des Punktes  $x$  abhängt (Lokalisationssatz, vgl. S. 1336), während dies für die Mittel  $(C, r-1)$  nicht mehr gilt (vgl. Young 1c). Diese Analogie der  $(C, r)$ -Mittel der Reihen  $U^{(-r)}$  und  $V^{(-r)}$  mit den Partialsummen der F. R. und der K. R. (und entsprechend diejenige der Mittel  $(C, k+r)$  mit den  $(C, k)$ ) läßt sich auch weiter genau verfolgen. Zu diesem Zwecke führen wir den Begriff der  $m^{\text{ten}}$  verallgemeinerten Ableitung einer Funktion  $F(x)$  ein. Gesetzt  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$  seien die in diesem Sinne schon definierten Ableitungen nullter, erster,  $\dots$ ,  $m-1^{\text{ter}}$  Ordnung und

$$(2) \quad F(x+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \dots + \frac{\alpha_{m-1} h^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\omega_m(h) h^m}{m!},$$

so heißt

$$(3) \quad \alpha_m = \lim_{h \rightarrow 0} \omega_m(h),$$

sobald dieser Grenzwert existiert, die verallgemeinerte Ableitung  $m^{\text{ter}}$  Ordnung im Punkte  $x$ . Hierdurch werden die Ableitungen, sobald sie existieren, sukzessiv bestimmt.

Für das Folgende sind von Wichtigkeit die symmetrischen Bildungen

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} \frac{F(x+h) + F(x-h)}{2} &= \alpha_0 + \frac{\alpha_2 h^2}{2} + \dots \\ &\quad + \frac{\alpha_{m-2} h^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{\varphi_m(h) h^m}{m!}, \\ \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2} &= \alpha_1 h + \frac{\alpha_3 h^3}{3!} + \dots \\ &\quad + \frac{\alpha_{m-1} h^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\psi_m(h) h^m}{m!}, \end{aligned} \right\} m = 2p$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2} &= \alpha_1 h + \frac{\alpha_3 h^3}{3!} + \dots \\ &\quad + \frac{\alpha_{m-2} h^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{\varphi_m(h) h^m}{m!}, \\ \frac{F(x+h) + F(x-h)}{2} &= \alpha_0 + \frac{\alpha_2 h^2}{2} + \dots \\ &\quad + \frac{\alpha_{m-1} h^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\psi_m(h) h^m}{m!}, \end{aligned} \right\} m = 2p + 1$$

$$\text{wo } \varphi_m(h) = \frac{\omega_m(h) + \omega_m(-h)}{2}, \quad \psi_m(h) = \frac{\omega_m(h) - \omega_m(-h)}{2}.$$

Aus diesen Formeln sieht man, daß man die  $\varphi_m(h)$  bzw.  $\psi_m(h)$  unabhängig von  $\omega_m(h)$  definieren kann, wenn man die entsprechenden geraden oder ungeraden  $\alpha_k$  ( $k < m$ ) kennt. Diese können aber, unabhängig von dem Vorherigen aus (4) durch  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_m(h)$  ebenso definiert werden, wie früher durch (3). Die

so definierten symmetrischen  $\varphi$ -Ableitungen (De la Vallée Poussin) sind allgemeiner als die vorher durch (3) eingeführten  $\omega$ -Ableitungen.<sup>1)</sup> Die Existenz einer  $m^{\text{ten}}$   $\omega$ -Ableitung, also die Gültigkeit von (3), ist nämlich äquivalent mit dem gleichzeitigen Bestehen der beiden folgenden Bedingungen:

$$(5) \quad (P_m) \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_m(h) = \alpha_m, \quad (Q_m) \lim_{h \rightarrow 0} \psi_m(h) = 0,$$

wo die in  $\varphi_m(h)$  und  $\psi_m(h)$  auftretenden  $\alpha_k$  ( $k < m$ ) als  $\varphi$ -Ableitungen zu verstehen sind.

Die oben erwähnte Analogie läßt sich jetzt so fassen: Man wähle für die Reihen  $U^{(-r)}$  und  $V^{(-r)}$  als G. B.  $(P_r)$  und  $(Q_r)$  (vgl. § 2 mit den G. B.  $(P_0)$  und  $(Q_0)$ ).<sup>2)</sup> Man hat dann, wenn  $k > r$  analog den Sätzen  $A_0^{(1)}$ ,  $B_0^{(1)}$  die Sätze:

$A_r^{(k)}$ . Ist in  $x$   $(P_r)$  erfüllt, so ist  $U^{(-r)}(C, k)$  summierbar, und es ist

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^r S_n^{(k)}(x)}{dx^r} = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_r(h) = \alpha_r.$$

$B_r^{(k)}$ . Ist in  $x$   $(Q_r)$  erfüllt, so ist die Reihe  $V^{(-r)}$  dann und nur dann  $(C, k)$ -summierbar, wenn der Grenzwert

$$(7) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\xi} \frac{\psi_r(t)}{t} dt$$

existiert, und in diesem Falle ist

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^r T_n^{(k)}(x)}{dx^r} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\psi_r(t)}{t} dt.$$

1) Wir bezeichnen beide Arten von Ableitungen durch  $\alpha_m$ , geben aber durch Voranstellung von  $\varphi$  oder  $\omega$  zu erkennen, welche gemeint ist.

2) Der G. B.  $(Q_0)$  würde hier  $\lim_{h \rightarrow 0} \psi_r(h) = \beta_r$  entsprechen (der Sprung der  $r^{\text{ten}}$   $\omega$ -Ableitung), wir beschränken uns auf  $\beta_r = 0$ , um die späteren Formeln nicht zu komplizieren.

Die Sätze  $A_r^{(k)}$  bzw.  $B_r^{(k)}$  gelten noch für  $k = r$ , wenn man außerdem noch für  $\varphi_r(t)$  bzw.  $\psi_r(t)$  eins der Kriterien  $(K_1) - (K_6)$  des § 2 als erfüllt voraussetzt. Für den Satz  $A_r^{(k)}$  vgl. Young 1c, 2, Gronwall 2, Zygmund.<sup>1)</sup> Betreffs der Existenz des Grenzwerts (7) gilt der Satz:

Sind auf einer Menge  $Z$  von positivem Maß  $(P_r)$  und  $(Q_r)$  zugleich erfüllt, so existiert der Grenzwert (7) fast überall auf  $Z$  (Plessner 2b).

Die beiden Sätze  $A_r^{(k)}$  und  $B_r^{(k)}$  gelten a fortiori, wenn statt der  $(C, k)$ -Mittel der Reihen  $U^{(-r)}$  und  $V^{(-r)}$  ein stärkeres Summationsverfahren wie das Poissonsche oder De la Vallée Poussinsche zugrunde gelegt wird, und zwar war der entsprechende Satz für diese beiden Summationsverfahren dem Satze  $A_r^{(k)}$  zeitlich vorangegangen (De la Vallée Poussin).

Da man eine F. R. und ihre K. R. nach  $r$ -maliger gliedweiser Integration wieder als die differenzierten Reihen  $U^{(-r)}$ ,  $V^{(-r)}$  auffassen kann, so ergeben die Sätze  $A_r^{(k)}$  bzw.  $B_r^{(k)}$ , wenn man in ihnen  $\frac{d^r S_n^{(k)}(x)}{dx^r}$  durch  $S_n^{(k)}$ ,  $\alpha_r$  durch  $\alpha$ ,  $\frac{d^r T_n^{(k)}}{dx^r}$  durch  $T_n^{(k)}$  ersetzt, unmittelbare Aussagen über die  $(C, k)$ -Summierbarkeit dieser F. R. und ihrer K. R., wobei die  $\varphi_r(h)$  bzw.  $\psi_r(h)$  in den G. B.  $(P_r)$  und  $(Q_r)$  noch durch die der F. R. zugeordnete Funktion  $f(x)$  auszudrücken sind. Haben  $\varphi(h)$  und  $\psi(h)$  die frühere Bedeutung (vgl. (2, 1)), so ist<sup>2)</sup>

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi_r(h) &= \frac{r!}{h^r} \int_0^h dt_r \int_0^{t_r} dt_{r-1} \dots \int_0^{t_2} \varphi(t_1) dt_1 = \frac{r!}{h^r} \int_0^h \varphi(t) (h-t)^{r-1} dt, \\ \psi_r(h) &= \frac{r!}{h^r} \int_0^h dt_r \int_0^{t_r} dt_{r-1} \dots \int_0^{t_2} \psi(t_1) dt_1 = \frac{r!}{h^r} \int_0^h \psi(t) (h-t)^{r-1} dt. \end{aligned}$$

(Für die Klasse  $Y$  ist in den Formeln (9) auf der rechten Seite  $\varphi(t)dt$  bzw.  $\psi(t)dt$  durch  $d_t \frac{F(x+t) - F(x-t)}{2}$  bzw.

1) Für den Satz  $B_r^{(k)}$  eine noch zu erscheinende Abhandlung des Verfassers.

2) Diese Integralbildungen sind für ähnliche Zwecke schon von Du Bois Reymond 3b benutzt worden (vgl. auch Dini [3])

$d_t \frac{F(x+t) + F(x-t)}{2}$  zu ersetzen). In (8) kann das Integral, wie mittels partieller Integration folgt, durch

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\psi_{r-1}(t)}{t} dt$$

ersetzt werden.

Die Sätze dieses Paragraphen erhalten noch eine erweiterte Geltung, wenn in den G. B. ( $P_r$ ) und ( $Q_r$ ) der Grenzübergang durch den  $L$ -limes (vgl. § 3) ersetzt wird.

### Literatur zum I. Abschnitt.

- Bernstein, S., *Compt. Rend.* **158**, 1661.  
 Besikowitsch, 1. *Fund. Math.* **4** (1923); 2. *Journ. Lond. Math. Soc.* **1** (1926).  
 Bôcher, *Ann. of Math.* (2) **7** (1906), — *Journ. f. Math.* **144** (1914).  
 Du Bois Reymond, 1. *Math. Ann.* **7**, 241 (1874); 2. *Münch. Abh.* 1876 und *Math. Ann.* **10**, 431 (1876); 3. *J. f. Math.* a) **79** (1875), 38, b) **100** (1887); 4. *Compt. Rend.* **92** (1881) p. 915 u. 962.  
 Dirichlet, *Werke*, Bd. I, S. 116—160.  
 Faber, *Math. Ann.* **69** (1910), 401.  
 Fatou, *Acta Math.* **30** (1906).  
 Fejér, 1. *Math. Ann.* a) **58** (1904), b) **64** (1907); 2. *J. f. Math.* a) **138** (1910), b) **142** (1913); 3. *Münch. Sitz.-Ber.* a) 1910, b) 1917; 4. *Ann. Ec. Norm* (3) **28** (1911); 5. *Gött. Nachr.* 1925.  
 Gibbs, *Nature* **59** (1898), 606.  
 Gronwall, 1. *Math. Ann.* **72** (1912), a) S. 228, b) 244; 2. *J. f. Math.* **147** (1916).  
 Haar, *Math. Ann.* **69** (1910).  
 Hahn, 1. *Jahr. D. Math. Ver.* **25** (1917); 2. *Wiener Denkschr.* **93** (1916); 3. *Monatsh. Math. Phys.* **32** (1922).  
 Hamilton, *Trans. Irish Ac.* (1) **19** (1843).  
 Hardy, 1. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) a) **8**, S. 302, b) **12**, 365 (1913), 2. *Quart. Journ. Math.* **44** (1913); 3. *Trans. Am. Math. Soc.* **17** (1916); 4. *Messenger Math.* **49**, 149 (1920).  
 Hardy und Littlewood, 1. *Compt. Rend.* **156**, S. 1307; 2. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) a) **18** (1920), b) **26**, 273 (1927); 3. *Math. Zeitschr.* **19** (1924); 4. *Journ. Lond. Math. Soc.* **1** (1926) a) 19, b) 134.  
 Hobson, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **5** (1907).  
 Hölder, *Math. Ann.* **24** (1884).  
 Hurwitz, A., *Ann. Ec. Norm.* (3) **19** (1902).  
 Kolmogoroff, *Fund. Math.* **4** (1923).  
 Kronecker, *Berl. Sitz.-Ber.* 1885, S. 641.  
 Kuniyeda, 1. *Quart. Journ. Math.* **48** (1918); 2. *Colleg. Sc. Tôkyo* **41** (1919).  
 Lebesgue, 1. *Math. Ann.* **61** (1905); 2. *Ann. Toulouse* (3) **1** (1909).  
 Lichtenstein, *J. f. Math.* **141** (1912).  
 Lipschitz, *J. f. Math.* **63** (1864).  
 Littlewood, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **9** (1911).

- Lukács, *J. f. Math.* **150** (1920).  
 Lusin, *Compt. Rend.* **156**, 1655 (1913).  
 Neder, 1. *Zur Konvergenz d. T. R.*, Diss., Göttingen (1919); 2. *Math. Zeitschr.* **6**, 262 (1920).  
 Noaillon, *Bull. Ac. Belg.* 1913, 524.  
 Plessner, 1. *Zur Theorie d. konj. T. R.*, Diss., Gießen (1922); 2. *J. f. Math.* a) **155** (1925), b) **158** (1927), c) **160**.  
 Priwaloff, 1. *Das Cauchysche Integral*, Saratow 1919 (russisch), 2. *Journ. Ec. Polyt.* (2) **24 C.** (1924).  
 Prym, *J. f. Math.* **73** (1871).  
 Riemann, *Werke*, S. 227 (2. Aufl.).  
 Rogosinski, 1. *Math. Ann.* **95** (1926); 2. *Königsb. Schr.* 1927.  
 Schwarz, *Math. Abhandl.*, Bd. **II**, S. 175.  
 Steinhaus, 1. *Bull. Crac.* a) 1913, S. 145, b) 1919, S. 123; 2. *Krak. Abh.* **58** (1918).  
 Szász, 1. *Münch. Sitz. Ber.* 1922; 2. *Acta Math.* **48** (1927).  
 Szegő, *Math. Zeitschr.* **9**, 163 (1921).  
 Titchmarsh, *Math. Zeitschr.* **25** (1926).  
 de la Vallée Poussin, *Bull. Ac. Belg.* 1908, 193.  
 Weierstraß, *Werke*, Bd. **III**, S. 1.  
 Wilbraham, *Camb. Dubl. math. J.* **3** (1848), 198.  
 Young, W. H., 1. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) a) **10**, 254, b) **13**, 13, c) **17**, 195; 2. *Leipz. Ber.* **63** (1911) und *Quart. Journ. Math.* **43**, 161 (1912); 3. *Münch. Sitz.-Ber.* 1911.  
 Zygmund, *Bull. Ac. Crac.* 1925.

## II. Abschnitt.

### Die Klassen Fourierscher Reihen.

#### § 8. Die Funktionsklassen und die zugeordneten Reihenklassen.

Eine Menge von Funktionen  $f(x)$  mit gemeinsamem Definitionsbereich bildet eine lineare Funktionenschar  $\mathfrak{F}$ , wenn a) mit  $f(x)$  auch  $\gamma f(x)$  ( $\gamma$  eine beliebige reelle bzw. komplexe Zahl) zu  $\mathfrak{F}$  gehört, b) nebst  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  auch  $f_1(x) + f_2(x)$  zu  $\mathfrak{F}$  gehört. Ebenso bildet eine Menge von Reihen  $\sum_n U_n$  eine lineare (Reihen-)Schar  $\mathfrak{U}$ , wenn a) mit  $\sum_n U_n$  auch  $\sum_n \gamma U_n$  zu  $\mathfrak{U}$  gehört, b) nebst  $\sum_n U_n^{(1)}$  und  $\sum_n U_n^{(2)}$  auch  $\sum_n (U_n^{(1)} + U_n^{(2)})$  zu  $\mathfrak{U}$  gehört. So bildet die Gesamtheit (Klasse) der  $L$ -integrierbaren Funktionen von der Periode  $2\pi$  eine lineare Schar, ebenso die ihnen zugeordneten F. R. oder die zu diesen K. R.

Eine lineare Schar soll ein linearer metrischer Raum oder Klasse  $\mathfrak{R}^1$ ) heißen, wenn in ihr eine Maßbestimmung festgelegt ist, d. h., wenn jedem Element  $z$  der Schar eine *reelle nicht-negative* Zahl  $\varrho(z)$  zugeordnet wird, so daß

$$(1) \quad a) \varrho(\gamma z) = |\gamma| \varrho(z); \quad b) \varrho(z_1 + z_2) \leq \varrho(z_1) + \varrho(z_2).$$

Auf Grund dieser Maßbestimmung kann  $\varrho(z_1 - z_2)$  als „Abstand“ der beiden Elemente  $z_1$  und  $z_2$  definiert werden, und hieraus resultiert für die Elemente eines solchen Raumes oder Klasse ein Konvergenzbegriff, den wir kurz *Klassenkonvergenz* nennen wollen. Eine Folge  $z_1, z_2, \dots$  von Elementen aus  $\mathfrak{R}$  soll in diesem Sinne gegen  $z$  konvergieren, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(z - z_n) = 0$  ist.

Entsprechend kann man die Gesamtheit der  $z$ , die der Bedingung  $\varrho(z - z_0) < \varepsilon$  genügen, als eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $z_0$  auffassen und hieraus den Begriff des Häufungspunktes und auch die sonstigen Begriffsbildungen der Punktmengentheorie ableiten (vgl. S. 1027 und [4a]). Insbesondere soll eine Teilmenge  $\mathfrak{R}'$  von  $\mathfrak{R}$  in  $\mathfrak{R}$  dicht heißen, wenn zu jedem positiven  $\varepsilon$  und jedem Element  $z$  von  $\mathfrak{R}$  ein Element  $z'$  von  $\mathfrak{R}'$  vorhanden ist, so daß  $\varrho(z - z') < \varepsilon$ . — Eine Klasse oder Raum heißt *vollständig*, wenn  $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \varrho(z_m - z_n) = 0$  nicht nur eine notwendige, sondern auch

*hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Folge  $z_1, z_2, \dots$  gegen ein Element  $z$  ist.* (Über lineare Räume vgl. [4a] und Hahn 3.)

Die vorhin angeführte Schar aller  $L$ -integrierbaren Funktionen  $f$  (mit der Periode  $2\pi$ ) kann zu einer Klasse  $\mathfrak{L}$  gemacht werden, indem man setzt

$$(2) \quad \varrho(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, dt;$$

neben dieser Klasse werden wir noch betrachten<sup>2)</sup>:

1) Wir benutzen hier die Bezeichnung Klasse in etwas anderer Bedeutung als im Abschnitt I und geben diesen Unterschied durch Verwendung verschiedener Typen zu erkennen.

2) Die Funktionen  $f$  werden immer als periodisch mit der Periode  $2\pi$  vorausgesetzt.



1. Die Klasse  $\mathfrak{L}_p$ : die Schar aller  $L$ -integrierbaren Funktionen  $f$ , bei denen noch  $f^p$  ( $p > 1$ ) integrierbar bleibt mit der Maßbestimmung

$$(3) \quad \varrho(f) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Die Klasse  $\mathfrak{B}$ : die lineare Schar aller beschränkten und meßbaren (vgl. S. 1062) Funktionen mit der Maßbestimmung<sup>1)</sup>

$$(4) \quad \varrho(f) = \overline{\sup} |f(t)|.$$

3. Die Klasse  $\mathfrak{S}$ : die Menge (lineare Schar) der stetigen und endlichen Funktionen mit der Maßbestimmung<sup>1)</sup>

$$(5) \quad \varrho(f) = \sup |f(t)|.$$

Jeder der Klassen  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{L}_p$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{S}$  entsprechen zwei Reihen-scharen, die F. R. der Funktionen der Klasse sowie die Schar der dazu K. R. Wenn man zwei Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ , für die  $\varrho(f_1 - f_2) = 0$ , als nicht verschieden ansieht (in der Klasse  $\mathfrak{S}$  sind sie von selbst identisch, während sie sich in den anderen Klassen auch nur in einer Menge vom Maße Null unterscheiden können), so ist diese Zuordnung umkehrbar eindeutig und in bezug auf die linearen Grundoperationen auch isomorph.<sup>2)</sup> Die Scharen der Fourierreihen werden wir dadurch zu Klassen machen, daß wir der Fourierreihe die Maßbestimmung der zugeordneten Funktion in der entsprechenden Klasse beilegen. Wir bezeichnen die Klassen der Fourierreihen mit denselben Buchstaben, wie die entsprechenden Funktionenklassen. Auch die verallgemeinerten Fourierreihen  $U_{dF}$  der Klasse  $\mathfrak{Y}$  bilden eine lineare Schar, und wir machen auch diese zu einer Klasse  $\mathfrak{Y}$  durch die Maßbestimmung

$$(6) \quad \varrho(U_{dF}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |dF|.$$

*Sämtliche von uns betrachteten Klassen sind vollständig.* (Vgl. Hahn 3.) Man darf in sämtlichen Klassen  $f$  bzw.  $F$

1)  $\sup |f(t)|$  bedeutet die obere Grenze von  $|f(t)|$  für sämtliche  $t$ ,  $\sup |f(t)|$  die obere Grenze, wenn man von Mengen vom Maße Null absieht.

2) D. h.  $U_{\gamma f} \equiv \gamma U_f$ ,  $U_{f_1 + f_2} \equiv U_{f_1} + U_{f_2}$ , und dasselbe für die K. R.

komplex setzen, und die F. R. in der Form (E, 8) und (E, 9) annehmen. Wir schreiben dann wie früher  $h$  bzw.  $H$  für  $f$  bzw.  $F$ .

Die Klassenkonvergenz hat in den verschiedenen Klassen eine andere Bedeutung, in der Klasse  $\mathfrak{S}$  fällt sie z. B. mit der gleichmäßigen Konvergenz zusammen. Die Klassen  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{L}_p$ ,  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{V}$  sind in dieser Reihenfolge, wenn man von der Maßbestimmung absieht, jede in der folgenden enthalten, und die Maßbestimmung ist auch so definiert worden<sup>1)</sup>, daß die Klassenkonvergenz in einer Klasse auch die Klassenkonvergenz in jeder folgenden nach sich zieht. Es herrschen gewisse Analogien und Beziehungen zwischen den Klassen  $\mathfrak{L}_p$  und  $\mathfrak{L}_q$  ( $p > 1$ ),  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und dementsprechend für die Grenzfälle  $\mathfrak{V}$  ( $p = 1$ )<sup>2)</sup> und  $\mathfrak{B}$  ( $p = \infty$ ). In diesem Sinne entsprechen sich auch die Klassen  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{S}$ .<sup>3)</sup> Für  $\mathfrak{L}_2$  ( $p = q = 2$ ) fallen die beiden in diesem Sinne zugeordneten Klassen zusammen, und die übrigen gruppieren sich „symmetrisch“ in bezug auf sie. Wir nennen deshalb die Klasse  $\mathfrak{L}_2$ , die diejenigen Funktionen enthält, welche samt ihrem Quadrate  $L$ -integrierbar sind, die *Zentralklasse*. (Vgl. F. Riesz 2, 3, Hahn 3.)

Jede der Klassen  $\mathfrak{V}$ ,  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{L}_p$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{S}$  enthält die trigonometrischen Polynome

$$\tau_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

und allgemeiner alle stetigen Funktionen mit der Periode  $2\pi$ . Die Menge der stetigen Funktionen ist überdies dicht in jeder der Klassen  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{L}_p$  und  $\mathfrak{S}$ , dagegen nicht in  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{V}$ . Hieraus läßt sich für die Klassen  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{L}_p$  analog wie bei  $\mathfrak{S}$  ein Stetigkeitsmaß aufstellen, und zwar setzen wir<sup>4)</sup>

$$(7) \quad \sigma(h) = \varrho_x \{f(x+h) - f(x)\}.$$

1) Bei  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{B}$  bzw.  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{V}$  stimmt auch die Maßbestimmung überein.

2) Es muß daran festgehalten werden (wie es sich aus Betrachtung der unbestimmten Integrale ergibt), daß der Grenzfall von  $\mathfrak{L}_p$  für  $p \rightarrow 1$   $\mathfrak{V}$  und nicht  $\mathfrak{L}$  ist.

3) In mancher Beziehung ist dagegen die Paarung  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{V}$  und  $\mathfrak{S}$  gegeben. Im folgenden zeigen aber  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{S}$  analoges Verhalten, weil sie gerade den Teil von  $\mathfrak{V}$  und  $\mathfrak{B}$  ausmachen, in dem die stetigen Funktionen dicht sind.

4) Der Index  $x$  bei  $\varrho$  bedeutet, daß  $f(x+h) - f(x)$  als Funktion von  $x$  aufzufassen ist.

Dann ist für die Klassen  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{L}_p$  und  $\mathfrak{L}$

$$(8) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = 0.$$

Mit dieser Begriffsbildung kann man in diesen Klassen dem Koeffizientensatz (1, 3) den Ausdruck geben:

$$(9) \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq \sigma\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Wichtiger ist eine andere Koeffizientenabschätzung bei der Zentralklasse  $\mathfrak{L}_2$ , wo sich die Verhältnisse besonders einfach gestalten. Hier läßt sich auch eine besonders elegante Definition der F. R. geben. Die Fourierschen Polynome  $S_n(x)$  der Funktion  $f(x)$  aus  $\mathfrak{L}_2$  sind nämlich diejenigen unter den trigonometrischen Polynomen  $\tau_n(x)$  (höchstens  $n^{\text{ten}}$  Grades), die

$$(10) \quad \varrho(f - \tau_n) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f - \tau_n)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

zum Minimum machen, also die Funktion im Sinne des Klassenabstandes am besten approximieren. Außerdem ist

$$(11) \quad \{\varrho(f - S_n)\}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - \frac{1}{2} \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) \geq 0,$$

und hieraus folgt die als Besselsche Ungleichung bekannte Abschätzung für die Koeffizienten

$$(12) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = 2 \{\varrho(f)\}^2.$$

### § 9. Klassenkonvergenz.

Für die weitere Untersuchung legen wir die (C, 1)-Mittel  $S_n^{(1)}(x)$  der F. R. von  $f(x)$  (die Fejérschen Polynome) zugrunde. Es sei zunächst  $f(x)$  ein Element der Klassen  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{L}_p$  oder  $\mathfrak{S}$ , in denen das Stetigkeitsmaß  $\sigma(h)$  definiert wurde. Aus dem Ausdruck für  $S_n^{(1)}(x)$  folgt unmittelbar

$$\varrho(S_n^{(1)}(x) - f(x)) \leq \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} \sigma(t) dt$$

und wegen (8, 8) weiter (vgl.  $A_0^{(1)}$ , S. 1341)

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(S_n^{(1)}(x)) - f(x) = 0.$$

**Ia.** Es konvergieren für die Klassen  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{L}_p$  und  $\mathfrak{S}$  schon die Fejérschen Polynome gegen  $f(x)$  im Sinne der Klassenkonvergenz.

Also sind schon die trigonometrischen Polynome in diesen Klassen dicht. (Für  $\mathfrak{S}$  ist das der Fejérsche Beweis des bekannten Weierstraßschen Approximationssatzes, vgl. *Rep. I*<sub>1</sub>, S. 36.) In den Klassen  $\mathfrak{Y}$  und  $\mathfrak{B}$  ist dieses Verhalten von vornherein unmöglich; hier läßt sich nur schließen:

**Ib.** In den Klassen  $\mathfrak{Y}$  und  $\mathfrak{B}$  sind die Polynome  $S_n^{(1)}(x)$  im Sinne des Klassenabstandes beschränkt:

$$\varrho(S_n^{(1)}(x)) < \kappa.$$

Genau dasselbe gilt, wenn die  $(C, 1)$ -Mittel durch die höheren Mittel  $(C, k)$  oder ein anderes Summationsverfahren, wie das Poissonsche (allgemeiner jedes, das auf einen positiven Kern führt) ersetzt werden.

Die letzten Sätze gewinnen an Wichtigkeit dadurch, daß sie sich *unter Berücksichtigung der Vollständigkeit der Klassen umkehren lassen* und so die Frage beantworten, wann eine vorgelegte T. R. zu einer bestimmten Klasse gehört. Es gilt nämlich der Satz:

**II.** Bildet man von einer vorgelegten trigonometrischen Reihe die  $(C, 1)$ -Mittel  $S_n^{(1)}(x)$ , so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Reihe F. R.

a) einer der Klassen  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{L}_p$ ,  $\mathfrak{S}$  ist

$$(2) \quad \lim \varrho(S_m^{(1)} - S_n^{(1)}) = 0, \quad \text{wenn } m \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

b) einer der Klassen  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{L}_p$ ,  $\mathfrak{B}$  ist

$$(3) \quad \varrho(S_n^{(1)}) < \kappa.$$

Hier kann statt der  $(C, 1)$ -Mittel auch ein anderes Summationsverfahren in dem oben angegebenen Umfang benutzt werden.

Vgl. für **Ia**, **Ib**, **II**. W. H. und G. C. Young, *Young 2.*, Steinhaus, Hausdorff 1b., Groß, und für die Zentralkl. die Literatur zum Fischer-Rieszschen Satz. Für die Klassen  $\mathfrak{L}_p$  und  $\mathfrak{Y}$  hat F. Riesz 2., 3. aus der Theorie der linearen Funktionaloperationen andere Bedingungen angegeben, damit eine vorgelegte T. R. zu einer dieser Klassen gehört.

Im Zusammenhang mit der Theorie der Potenzreihen einer komplexen Veränderlichen und der Potentialfunktionen ist in zahlreichen Arbeiten die Charakterisierung durch die Fourierkonstanten derjenigen F. R.  $U_{dF}$  aus  $\mathfrak{V}$ ), für die  $F(x)$  monoton ist, angegeben worden. Vgl. Carathéodory, Toeplitz. Auch eine Kennzeichnung der Klasse  $\mathfrak{B}$  ergab sich auf dieser Grundlage. Vgl. Carathéodory und Fejér.

Schwieriger gestaltet sich die Untersuchung, wenn man entsprechende Sätze für die Partialsummen selbst aufstellen will. Hier macht nur die Zentralklasse  $\mathfrak{Q}_2$  eine Ausnahme. Die Minimumseigenschaft der  $S_n$  in (8, 10) ergibt mit Rücksicht auf den Satz **Ia**, daß auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(S_n - f) = 0$ , oder nach (8, 11)

$$(4) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

(4), der sogenannte *Parsevalsche* Satz, wurde für die Klasse  $\mathfrak{Q}_2$  zuerst von Fatou bewiesen. Vgl. [7], [8a], [10], [12a].

Für die Klasse  $\mathfrak{Q}_2$  läßt sich auch in **II**  $S_n^{(1)}$  durch  $S_n$  ersetzen, und man erhält so:

*Fischer-Rieszscher Satz:*  $\varrho(S_n) < \kappa$  (oder, was dasselbe bedeutet, die Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$ ) ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die T. R.  $\sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  zur Klasse  $\mathfrak{Q}_2$  gehört.

Vgl. Riesz 1., Fischer, W. H. und G. C. Young und Schlesinger-Plessner [10].

Die wesentlich tiefer liegende Tatsache, daß auch für die Klassen  $\mathfrak{Q}_p$  ( $p > 1$ ) die Ersetzung von  $S_n^{(1)}(x)$  durch  $S_n(x)$  in den Sätzen **Ia** und **II** gestattet ist, ist erst neuerdings durch M. Riesz 1 nachgewiesen worden, während für die übrigen Klassen diese Ersetzung, wie man leicht zeigt, nicht erlaubt ist. Für die Klasse  $\mathfrak{S}$  folgt das schon aus den Untersuchungen von Du Bois Reymond und Lebesgue (vgl. S. 1355 u. S. 1353), da schon  $\varrho(S_n)$  im allgemeinen nicht beschränkt ist. Auch für die Klasse  $\mathfrak{Q}$  braucht  $\varrho(S_n)$  nicht beschränkt zu sein, vgl. Banach und Steinhaus 1 und Hahn 1, 2. Nach Banach und Steinhaus 2 gibt es sogar eine F. R. der Klasse  $\mathfrak{Q}$ , so daß  $\int_{\alpha}^{\beta} |S_n(x)| dx$  in jedem Intervall  $(\alpha, \beta)$  nicht beschränkt ist. Bei

den Klassen  $\mathfrak{Y}$  und  $\mathfrak{B}$  gilt allgemein nur  $\varrho(S_n) = O(\lg n)$ , bei den Klassen  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{S}$   $\varrho(S_n) = o(\lg n)$ . Bei den letzteren kann man die Klassenkonvergenz der  $S_n$  gegen  $f$  durch gewisse Zusatzbedingungen für  $\sigma(t)$  erreichen. Als solche geben wir hier an (vgl. die Kriterien  $(K_2)$  und  $(K_6)$  S. 1338)

1.  $t^{-1}\sigma(t)$  bei  $t=0$  integrierbar,    2.  $\sigma(t) \log \frac{1}{t} = 0$ .  
 $t \rightarrow 0$

In diesem Zusammenhang sei noch auf eine andere Fragestellung hingewiesen, nämlich auf die Beziehungen zwischen den Stetigkeitseigenschaften der Funktion und der Genauigkeit, mit der sie durch trigonometrische Polynome  $\tau_n(x)$  approximiert werden kann, also zwischen  $\sigma(h)$  und  $\varrho(f - \tau_n)$ . Diese ist in der Literatur eingehend nur für die Klasse  $\mathfrak{S}$  behandelt, wenn auch z. B. für die Zentralklasse die Verhältnisse noch einfacher liegen. Wir erwähnen hier nur ein spezielles, charakteristisches Resultat: Genügt  $f(x)$  der Klasse  $\mathfrak{S}$  der Lipschitz-Bedingung  $\sigma(h) < \kappa h^\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ), so gibt es Polynome  $\tau_n(x)$  mit der Eigenschaft  $\varrho(f - \tau_n) < \frac{\kappa'}{n^\lambda}$ , und umgekehrt, wenn eine solche Approximation möglich ist, so erfüllt die Funktion die Lipschitzsche Bedingung mit demselben Exponenten  $\lambda$ . — Auf eine genauere Darstellung kann hier nicht eingegangen werden, es sei aber für alle diese Fragen bei der Klasse  $\mathfrak{S}$  auf [13] verwiesen.

## § 10. Die Koeffizientensätze und die formalen Operationen bei F. R.

### A. Die Zentralklasse $\mathfrak{L}_2$ .

Die Ausdrücke  $\varrho(S_n)$ ,  $\varrho(S_n^{(1)})$ ,  $\varrho(S_n^{(1)} - S_m^{(1)})$  sind gewisse Funktionen der Fourierkoeffizienten, folglich sind die Sätze des § 9 eigentlich Koeffizientensätze. Aber nur für den Fall der Zentralklasse  $\mathfrak{L}_2$  nehmen sie als solche eine einfache Form an, wie dies der Parsevalsche und der Fischer-Rieszsche Satz zeigen. Diese Klasse ist auch dadurch ausgezeichnet, daß alle für sie bisher abgeleiteten Resultate (die Minimeigenschaft der  $S_n(x)$ , die Besselsche Ungleichung (8, 12), der Parsevalsche (9, 4) und Fischer-Rieszsche Satz) sich in demselben Ausmaße und Form auch auf allgemeine Orthogonalsysteme ausdehnen lassen. (Vgl. S. 1270.) Sie steht auch in engstem Zusammenhang mit dem Hilbertschen Raum aller Folgen  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  mit der Maßbestimmung



$\varrho(x) = \left( \sum_1^{\infty} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , die Konvergenz der Reihe  $\sum x_n^2$  vorausgesetzt (vgl. S. 1273), indem jeder Funktion aus  $\mathfrak{L}_2$  durch ihre Fourierkoeffizienten eine solche Folge entspricht und umgekehrt. Die Parsevalsche Formel zeigt auch die Übereinstimmung der Maßbestimmungen, so daß die Klasse  $\mathfrak{L}_2$  und der Hilbertsche Raum vollständig äquivalent sind. Während (9, 4) ein Analogon des pythagoreischen Lehrsatzes für abzählbar unendlich viele Dimensionen ist, gibt die allgemeinere Form des Parsevalschen Satzes, die aus (9, 4) unmittelbar folgt:

$$(1) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n)$$

wenn  $\alpha_n, \beta_n$  die Fourierkoeffizienten von  $g(x)$  sind, die entsprechende Verallgemeinerung des skalaren Vektorproduktes der beiden „Vektoren“, die von 0 nach  $f(x)$  bzw. von 0 nach  $g(x)$  führen. Man erhält auf diese Weise in der Klasse  $\mathfrak{L}_2$  eine weitgehende und unmittelbare Verallgemeinerung der für endlich viele Dimensionen geläufigen Tatsachen der linearen Algebra. Vgl. hierzu [2], [10], für den Hilbertschen Raum Schmidt.

Die Beweismethoden für die Formeln (9, 4) und (1) benutzen entweder, wie hier geschehen, ein geeignetes Summationsverfahren (mit oder ohne Ausnutzung der Minimumeigenschaft von  $\varrho(f - S_n)$ ) oder stellen die Gültigkeit der Formel (9, 4) für elementare Funktionen  $\chi(x)$  fest, für welche sie unmittelbar folgt, und approximieren dann die allgemeine Funktion  $f$ , so daß  $\varrho(f - \chi)$  beliebig klein wird. Eine auf anderer Grundlage beruhende Beweisaneinanderung ergibt der Entwicklungssatz der Integralgleichungstheorie (vgl. S. 1264). Hierzu sind die  $e^{i\nu x}$  als Eigenfunktionen der Integralgleichung

$$c\chi(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\chi(t) dt = 0$$

zu betrachten und der Entwicklungssatz auf

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) dt$$

anzuwenden. Vgl. Schur, Weyl.

## B. Die Parsevalsche Formel und die formale Multiplikation der F. R.

Die Formel (1) läßt sich auch auf andere Klassen übertragen. So gilt sie nach Young 1, wenn  $f(x)$   $L$ -integrier-

bar,  $g(x)$  von beschränkter Schwankung ist, nach M. Riesz 1, wenn  $f(x)$  zu  $\mathfrak{L}_p$ ,  $g(x)$  zu  $\mathfrak{L}_q$  gehört  $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ . Die Formel (1) gilt auch, wenn (E, 1) eine F. R.  $U_{dF}$  der Klasse  $Y$  ist,  $g(x)$  stetig und von beschränkter Schwankung, und die linke Seite durch  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dF(t)$  ersetzt wird. Gehört

dagegen  $f(x)$  zur Klasse  $\mathfrak{L}$  und ist  $g(x)$  beschränkt, so konvergiert im allgemeinen die Reihe auf der rechten Seite nicht (vgl. Hahn 1, Banach und Steinhaus 1), ist aber (C, 1) summierbar, und ihre Summe stimmt dann mit der linken Seite von (1) überein.

Wendet man die Formel (1) auf die Integrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \cos nt dt, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \sin nt dt,$$

bzw.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cdot e^{-i\nu t} dF(t)$$

an, so ergibt sie, daß in den Fällen, wo sie gültig ist, die F. R.  $U_{fg}$  bzw.  $U_{gdF}$  durch formale Multiplikation der F. R.  $U_f$  bzw.  $U_{dF}$  und  $U_g$  erhalten werden kann, vgl. [7].

### C. Die Integration der F. R.

Die Formel (1) ist ein Spezialfall der allgemeineren ( $\xi, \eta$  endlich)

$$(2) \quad \int_{\xi}^{\eta} f(x) g(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{\xi}^{\eta} g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{\xi}^{\eta} g(x) \cos nx dx + b_n \int_{\xi}^{\eta} g(x) \sin nx dx \right),$$

vgl. Young 1., die unter denselben Voraussetzungen wie (1) gilt. Young hat auch eine wichtige Ausdehnung dieser Formel für  $\eta = \infty$  angegeben. Er setzt voraus: 1.  $f(x)$  zur Klasse  $\mathfrak{L}$  gehörig, 2.  $g(x)$  im Intervall  $(\xi, \infty)$  von beschränkter Schwankung,

d. h.  $\int_{\xi}^{\infty} |dg(x)| < \infty$ , 3.  $g(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ , 4. wenn  $a_0 \neq 0$ ,

die Existenz von  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\xi}^{\eta} g(t) dt$ . Vgl. hierzu auch Hardy. Die Formel (2) gilt auch, wenn (E, 1) eine F. R.  $U_{dF}$  der Klasse  $Y$  ist,  $g(x)$  stetig und von beschränkter Schwankung, und die linke Seite durch  $\frac{1}{\pi} \int_{\xi}^{\eta} g(t) dF$  ersetzt wird. Die Erweiterung für  $\eta = \infty$  erfolgt unter denselben Bedingungen für  $g(x)$  wie vordem.

#### D. Die Klassen $\mathfrak{L}_p$ .

Für die der Zentralklasse verwandten Klassen  $\mathfrak{L}_p$  haben Young<sup>1)</sup> und Hausdorff 1a. auch eine explizite Verallgemeinerung der Besselschen Ungleichung und des Fischer-Rieszschen Satzes angegeben (vgl. hierzu auch F. Riesz 4b, Hardy und Littlewood 2, M. Riesz 2). Um diese zu formulieren, benutzen wir die komplexe Form (E, 8) der F. R. einer Funktion  $h(x)$  und setzen außerdem

$$1 < p \leq 2 \leq q; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \quad C_k = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^k \right)^{\frac{1}{k}};$$

dann lauten die Sätze:

1. Gehört  $h(x)$  zu  $\mathfrak{L}_p$ , so ist  $C_q$  endlich, und es ist  $C_q \leq \varrho(h)$ .

2. Ist  $C_p$  endlich, so ist die Reihe  $(U^*)$  (E, 8) F. R. einer Funktion  $h(x)$  der Klasse  $\mathfrak{L}_q$ , und es ist  $\varrho(h) \leq C_p$ .

Nur im Falle der Zentralklasse ( $p = q = 2$ ) sind diese Sätze die Umkehrung voneinander und ergeben die vollständige Charakterisierung der Klasse mit Hilfe der Fourierkonstanten. Dagegen sind für  $p \neq 2$  die durch  $C_p$  und  $C_q$  gegebenen Maßbestimmungen für die Folge der Fourierkonstanten wenig kennzeichnend für die Klassen  $\mathfrak{L}_p$  und  $\mathfrak{L}_q$ . So gibt es nach Hardy-Littlewood 1. T. R., die überhaupt keine F. R. sind, für die aber  $C_k$  für jedes  $k > 2$  endlich ist, während nach Carleman F. R. stetiger Funktionen existieren, bei denen  $C_k$  für kein  $k < 2$  endlich ist.

Weitere tiefliegende Abschätzungen für Fourierkoeffizienten der Klasse  $\mathfrak{L}_p$  haben Hardy-Littlewood 2 angegeben.

---

1) Die hierauf bezüglichen Arbeiten von Young sind bei Hausdorff 1a zitiert.

## § 11. Die konjugierte Reihe.

Den Sätzen des § 9 über Klassenkonvergenz der  $S_n^{(1)}(x)$  und  $S_n(x)$  bei der F. R.  $U_f$  entsprechen analoge Sätze über  $T_n^{(1)}(x)$  und  $T_n(x)$  bei der K. R.  $V_f$ . Man erhält hier, daß die  $T_n^{(1)}(x)$  dann und nur dann im Sinne des Klassenabstandes konvergieren (bei den Klassen  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{L}_p$ ) oder beschränkt sind (bei den Klassen  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{L}_p$ ,  $\mathfrak{Y}$ ), wenn dasselbe für die Funktionen

$$(1) \quad g_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{x}{n}}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt$$

stattfindet. — Die Bedingung

$$(2) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \varrho(g_n - g_m) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(g - g_n) = 0$$

$$\text{bzw.} \quad \varrho(g_n) < \kappa',$$

wo fast überall auch  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$  ist, ist auf diese Weise notwendig und hinreichend, damit die Reihe  $V_f$  wieder F. R. einer Funktion  $g(x)$  derselben Klasse wie  $f(x)$  ist. Findet dies statt ( $U_f - i V_f$  also eine Fouriersche Potenzreihe), so sind die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  durch die Reziprozitätsformeln verbunden

$$(3) \quad \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \operatorname{ctg} \frac{x-t}{2} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ g(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{ctg} \frac{x-t}{2} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt, \end{aligned}$$

wo die ersten Integrale in jeder Formel als Cauchysche Hauptwerte (*Rep.* **I**<sub>1</sub> S. 492) anzusehen sind und für fast alle  $x$  existieren. Für (3) vgl. die Literaturzusammenstellung bei Titchmarsh.

Die Reziprozitätsformeln (3) gelten auch in demselben Sinn für die Komponenten einer Fourierschen Potenzreihe von  $h(x) = f(x) - i g(x)$  der Klasse *D. P.* (S. 1348), vgl. Plessner 1 und 2b (*Lit.-Verz.* S. 1364).

Nach dem Fischer-Rieszschen Satze ist in der Zentralklasse mit  $U_f$  auch  $V_f$  F. R. einer Funktion dieser Klasse. Dasselbe gilt nach M. Riesz 1., vgl. auch Titchmarsh, für jede der Klassen  $\mathfrak{L}_p$ , so daß in diesen Fällen (2) gilt und von den beiden Formeln (3) eine die eindeutige Auflösung der anderen ist.

Für die Klasse  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{S}$  braucht dagegen  $V_f$  bzw.  $V_{dF}$  nicht F. R. derselben Klasse zu sein (vgl. E, 12).<sup>1)</sup> Bei den Klassen  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{S}$  ist die Integrierbarkeit von  $t^{-1}\sigma(t)$  bei  $t=0$  eine hinreichende Bedingung dafür. Ist darüber hinausgehend  $\sigma(h) < \kappa h^\lambda$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ), so gilt für das Stetigkeitsmaß  $\bar{\sigma}(h)$  der konjugierten Funktion  $g(x)$

$$\bar{\sigma}(h) < \kappa' h^\lambda \quad \text{bzw.} \quad \bar{\sigma}(h) < \kappa' h \log \frac{1}{h},$$

je nachdem  $0 < \lambda < 1$  oder  $\lambda = 1$  ist (vgl. für die Klasse  $\mathfrak{S}$  Priwaloff). Über die Klasse  $\mathfrak{Y}$  gilt der Satz von F. und M. Riesz: Sind die beiden konjugierten Reihen  $U$  und  $V$  F. R. der Klasse  $\mathfrak{Y}$ , so sind sie schon F. R. der Klasse  $\mathfrak{Z}$ , oder anders ausgedrückt, sind in den Reziprozitätsformeln (3) beide Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  von beschränkter Schwankung, so sind sie sogar totalstetig (vgl. auch (insbesondere für einen Beweis) F. Riesz 4a).

#### Literatur zum II. Abschnitt.

- Banach und Steinhaus, 1. *Bull. Crac.* 1918; 2. *Fund. Math.* **9** (1927).  
 Carathéodory, *Palermo Rend.* **32** (1911).  
 Carathéodory und Fejér, *Palermo Rend.* **32** (1911).  
 Carleman, *Acta Math.* **41** (1918), S. 377.  
 Fatou, *Acta Math.* **30** (1906).  
 Fischer, *Compt. Rend.* **144** (1907), 1022 und 1148.  
 Groß, *Wiener Akad. Sitzber.* 1915, S. 1017.  
 Hahn, 1. *Wiener Denkschr.* **93** (1916); 2. *Wiener Akad. Sitzber.* 1918, S. 1763; 3. *Monatsh. Math. Phys.* **32** (1922).  
 Hardy, *Messenger Math.* **51** (1922), S. 186.  
 Hardy und Littlewood, 1. *Acta Math.* **37** (1914); 2. *Math. Ann.* **97** (1927).  
 Hausdorff, *Math. Zeitschr.* **16** (1923), a) S. 163, b) S. 220.  
 Priwaloff, *Bull. Soc. Math. Fr.* 1916.  
 Riesz, F., 1. *Compt. Rend.* **144**, S. 615 und *Gött. Nachr.* 1907; 2. *Math. Ann.* **69** (1910); 3. *Ann. Ec. Norm.* **28** (1911); 4. *Math. Zeitschr.* **18** (1923), a) S. 87, b) 117.  
 Riesz, F. und M., *Stockholmer Kongreßbericht vom Jahre 1916*.  
 Riesz, M., 1. *Math. Zeitschr.* **27** (1927); 2. *Acta Math.* **49** (1927).  
 Schmidt, E., *Palermo Rend.* **25** (1908).  
 Schur, I., *Schwarz's Festschrift* (1914).  
 Steinhaus, *Krak. Abh.* **56** (1916).  
 Titchmarsh, *Math. Zeitschr.* **25** (1926).  
 Toeplitz, *Palermo Rend.* **32** (1911).  
 Weyl, *Math. Ann.* **97** (1927).  
 Young, W. H., 1. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), a) **9** (1911) S. 449, b) **11** (1912) S. 73; 2. *Proc. Roy. Soc. A.* **88** (1913), S. 569.  
 Young, W. H. and G. C., *Quart. Journ. Math.* **44** (1913).

1) Als Beispiel für die Klasse  $\mathfrak{S}$  genügt es, die Reihen (E, 12) gliedweise zu integrieren.

## III. Abschnitt.

**Trigonometrische Reihen von endlichem Exponenten.****§ 12. Die Lokalisationssätze und die restringierten F. R.**

In diesem Abschnitt sind nicht die Integralformeln (E, 3) (S. 1326) und mithin die Funktion  $f(x)$  unser Ausgangspunkt, sondern eine allgemeine T. R. (E, 1), neben der wir auch die K. R. (E, 10) betrachten. Die Voraussetzungen, die für die Untersuchung gemacht werden, betreffen demgemäß Eigenschaften der Reihe  $U$  bzw.  $V$ , wie Koeffizientenabschätzung, Konvergenz, Summierbarkeit usw. Bedeutet  $R$  die Menge der reellen Zahlen  $r$  für die  $a_n = o(n^r)$ ,  $b_n = o(n^r)$ ,  $R'$  die Menge der übrigen Zahlen, so definiert der Schnitt  $(R', R)$  eine reelle Zahl  $\lambda$ , den *Exponenten* der T. R.  $U$  oder  $V$ . Wenn  $R'$  bzw.  $R$  leer ist, setzen wir  $\lambda = -\infty$  bzw.  $\lambda = \infty$ . Wir betrachten im folgenden nur solche T. R.  $U$  und  $V$ , für die  $\lambda < \infty$ , und nennen sie von endlichem (nach oben) Exponenten.<sup>1)</sup> Den Reihen  $U$  und  $V$  von endlichem Exponenten läßt sich eine Folge von Funktionen  $F_r(x)$  in folgender Weise zuordnen. Man betrachte hierzu neben den Reihen  $U = U^{(0)}$  und  $V = V^{(0)}$  die durch (7, 1) gegebenen T. R.  $U^{(r)}$  und  $V^{(r)}$ , die aus  $U$  und  $V$  für  $r > 0$  durch  $r$ -malige gliedweise Integration, für  $r < 0$  durch  $-r$ -malige gliedweise Differentiation entstehen. Die  $F_r(x)$  sind nun die Funktionen, welche zu denjenigen Reihen  $U^{(r)}$ , die F. R. der Klasse  $L$  sind, in der Beziehung  $F_r(x) \sim U^{(r)}$  stehen. Solche Funktionen existieren immer, da nach dem Fischer-Rieszschen Satze  $U^{(r)}$  zur Klasse  $\mathfrak{L}_2$  gehört, wenn  $r > \lambda + \frac{1}{2}$ , während für  $r > \lambda + 1$  die  $F_r(x)$  sogar endlich und stetig sind. Die T. R. von endlichem Exponenten fallen also mit den in § 7 betrachteten differenzierten Reihen zusammen.

**A. Lokalisationstheorie.**

Der weiteren Untersuchung schicken wir einen von Riemann herrührenden *Hilfssatz* voraus, der hier das *Riemann-Lebesguesche Lemma* (1, 1) vertritt: *Ist für die F. R. einer Funktion  $F(x)$  der Klasse  $L$  der Exponent  $\lambda < \gamma^2$ , so gilt das*

1) Diese Annahme hängt eng damit zusammen, daß wir uns im folgenden auf die  $(C, k)$ -Mittel beschränken.

2) Die Schreibweise  $\lambda < \gamma$  bedeutet  $\lambda < \gamma$ , wenn  $\lambda$  zu  $R'$  gehört,  $\lambda \leq \gamma$ , wenn  $\lambda$  zu  $R$  gehört (vgl. oben die Definition von  $\lambda$ ). Der Hilfssatz wird nur für  $\gamma < 0$  seine hauptsächliche Anwendung finden.



gleiche für die F. R. von  $F(x)\chi(x)$ , wenn  $\chi(x)$  mit einigen Ableitungen stetig ist und die Periode  $2\pi$  besitzt, und zwar ist sogar gleichmäßig in  $x$

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\gamma} \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t) \chi(t) \cos n t dt = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\gamma} \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t) \chi(t) \sin n t dt = 0.$$

Setzt man, wenn  $k > \lambda$ :

$$D^{(k)}(n, t) = (C, k) \sum_{m=1}^{n-1} \cos m t, \quad E^{(k)}(n, t) = (C, k) \sum_{m=1}^{n-1} \sin m t,$$

so ist, wenn  $S_n^{(k)}$  bzw.  $T_n^{(k)}$  die  $(C, k)$ -Mittel von  $U$  bzw.  $V$  bedeuten,

$$(2) \quad S_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(x+t) \frac{d^r D^{(k)}(n, t)}{dt^r} dt,$$

$$T_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(x+t) \frac{d^r E^{(k)}(n, t)}{dt^r} dt.$$

Ist  $\nu(t) = 1$  für  $-\delta_1 \leq t \leq \delta_2$ ,  $\nu(t) = 0$  für  $-\pi \leq t < -\delta_1$  und  $\delta_1 < t \leq \pi$ , so darf bei der Zerlegung der Integrale (2) in

der Form  $\frac{(-1)^r}{\pi} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} ( \quad ) dt + \frac{(-1)^r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ( \quad ) (1 - \nu(t)) dt$  (vgl. 1, 9)

der Riemannsche Hilfssatz auf das zweite Integral nicht angewendet werden, da die Funktion  $\nu(t)$  an den Stellen  $-\delta_1$  und  $\delta_2$  einen Sprung aufweist.<sup>1)</sup> Durch Glättung an den Sprungstellen kann man aber eine neue Funktion  $\mu(t)$  mit den folgenden Eigenschaften bilden: a)  $\mu(t)$  und ihre  $q$  ersten Ableitungen sind stetig im Intervalle  $\langle -\delta_1, \delta_2 \rangle$ , b)  $\mu(t) = 1$  für  $-\delta_1' \leq t \leq \delta_2'$ , wo  $\delta_k' < \delta_k$  ( $k = 1, 2$ ), c)  $\mu(t)$  und die  $q$  Ab-

1) Ist aber  $k - r \geq 0$ , so kann man schon mit dem Riemann-Lebesgueschen Lemma (1, 1) auskommen (vgl. § 7).

teilungen verschwinden für  $t = -\delta_1$  und  $t = \delta_2$ .<sup>1)</sup> Wenn  $q$  genügend groß gewählt wird, so ist

$$(3) \quad S_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^r}{\pi} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} F_r(x+t) \frac{d^r D^{(k)}(n, t)}{dt^r} \mu(t) dt + \sigma_n^{(k)}(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{(k)}(x) = 0,$$

$$(4) \quad T_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^r}{\pi} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} F_r(x+t) \frac{d^r E^{(k)}(n, t)}{dt^r} \mu(t) dt + \tau_n^{(k)}(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^{(k)}(x) = \tau(x),$$

wobei die beiden Grenzübergänge gleichmäßig in  $x$  erfolgen. Die  $(C, k)$ -Summierbarkeit der Reihen  $U$  und  $V$  (bei  $U$  auch der Summenwert) hängt also für  $k > \lambda$  nur von dem Verhalten der Funktionen  $F_r$  in der unmittelbaren Umgebung des Punktes  $x$  ab, und noch schärfer: Stimmen für die Reihen  $U_1$  und  $U_2$  die entsprechenden Funktionen  $F_{1r}$  und  $F_{2r}$  in einem Intervall  $\Delta$  überein (bis auf ein Polynom vom Grade  $r-1$ ), so konvergieren die  $(C, k)$ -Mittel der Reihen  $U_1 - U_2$  und  $V_1 - V_2$  gleichmäßig im Innern von  $\Delta$ , und zwar die der ersten gegen 0 (vgl. S. 1336, wo  $\lambda < k = 0$ ,  $r = 0$ ). Für (3) vgl. im Falle  $\lambda < 0$ ,  $k = 0$ ,  $r = 2$  außer Riemann noch Neder 2, für beliebiges  $\lambda$  eine andere Behandlung auf der Grundlage der formalen Multiplikation der T. R. bei Zygmund 1b.

### B. Restringierte F. R.

Eine wichtige Anwendung der Formel (3) für  $\lambda < 0$  hat Fatou 1 gegeben. Seine Überlegung ist später durch Young zur systematischen Theorie der *restringierten* F. R. (Restricted Fourier Series) ausgestaltet worden. Im einfachsten von Fatou betrachteten Falle handelt es sich um folgendes: Es sei in  $U$   $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$ , also  $\lambda < 0$ ; weiß man nun, daß in einem Intervall  $(x_0 - \delta, x_0 + \varepsilon)$  die Funktion

$$F_2(x) = \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t f(u) du + Ax + B$$

1) Setzt man  $\mu(t) = 0$  in  $(-\pi, \pi)$  außerhalb  $(-\delta_1, \delta_2)$ , so wird die Funktion  $\mu(t)$  mit ihren  $q$  ersten Ableitungen in  $(-\pi, \pi)$  stetig sein.

oder  $F_1(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + A$  ist, so ergibt (3) ( $k = 0$ ,  $r = 2$

oder 1) durch partielle Integration, daß das Verhalten der Partialsummen im Punkte  $x_0$  der T. R.  $U$  genau das gleiche ist wie das einer F. R. von  $f(x)^1$  im Punkte  $x_0$ ; die Reihe konvergiert also, wenn  $f(x)$  eins der Konvergenzkriterien ( $K_1$ )—( $K_6$ ) (S. 1338) erfüllt. Insbesondere ist darin der Satz von Fatou (vgl. *Rep. I*<sub>2</sub> S. 778) enthalten (den Fatou in dieser Weise auch bewiesen hatte).

Allgemeiner soll eine T. R.  $U$  vom Exponenten  $\lambda$  eine *restringierte* F. R. vom Exponenten  $\lambda$  für das Intervall  $\Delta$  heißen, wenn eine der Funktionen  $F_r(x)$  in  $\Delta$  das  $r$ -mal iterierte Integral einer Funktion  $f(x)$  ist.<sup>2)</sup> Je nach der Beschaffenheit von  $f(x)$  können wir auch hier von der Klasse  $L$ ,  $L_p$ ,  $B$ ,  $S$  oder auch  $D. P.$  (vgl. S. 1366 u. 1348) sprechen. (Für die Klasse  $Y$  wäre  $F_r(x)$  als das  $r - 1$ -mal iterierte Integral einer Funktion  $F'(x)$  von beschränkter Schwankung vorauszusetzen.) Ebenso sollen die dazu konjugierten Reihen  $V$  als restringierte K. R. für das Restriktionsintervall  $\Delta$  bezeichnet werden. Die Lokalisationsformeln (3) und (4) ergeben dann mittels partieller Integration<sup>3)</sup>, daß die  $(C, k)$ -Mittel der restringierten Reihen  $U$  und  $V$  sich für  $k > \lambda$  (für die Klassen  $Y$  und  $D. P.$  ist aber in jedem Falle  $k \geq 1$  vorauszusetzen) im Restriktionsintervall  $\Delta$  genau so verhalten, wie die  $(C, k)$ -Mittel der entsprechenden F. R.  $U_f$  bzw.  $U_{\Delta F}$  und der K. R.  $V_f$  bzw.  $V_{\Delta F}$ . Auf diese Weise lassen sich die im Abschnitt I (und auch II) für die F. R. und K. R. angegebenen Resultate in entsprechender Form auf die restringierten Reihen ausdehnen. Vgl. Young 2b, 2c, 3a und 3b.

### § 13. Die $C$ -Summierbarkeit der Reihen $U$ und $V$ und das Verhalten der Funktionen $F_r(x)$ .

Für die stetigen Funktionen  $F_r(x)$  ( $r > \lambda + 1$ ) brauchen wir jetzt wieder die in § 7 definierten verallgemeinerten Ableitungen. Wir bezeichnen bei der Funktion  $F_r(x)$  die dort ein-

1) Man darf  $f(x)$  außerhalb  $(x_0 - \delta, x_0 + \varepsilon)$  beliebig ergänzen, wenn nur für sie die  $L$ -Integrierbarkeit gewahrt wird, z. B. gleich 0 nehmen. Das Verhalten der F. R. ist nach dem Lokalisationssatz auf S. 1336 davon unabhängig.

2) Diese Definition ist in der Form etwas von der Youngschen verschieden, indem hier zur näheren Charakterisierung im wesentlichen nur der Exponent  $\lambda$  auftritt.

3) Man wählt  $\mu(t)$  so, daß  $q \geq r$ .

geführten Größen  $\alpha_m, \omega_m(h), \varphi_m(h), \psi_m(h)$ , sobald sie existieren, entsprechend mit  $\alpha_{rm}, \omega_{rm}(h), \varphi_{rm}(h)$  und  $\psi_{rm}(h)$ . Dann gelten die folgenden Sätze, wenn  $k > \lambda$  und  $r > k + 1$ .

$A_k^{(r)}$ . Ist die T. R.  $U$  im Punkte  $x$   $(C, k)$ -summierbar, so existieren die  $\varphi$ -Ableitungen  $\alpha_{r,r}$  von  $F_r(x)$  und es ist

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(k)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_{rr}(h) = \alpha_{rr}.$$

Zusatz: Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n^{(k)}(x)|$  endlich, so gilt das gleiche von  $\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi_{r,r}(h)|$ .

$\bar{A}_k^{(r)}$ . Ist  $S_n^{(k-1)}(x) = o(n)$ , so existieren die  $\varphi$ -Ableitungen  $\alpha_{r,r-2}$  von  $F_r(x)$  und es ist

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \psi_{r,r-1}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} h \varphi_{r,r}(h) = 0.$$

Ist  $k = 0$ , so bedeutet  $S_n^{(-1)} = o(n)$ , daß  $U_n(x) \rightarrow 0$ , was von selbst erfüllt ist, da  $\lambda < 0$ .

$B_k^{(r)}$ . Ist die zu  $U$  K. R.  $V$  im Punkte  $x$   $(C, k)$ -summierbar, so existieren die  $\varphi$ -Ableitungen  $\alpha_{r,r-1}, \alpha_{r,r-3} \dots$  von  $F_r(x)$ . Setzt man noch für  $r = k + 2$   $\alpha_{r-1,m} = \alpha_{r,m+1}$  ( $m = r - 2, r - 4 \dots$ ) und bildet für  $F_{k+1}(x)$  den Ausdruck  $\psi_{k+1,k+1}(h)$ , so ist neben  $t^{-1}\psi_{r,r}(t)$  auch  $t^{-1}\psi_{k+1,k+1}(t)$  bei  $t = 0$  eigentlich integrierbar, und es ist

$$(3) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(k)}(x) &= \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi_{k+1,k+1}(t)}{t} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi_{r,r}(t)}{t} dt, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \psi_{rr}(h) = 0. \end{aligned}$$

Um  $A_k^{(r)}$  und  $B_k^{(r)}$  mit den Sätzen  $A_r^{(k)}$  und  $B_r^{(k)}$  des § 7 in Verbindung zu bringen, definieren wir (Hardy-Littlewood 3): Eine Reihe heißt  $C$ -summierbar, wenn ein  $k$  so existiert, daß ihre  $(C, k)$ -Mittel gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren, und gewinnen hiermit die Sätze:

I. Damit die T. R.  $U$  von endlichem  $\lambda$ -Exponenten im Punkte  $x$   $C$ -summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß es ein  $r$  so gibt, daß in  $x$  die  $r$ te  $\varphi$ -Ableitung  $\alpha_{rr}$  von  $F_r(x)$  existiert.

**II.** Damit die zu  $U$  K. R.  $V$  im Punkte  $x$   $C$ -summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß es ein  $r$  so gibt, daß in  $x$  die  $(r-1)^{te}$   $\varphi$ -Ableitung  $\alpha_{r,r-1}$  von  $F_r(x)$  und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\psi_{r,r}(t)}{t} dt$$

existieren.

Ist  $W$  (E, 11) eine allgemeine Potenzreihe (von endlichem Exponenten), und bildet man die Reihen  $W^{(r)} = U^{(r)} - iV^{(r)}$  und für  $r > \lambda + \frac{1}{2}$  die Funktionen  $F_r(x) \sim U^{(r)}$ ,  $G_r(x) \sim V^{(r)}$ ,  $H_r(x) = F_r(x) - iG_r(x) \sim W^{(r)}$ , so kann man durch Kombination der Sätze I und II vier Bedingungen mittels der  $\varphi$ -Ableitungen der Funktionen  $F_r$ ,  $G_r$  und  $H_r$  angeben, von denen jede zugleich notwendig und hinreichend für die  $C$ -Summierbarkeit der Potenzreihe  $W$  in einem Punkte ist. Diesen fügen wir noch eine fünfte hinzu, die sich auch unmittelbar aus dem früheren ergibt.

**III.** Damit die Potenzreihe  $W$  (E 11) in einem Punkte  $x$   $C$ -summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß 1. sie von endlichem  $\lambda$ -Exponenten ist, 2. es ein  $r$  so gibt, daß die  $r^{te}$   $\omega$ -Ableitung von  $H_r(x)$  existiert.

Für die hier gegebenen Sätze vgl. für  $A_k^{(r)}$  und  $\bar{A}_k^{(r)}$  (für  $k=0$ ,  $r=2$ ) Riemann 1, von Lehrb. [5], [7], [8], [12a], [14], für die hier gegebenen allgemeineren Sätze sowie für  $B_k^{(r)}$  und I, II, III eine noch zu erscheinende Abhandlung des Verfassers. Für die  $C$ -Summierbarkeit der Potenzreihe haben Hardy-Littlewood 3 eine andere Lösung gegeben (Rep. I<sub>2</sub> S. 773).

Setzt man  $U$  als die F. R. von  $f(x)$  voraus, so gehen  $\varphi_{r,r}(h)$  bzw.  $\psi_{r,r}(h)$  in  $\varphi_r(h)$  bzw.  $\psi_r(h)$  (vgl. (7, 9)) über, und somit ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die  $C$ -Summierbarkeit der F. R. bzw. der K. R. das Erfülltsein einer der G. B. ( $P_r$ ) S. 1361 bzw. die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\psi_r(t)}{t} dt.$$

In anderer Weise geben Hardy und Littlewood 3 und 4 die Lösung dieses Problems für F. R. und K. R. der Klasse  $D. P.$  vom Exponenten  $\lambda < 0$ .

## § 14. Konvergenz- und Divergenzerscheinungen bei T. R.

## A. Die Partialsummen.

Nachdem schon Riemann die Behauptung aufgestellt hatte, daß im Falle, wo nicht  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$  ( $\lambda < 0$ ), die Reihe  $U$  nur für besondere Werte von  $x$  konvergieren kann, ist diese Frage durch die Arbeiten von Cantor 1a, 2a, Lebesgue (vgl. auch [7]) und Young 1 dahin beantwortet worden, daß diese besonderen Werte höchstens eine Menge vom Maße Null (Lebesgue) oder eine Menge von der ersten Kategorie<sup>1)</sup> (Young) bilden können. In Verallgemeinerung des Lebesgueschen Resultats zeigt Steinhaus 2, daß allgemein für fast alle  $x$

$$(1) \quad \overline{\lim} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \overline{\lim} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

In ähnlicher Richtung beweist De la Vallée Poussin [12b] in Verallgemeinerung eines Satzes von Young, daß, wenn die  $a_n$  und  $b_n$  nicht beschränkt sind, die Partialsummen der T. R. fast überall nicht beschränkt sind.

Die Bedingung  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$  ist jedoch wenig einschränkend für die Konvergenz der Reihen. So geben Lusin 1 für Potenzreihen, Steinhaus 1 für T. R. Beispiele überall divergenter Reihen (mit Exponenten  $\lambda < 0$ ), und Neder 1 zeigt (vgl. auch Rajchman 1), daß die Divergenzpunkte Mengen von beliebigem Maß bilden können. Dies gilt nicht mehr, wenn man diejenigen Punkte betrachtet, wo die Reihe *absolut* konvergiert. Man hat nämlich den Satz: Ist die Menge der Punkte absoluter Konvergenz von positivem Maß, so konvergiert schon

die Reihe  $\sum_1^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  (vgl. Lusin 2, Denjoy 1, Fatou 2).

B. Die  $(C, k)$ -Mittel.

Der Bedingung  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$  entspricht hier die Bedingung

$$a_n = o(n^k), \quad b_n = o(n^k),$$

von der auch das schon oben für  $k = 0$  Gesagte gilt. Daraus folgt, daß eine T. R., die auf einer Menge von positivem Maß

1) Eine Menge von der ersten Kategorie heißt nach Baire eine Vereinigung von abzählbar unendlich vielen nirgends dichter Mengen (S. 1028), eine Menge von der zweiten Kategorie eine solche, die nicht von der ersten ist.



oder von der zweiten Kategorie<sup>1)</sup>  $C$ -summierbar ist, von endlichem Exponenten ist. Es gibt aber nach Hardy-Littlewood 1, 2 T. R. mit Exponenten  $\lambda < 0$ , die in keinem Punkte  $C$ -summierbar sind. Für die positiven Sätze über Konvergenz und Summierbarkeit der T. R. vgl. § 6 und § 7

### § 15. Darstellbarkeit durch eine T. R. Eindeutigkeitssätze.

Das in der Einleitung berührte allgemeine Problem der Darstellbarkeit einer Funktion durch eine T. R., dem wir dort aus dem Wege gingen, indem wir uns von vornherein auf F. R. beschränkten, verdankt seine Förderung und weitere Entwicklung Riemann. Riemann stellte sich zur Aufgabe, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine solche „darstellbare“ Funktion  $f(x)$  zu finden und formulierte dies noch spezieller mit den Worten: „Wenn eine Funktion durch eine T. R. darstellbar ist, was folgt daraus über ihren Gang, über die Änderung ihres Wertes bei stetiger Änderung des Arguments?“ Er findet als notwendige Bedingungen die Sätze  $A_0^{(2)}$  und  $\bar{A}_0^{(2)}$  des § 13 für die Funktion  $F_2(x)$ , sowie eine weitere, die zum Ausdruck bringt, daß die T. R. vom Exponenten  $\lambda < 0$  sein soll. Versteht man wie Riemann unter der Darstellbarkeit die Konvergenz der Reihe zum Funktionswert, so scheint diese Fragestellung, Bedingungen für die Funktion  $f(x)$  zu finden, die zugleich notwendig und hinreichend wären, ziemlich unzugänglich zu sein. Erweitert man aber den Begriff der Darstellbarkeit in der Weise, daß man *statt der Konvergenz die  $C$ -Summierbarkeit* der Reihe zum Funktionswert setzt, so lassen sich dem Satze I des § 13 solche Bedingungen entnehmen.

Der Problemstellung Riemanns entspringen naturgemäß auch folgende Fragen:

1. Cantor: Können zwei verschiedene Reihen überall (oder mit Ausnahme von gewissen Punkten) dieselbe Funktion darstellen?

2. Du Bois Reymond: Ist eine T. R., die überall (oder mit Ausnahme von gewissen Punkten) eine integrierbare Funktion darstellt, die F. R. dieser Funktion, d. h. läßt sich die gliedweise Integration zur Koeffizientenbestimmung (S. 1326) legitimieren?

---

1) Vgl. Anm. 1, S. 1383.

Wir werden diese Fragen behandeln, indem wir den oben erweiterten Begriff der Darstellbarkeit als *C-Summierbarkeit* zugrunde legen. Für Potenzreihen läßt sich die Frage 1 besonders einfach und vollständig beantworten. Aus einem Satz von Lusin und Privaloff folgt nämlich:

*Stellen zwei Potenzreihen auf einer Menge von positivem Maß dieselbe Funktion dar, so sind sie identisch.*

Bei den T. R. ist, wie schon aus der Möglichkeit der Darstellung einer „willkürlichen“ Funktion durch die F. R. folgt, von vornherein klar, daß die Übereinstimmung der dargestellten Funktionen fast überall vorausgesetzt werden muß, daß also die zulässigen Ausnahmepunkte höchstens eine Menge vom Maße Null bilden dürfen. Jedoch können die untereinander eng verbundenen Fragen 1 und 2 bei T. R. noch nicht erschöpfend beantwortet werden. Im Anschluß an Cantor 1 b, 2 b und Du Bois Reymond spielen hier gewisse Sätze über die zweite verallgemeinerte Ableitung eine entscheidende Rolle. Es sei

a)  $F(x)$  eine in einem Intervall stetige und endliche Funktion und wie in § 7

$$\varphi_2(h) = \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2},$$

$$\psi_1(h) = \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{2h},$$

b) überall im Intervall  $\lim_{h \rightarrow 0} \psi_1(h) \leq 0 \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \psi_1(h)$ ,

c) die Mengen, wo  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_2(h) = +\infty$  oder  $-\infty$ , abzählbar.

Es gelten dann die Sätze (vgl. [12 b]):

1. Ist für  $F(x)$  fast überall  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_2(h) \leq 0 \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \varphi_2(h)$ , so ist  $F(x) = Ax + B$ .

2. Ist fast überall  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_2(h) \leq f(x) \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \varphi_2(h)$  und  $f(x)$  integrierbar ( $L$  oder  $D. P.$ ), so ist

$$F(x) = \int_{\xi}^x dt \int_{\xi}^t f(u) du + Ax + B.$$

Um diese Sätze in Verbindung mit den Sätzen  $A_k^{(r)}$  und  $\overline{A}_k^{(r)}$  des § 13 zur Anwendung zu bringen, muß  $F_2(x)$  die oben für  $F(x)$  vorausgesetzten Eigenschaften a), b), c) besitzen. Wir be-

schränken uns demgemäß auf T. R., die entsprechend diesen drei Eigenschaften von  $F_2(x)$  folgende Bedingungen erfüllen:

$\alpha)$  die Reihe  $U^{(2)}$  ist F. R. der stetigen Funktion  $F_2(x)$ ,

$\beta)^1)$  es ist überall  $C - \sum_{k=1}^{n-1} U_k(x) = o(n)$ ,

$\gamma)^1)$  mit Ausnahme einer abzählbaren Menge ist

$$\overline{\lim} \left| C - \sum_{k=1}^{n-1} U_k(x) \right|$$

endlich. Solche T. R. nennen wir kurz *primitiv*. In dem klassischen Fall, wo  $\lambda < 0$ , sind  $\alpha)$  und  $\beta)$  von selbst erfüllt.

b) folgt aus  $\beta)$  in Verbindung mit  $\overline{A}_k^{(r)}$  und der Beziehung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \psi_{2,1}(h) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \psi_{r,r-1}(h) \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \psi_{2,1}(h),$$

c) aus  $\gamma)$  in Verbindung mit dem Zusatz zu  $A_k^{(r)}$ .

Die Fragen 1 und 2 werden durch folgende Sätze beantwortet<sup>2)</sup>:

**I.** *Stellen zwei primitive T. R. fast überall dieselbe Funktion dar, so sind sie identisch.*

**II.** *Stellt eine primitive T. R. fast überall eine integrierbare (L oder D. P.) Funktion  $f(x)$  dar, so ist sie die F. R. von  $f(x)$ .*

**I** bzw. **II** folgt aus **1** bzw. **2** in Verbindung mit  $A_k^{(r)}$  und der Beziehung  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_{2,2}(h) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_{r,r}(h) \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \varphi_{2,2}(h)$  für  $r > 2$ .

Für die Sätze **I** und **II** vgl. Cantor 1b, 2b, Du Bois Reymond, Hölder, Lebesgue, F. Bernstein, Young 1, 2a, M. Riesz, De la Vallée Poussin, [12] und insbesondere Zygmund 1c, der übrigens etwas allgemeiner das Poissonsche Verfahren zugrunde legt.

Die Bedingung der Integrierbarkeit für  $f(x)$  ist im Satz **II** wesentlich. So gibt es überall konvergente T. R., die keine F. R. sind, also keine integrierbaren Funktionen darstellen (vgl. z. B. die Reihe  $V$  (E, 12) und Perron). Für diese Funktionen hat

1) Bedeutet: es gibt ein  $k$ , so daß  $S_n^{(k)}(x) = o(n)$  bzw.  $\overline{\lim} |S_n^{(k)}(x)|$  endlich ist.

2) Diese Sätze sind im Falle, daß die Reihe überall konvergiert, schon von Riemann als gültig angesehen worden.

Denjoy 2 einen Doppelintegrationsprozeß angegeben, der die Koeffizientenbestimmung gestattet.

Wir sagen von einer T. R.  $U$ , sie sei primitiv in einem Intervall  $\Delta$ , wenn die T. R.  $U^{(2)}$  restringierte F. R. einer stetigen Funktion in  $\Delta$  ist (vgl. S. 1380) und außerdem für  $U$  in  $\Delta$  die Bedingungen  $\beta$ ) und  $\gamma$ ) erfüllt sind. Die Sätze I und II lassen dann folgende Verallgemeinerung zu:

**I\*.** *Stellen zwei in einem Intervall  $\Delta$  primitive T. R. fast überall in  $\Delta$  dieselbe Funktion dar, so ist ihre Differenz in jedem ganz in  $\Delta$  gelegenen Intervall gleichmäßig gegen Null  $(C, k)$ -summierbar  $(k > \lambda)$ .*

Der Satz I\* zeigt, daß unter allgemeinen Bedingungen die  $(C, k)$ -Summierbarkeit  $(k > \lambda)$  der T. R. in einem Punkte nur von den Werten der dargestellten Funktion in der unmittelbaren Umgebung des Punktes abhängt, eine Behauptung, die sich für  $\lambda < 0$  schon bei Riemann unter Vorwegnahme späterer Ergebnisse findet.

**II\*.** *Stellt eine in einem Intervall  $\Delta$  primitive T. R. fast überall in  $\Delta$  eine integrierbare Funktion  $f(x)$  dar, so ist sie eine restringierte F. R. von  $f(x)$  in dem Restriktionsintervall  $\Delta$ .*

In dem klassischen Fall  $\lambda < 0$ , also  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$ , sind neuerdings für den Eindeutigkeitsatz I wesentliche Erweiterungen gewonnen worden. Wie Rajchman 2, 3 und Bary gezeigt haben (vgl. auch Zygmund 1a), kann man die Voraussetzung der **Abzählbarkeit** der in der Bedingung  $\gamma$ ) vorkommenden Menge fallen lassen und gewisse nicht abzählbare Mengen, insbesondere perfekte Mengen  $H$  von besonderer Struktur (z. B. die Cantorsche Menge auf S. 1032) sowie abzählbare Vereinigungen solcher  $H$ -Mengen zulassen, ohne die Gültigkeit des Satzes I zu beeinträchtigen. Andererseits hat Menschoff gezeigt, daß es perfekte Mengen vom Maße Null gibt, für welche diese Ersetzung nicht mehr statthaft ist. Die Frage nach der Beschaffenheit der allgemeinsten in  $\gamma$ ) zulässigen Mengen (Eindeutigkeitsmengen) ist jedoch hiermit nicht beantwortet. Bei den Beweisen von Rajchman und Bary spielt die Theorie der formalen Multiplikation der T. R. (vgl. S. 1373) eine wichtige Rolle. Für diese vgl. Rajchman 1, 3, Zygmund 1b.

#### Literatur zum III. Abschnitt.

- Bary, *Fund. Math.* 9 (1927).  
 Bernstein, F., *Leipz. Ber.* 60 (1908).  
 Du Bois Reymond, *Münch. Abh.* 1875.

- Cantor, 1. *J. f. Math.* **72** (1870), a) S. 130, b) S. 139; 2. *Math. Ann.* a) **4** (1871), b) **5** (1872), 123.
- Denjoy, *Compt. Rend.* a) **155** (1912), 135, b) **172** (1921), 653, 833, 903, 1218, **173**, 127.
- Fatou, 1. *Acta Math.* **30** (1906); 2. *Bull. Soc. Math. Fr.* **41** (1913), 47.
- Hardy-Littlewood, 1. *Acta Math.* **37** (1914); 2. *Proc. Nat. Ac. Sc.* 1916; 3. *Math. Zeitschr.* **19** (1924); 4. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **24** (1925).
- Hölder, *Math. Ann.* **24** (1884).
- Lebesgue, *Ann. Ec. Norm.* (3) **20** (1903).
- Lusin, 1. *Pal. Rend.* **32** (1911); 2. *Compt. Rend.* **155** (1912), 580.
- Lusin und Privaloff, *Ann. Ec. Norm.* **42** (1925).
- Menschoff, *Compt. Rend.* **163** (1916), 433.
- Neder, 1. *Z. Theor. d. T. R.*, Diss., Göttingen (1919); 2. *Math. Ann.* **84** (1921).
- Perron, *Math. Ann.* **87** (1922).
- Rajchman, 1. *Compt. Rend.* Warschau 1918; 2. *Fund. Math.* **3** (1922) und **4** (1923); 3. *Math. Ann.* **95** (1926).
- Riemann, *Werke*, S. 227 (2. Aufl.).
- Riesz, M., *Math. Ann.* **71** (1911).
- Steinhaus, 1. *Compt. Rend.* Warschau 1912; 2. *Wiad. matem.* **24** (1920) (polnisch).
- de Vallée Poussin, *Bull. Ac. Belg.* **14** (1912), 702 und **15** (1913), 9.
- Young, W. H., 1. *Messeng. Math.* **38** (1908) S. 44; 2. *Proc. Lond. Roy. Soc.* a) **89** (1913), 150, b) **93** (1917), 276, c) **95** (1918), 22; 3. *Proc. Lond. Math. Soc.* **17** (1918) a) S. 195, b) S. 353.
- Zygmund, *Math. Zeitschr.* a) **24** (1926), 40, b) **24**, 47, c) **25** (1926) 274.

## Anhang.

### A. Das Fouriersche Integral.

Läßt man in den T. R. (E, 1) bzw. (E, 8) die Summierung über den Index kontinuierlich werden, so kommt man zum trigonometrischen Integral

$$(1) \quad J \equiv \int_0^{\infty} (a(v) \cos vx + b(v) \sin vx) dv$$

bzw. 
$$J^* \equiv \int_{-\infty}^{\infty} c(v) e^{i vx} dv.$$

Ein solches heißt wieder ein Fouriersches Integral, wenn

$$(2) \quad a(v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos vt dt,$$

$$b(v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin vt dt,$$

bzw. 
$$c(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\nu t} dt,$$

und wir schreiben hier wieder

$$\begin{aligned} (3) \quad f(x) &\sim \int_0^{\infty} (a(\nu) \cos \nu x + b(\nu) \sin \nu x) d\nu \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \nu(t-x) dt. \end{aligned}$$

Die Konvergenz. Für die Untersuchung von

$$\begin{aligned} (4) \quad J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^n d\nu \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \nu(t-x) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^n d\nu \int_0^{\infty} \varphi(t) \cos \nu t dt \end{aligned}$$

in einem Punkte  $x$  für  $n \rightarrow \infty$ <sup>1)</sup> ist außer dem Verhalten von  $f(t)$  im Punkte  $x$  noch dasjenige für  $t = \pm \infty$  maßgebend. Macht man über dieses geeignete Annahmen, wie z. B. ( $\xi > 0$  beliebig groß wählbar)

a) (Jordan)  $\int_{\xi}^{\infty} |f(t)| dt$  und  $\int_{-\infty}^{-\xi} |f(t)| dt$  endlich,

b) (Pringsheim)  $\int_{\xi}^{\infty} |df(t)|$  und  $\int_{-\infty}^{-\xi} |df(t)|$  endlich und

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$  für  $x \rightarrow \pm \infty$ , so ist das Verhalten von  $J_n(x)$  identisch mit dem der Partialsummen der F. R. von  $f(x)$ , also gelten auch für die Konvergenz die im § 2 und § 3 entwickelten Sätze mit den Konvergenzkriterien  $(K_1)$ — $(K_6)$ . Vgl. Pringsheim, Young 1 und Hobson [5].

Summierbarkeit. Sind die Bedingungen a) oder b) für  $t = \pm \infty$  erfüllt, so hängt die Summierbarkeit a fortiori nur von dem Verhalten von  $f(t)$  in  $x$  ab, und zwar sind hier für die Gültigkeit der Summationssätze nur die entsprechenden G. B. vorauszusetzen (vgl. §§ 2, 3).

1)  $n$  ist hierbei als *kontinuierliche* Variable gedacht, durchläuft also alle reellen Zahlen.



Als Summationsmethoden geben wir an

$$(5) \quad J_n^{(*)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^n \left(1 - \frac{v}{n}\right)^x dv \int_0^\infty \varphi(t) \cos vt dt, \quad n \rightarrow \infty^1)$$

$$(6) \quad J^{(P)}(h, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-hv} dv \int_0^\infty \varphi(t) \cos vt dt, \quad h \rightarrow 0$$

$$(7) \quad J^{(W)}(h, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-h v^2} dv \int_0^\infty \varphi(t) \cos vt dt, \quad h \rightarrow 0$$

Für (5), das den  $(C, k)$ -Mitteln entspricht, vgl. Plancherel 1, 2, Hahn 2 und Jacob. (6) entspricht dem Poissonschen, (7) dem Weierstraßschen Verfahren bei T. R. Vgl. hierfür Sommerfeld, Hardy 1 und Hahn 1. Vgl. auch [5].

Die Reziprozitätsformeln. Erfüllt  $f(x)$  neben a) und b) eins der Konvergenzkriterien, so kann man in der Zuordnung (3)  $\sim$  durch  $=$  ersetzen. Spezialisiert man noch die Formel auf eine gerade bzw. ungerade Funktion, so erhält man (*Fouriersches Integraltheorem*)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos vx dv \int_0^\infty f(t) \cos vt dt$$

bzw. 
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin vx dv \int_0^\infty f(t) \sin vt dt$$

und hieraus die reziproken Formeln

$$(8) \quad g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos xt dt, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(t) \cos xt dt$$

und ebenso für sin. In komplexer Schreibweise ergibt sich entsprechend

$$(9) \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty h(t) e^{-itx} dt, \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty g(t) e^{itx} dt.$$

1) Vgl. Fußnote 1 auf S. 1389.

Verallgemeinerung. Eine allgemeinere Form des trigonometrischen Integrals ist

$$J \equiv \int_0^{\infty} (\cos vx dA(v) + \sin vx dB(v)),$$

wo im Fourierschen Falle

$$A(v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin vt}{t} dt, \quad B(v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1 - \cos vt}{t} dt$$

ist. Die Gültigkeitsbedingungen der Fourierschen Integralformel werden dadurch erweitert. Vgl. Weyl 1 und Hahn 3. Insbesondere für die Theorie der reziproken Beziehungen (8) und (9) ist diese Verallgemeinerung von Bedeutung, indem sie auf solche Fälle ausgedehnt werden kann, wo die frühere Darstellung versagt. Ist  $f(t)$  so beschaffen, daß  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$  endlich ist, so ist (8) durch

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} f(t) \frac{\sin xt}{t} dt, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} g(t) \frac{\sin xt}{t} dt$$

zu ersetzen, wo  $g(x)$  wieder dieselbe Bedingung wie  $f(t)$  erfüllt. Vgl. hierzu Plancherel 1, Titchmarsh 1, 2, Hahn 3, F. Riesz. Für Darstellung durch trigonometrische Integrale vgl. noch Bochner 1c und Wiener. Für das *allgemeine* trigonometrische Integral vgl. Zygmund und die dort angegebene Literatur.

### B. Poissonsche Summationsformel.

Genügt  $g(x)$ , das als nicht periodisch vorausgesetzt wird, im Endlichen Bedingungen, die für die Konvergenz der F. R. hinreichen, so folgt unmittelbar aus der Konvergenzuntersuchung des § 2 (und § 3), daß

$$\begin{aligned} (10) \quad \frac{1}{2} g(0) + \sum_{k=1}^{n-1} g(2\pi k) + \frac{1}{2} g(2\pi n) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^n g(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^n g(t) \cos kt dt. \end{aligned}$$

Aus dieser Poisson-Dirichletschen Summenformel kann durch partielle Integration (unter Voraussetzung, daß  $g$  genügend oft

differenzierbar ist) die Euler-Maclaurinsche Summenformel (S. 1206) abgeleitet werden. In (10) kann aber ähnlich wie in (10, 2)  $n = \infty$  gesetzt werden, wenn  $g(x)$  nur für  $x \rightarrow \infty$  gewissen Bedingungen genügt, und zwar reichen hier wieder die dort (S. 1373—1374) für  $g(x)$  angegebenen Bedingungen aus. Dies folgt unmittelbar, wenn man (10, 2) für die Klasse  $Y$  mit  $F(x) = \frac{x}{2} + \sum \frac{\sin nx}{n}$  benutzt (vgl. auch [2]). Die Formel (10) bekommt dann die Gestalt

$$(11) \quad \left\{ \frac{1}{2} g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} g(2\pi k) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \left( \frac{1}{2} f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \right),$$

wo  $g(x)$  und  $f(x)$  ein Paar reziproker Funktionen (8) sind.<sup>1)</sup>  
In der Formel (11), die sich in komplexer Form<sup>2)</sup> auch

$$(12) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i v t} dt$$

schreiben läßt, hat man ein allgemeines Transformationsprinzip für Reihen, das sich für verschiedene Probleme der analytischen Zahlentheorie als besonders fruchtbar erwiesen hat. Insbesondere sei aus diesem Problemkreis genannt: die Transformation der Thetafunktion (*Rep.* **I**<sub>2</sub> S. 783—786 und S. 810—812), die Summierung der Gaußschen Reihen (vgl. Kap. XXVII), die Herleitung der Funktionalgleichung der  $\zeta$ -Funktion (vgl. S. 1207 und Kap. XXVII). Es sei aber erwähnt, daß die Youngsche Formel (10, 2) für  $\eta = \infty$ , von der (11) und (12) gewissermaßen Spezialfälle darstellen, auch direkt verwendbar ist, so zeigt Hardy 2, daß aus (10, 2) direkt die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion gefolgert werden kann.

### C. Fastperiodische Funktionen.

In der bei der Bildung der F. R. (E, 8) entstehenden Zerlegung der Funktion in ihre „harmonischen“ Komponenten  $c_v e^{i v x}$  war die Periodizität dadurch gekennzeichnet, daß sämtliche  $v$  ganze Zahlen waren (ganze Vielfache der „kleinsten Frequenz“ 1). Man kann allgemeiner nach denjenigen Funktionen fragen, die sich

1) Aus diesem Zusammenhange ist die Formel mittels Poisson-scher Summierung von Cauchy aufgestellt worden.

2) Die Formel findet sich in dieser Form im Nachlaß von Gauß (Werke VIII, S. 88).

durch Superposition von Schwingungen der Form  $c_\lambda e^{i\lambda x}$  charakterisieren lassen, wobei aber  $\lambda$  der einzigen Beschränkung, reell zu sein, unterworfen wird. In dieser Richtung ist es neuerdings Bohr gelungen, durch eine Erweiterung des Periodizitätsbegriffs eine wichtige und in sich abgeschlossene Funktionsklasse zu umgrenzen und auf diese Weise eine weitgehende Verallgemeinerung der F. R. zu gewinnen.

Wir sagen,  $\tau$  ist eine  $\varepsilon$ -Periode einer für alle reellen  $x$  definierten und stetigen Funktion  $f(x)$ , wenn für sämtliche  $x$   $|f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon$  ist, und nennen mit Bohr 1a die Funktion  $f(x)$  *fastperiodisch*, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $l(\varepsilon)$  existiert, so daß in jedem Intervall von der Länge  $l$  mindestens eine  $\varepsilon$ -Periode enthalten ist. Die fastperiodischen oder Bohrschen Funktionen sind beschränkt und gleichmäßig stetig auf der ganzen reellen Achse. Ferner ist die Summe und das Produkt zweier fastperiodischer Funktionen wieder fastperiodisch. Die Isolierung der einzelnen Schwingungen  $c_\lambda e^{i\lambda x}$  geschieht hier durch die Mittelbildung

$$(13) \quad c_\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\lambda t} dt = M(f(t) e^{-i\lambda t}).$$

Dieser Mittelwert, der für die fastperiodischen Funktionen immer existiert, ist nur für abzählbar viele  $\lambda$  von Null verschieden, und die mit diesen  $c_\lambda$  gebildete Reihe

$$(14) \quad f(x) \sim \sum_{\lambda} c_\lambda e^{i\lambda x}$$

heißt wieder die F. R. von  $f(x)$ . Die bisher über die allgemeinsten F. R. (14) erzielten Ergebnisse sind den Sätzen des II. Abschnittes analog, beziehen sich also nach Wahl einer Maßbestimmung auf eine Art Klassenkonvergenz.

I. Hauptsatz. Als Maßbestimmung sei gewählt

$$(15) \quad \varrho_2(f) = \sqrt{M(f^2)}.$$

Wegen der Orthogonalitätseigenschaft der  $e^{i\lambda x}$  ( $M(e^{i\lambda x} e^{-i\mu x}) = 0$ , für  $\lambda \neq \mu$ ) überträgt sich hier ohne weiteres die Minimumseigenschaft der Partialsummen der F. R. sowie die Besselsche Ungleichung bei der Klasse  $\mathfrak{Q}_2$  (vgl. S. 1368), dagegen sind bei dem auch hier geltenden Hauptergebnis, der Klassenkonvergenz (in bezug auf die Maßbestimmung (15)) der Partialsummen der F. R. (14) gegen  $f(x)$ , oder anders ausgedrückt

$$(16) \quad \{\varrho_2(f)\}^2 = M(f^2) = \sum_{\lambda} |c_{\lambda}|^2 \quad (\text{Parsevalscher Satz})$$

die bei der Klasse  $\mathfrak{L}_2$  üblichen Methoden nicht anwendbar. Am bequemsten führt hier zur Zeit die Weylsche Methode zum Ziel (vgl. S. 1372). Man betrachtet vermittels der „Integralgleichung“

$$(17) \quad c\chi(x) - M(f(x-t)\chi(t)) = 0$$

die  $e^{i\lambda x}$  als Eigenschwingungen des Kernes  $f(x-t)$  und überträgt auf diese Mittelbildung die Schmidtsche Integralgleichungstheorie, insbesondere den Entwicklungssatz, den man dann auf  $g(x) = M(f(x-t)f(t))$  anwendet. Vgl. hierzu Weyl 2. Für andere Methoden vgl. Bohr 1a, Wiener.

II. Hauptsatz. Als Maßbestimmung wird gewählt (vgl. die Klasse  $\mathfrak{S}$  S. 1366)

$$(18) \quad \varrho_s(f) = \sup |f(x)|.$$

Setzt man noch

$$(19) \quad \tau(x) = \alpha_1 e^{i\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{i\lambda_2 x} + \dots + \alpha_k e^{i\lambda_k x},$$

so gilt auch hier der Satz, daß es eine Folge  $\tau_n(x)$  gibt, so daß

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_s(f - \tau_n) = 0.$$

Die Bohrschen Funktionen lassen sich also auch so charakterisieren, daß sie auf der ganzen reellen Achse durch endliche Summen (19) *gleichmäßig* approximierbar sind.

Zum Beweis von (20) (II. Hauptsatz) ist zur Zeit der I. Hauptsatz unumgänglich. Am direktesten geht Weyl 2 vor, indem er unter geeigneter Wahl von  $\chi_n(t)$  die  $\tau_n$  als gewisse Partialsummen der nach dem I. Hauptsatze gleichmäßig konvergenten F. R. von  $M\{f(x+t)\chi_n(t)\}$  setzt. Bochner 1a benutzt ein Analogon des Fejérschen Summationsverfahrens der F. R., während der ursprüngliche Beweis von Bohr 1b die Funktion  $f(x)$  als die „Projektion“ einer Funktion von unendlich vielen Veränderlichen auffaßt, die in jeder Veränderlichen periodisch ist.

Für Übertragung einiger Ergebnisse des I. Abschnitts auf spezielle F. R. vgl. Bochner 2, 3. Verallgemeinerungen des Begriffs der fastperiodischen Funktion bei Stepanoff, Weyl 2, Wiener, Besicovitch, vgl. auch Nalli.

## D. Funktionen mehrerer Veränderlicher und mehrfache T. R.

Bei Funktionen mehrerer Veränderlicher  $x_1, x_2 \dots x_m$  tritt an Stelle des Orthogonalsystems (E, 7) das System

$$e^{i(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \dots + \nu_m x_m)} \quad \nu_k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

Die Theorie der entsprechenden F. R. und T. R. verläuft analog, es treten aber einige Besonderheiten auf. Für alle diese Fragen sei auf W. H. Young 2, Geiringer und Hobson [5] verwiesen. Für fastperiodische Funktionen mehrerer Veränderlicher vgl. Bochner 1b.

## Literatur zum Anhang.

- Besicovitch, *Proc. Lond. Math. Soc.* **25** (1926).  
 Bochner, 1. *Math. Ann.* a) **96** (1927) 119, b) **96** (1927) 383, c) **97** (1927); 2. *Math. Zeitschr.* **27** (1927) 187; 3. *Proc. Lond. Math. Soc.* **26** (1927).  
 Bohr, *Acta Math.* a) **45** (1924), b) **46** (1925), c) **47** (1926).  
 Geiringer, *Monatsh. Math. Phys.* **29** (1918).  
 Hahn, 1. *Wiener Denkschr.* **93** (1916); 2. *Wiener Ber.* 1925; 3. *Acta Math.* **49** (1927).  
 Hardy, 1. *Cambr. Phil. Trans.* **21** (1912); 2. *Messeng. Math.* **51** (1922) 186.  
 Jacob, *Bull. Crac.* 1926.  
 Nalli, *Palermo Rend.* **38** (1914).  
 Plancherel, 1. *Pal. Rend.* **30** (1910); 2. *Math. Ann.* **76** (1915).  
 Pringsheim, *Math. Ann.* **68** (1910) und **71** (1912).  
 Riesz, F., *Acta Sc. Szeged* **3** (1928).  
 Sommerfeld, *Die willkürlichen Funktionen der mathematischen Physik.* Diss. Königsberg 1901.  
 Stepanoff, *Math. Ann.* **95** (1926).  
 Titchmarsh, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **21** (1923) 463 und *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **23** (1924) 279.  
 Weyl, 1. *Jahr. D. Math. Ver.* **20** (1911); 2. *Math. Ann.* **97** (1927).  
 Wiener, *Math. Zeitschr.* **24** (1926).  
 Young, W. H., 1. *Edinb. Roy. Soc. Proc.* **31** (1911) 559; 2. *Proc. Lond. Math. Soc.* **11** (1913) 133.  
 Zygmund, *Math. Ann.* **98** (1928).

Literatur.<sup>1)</sup>

- Hilb, E. und M. Riesz, *Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen. Enzyklopädie der Math. Wissensch.* **II C 10.** 1923.  
 Lecat, *Bibliographie des séries trigonométriques* 1921. (*Compléments* 1924.)  
 Plancherel, *Le développement de la théorie des séries trigonométriques dans le dernier quart de siècle. Enseignement Mathém.* 1925.

1) Die numerierten Lehrbücher werden zitiert durch eckige Klammer, z. B. [7]. Die mit \* bezeichneten Lehrbücher enthalten keine zusammenhängende Darstellung der Theorie der T. R.



1. Courant, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*. Bd. I. 1927. Kap. IX.
  2. Courant, R. und D. Hilbert, *Methoden der mathem. Physik*. 1924. Kapitel I und II.
  3. Dini, U., *Serie di Fourier*. Pisa 1880.
  - \*4. Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre*. 2. Aufl. 1927. a) 6. Kapitel, b) S. 271.
  5. Hobson, E., *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*. 2<sup>nd</sup> ed. Vol. II. 1926.
  - \*6. Knopp, K., *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. 2. Aufl. 1924. Kap. XIII.
  7. Lebesgue, H., *Leçons sur les séries trigonométriques*. 1906.
  8. Picard, E., *Traité d'Analyse*. 3<sup>me</sup> éd. a) T. I 1922, Chap. X; b) T. II 1925, Chap. IV, S. 187—209.
  9. Poincaré, H., *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*. 1895.
  10. Schlesinger, L. und A. Plessner, *Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen*. 1926. VI. Abschnitt.
  - \*11. Study, E. und W. Blaschke, *Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche*. 1913, 50—55.
  12. De la Vallée Poussin, Ch., *Cours d'Analyse infinitésimale*. a) T. II. 2<sup>me</sup> éd. 1912. Chap. IV; b) T. I. 3<sup>me</sup> éd. 1914. S. 285—291 und S. 449—452.
  13. De la Vallée Poussin, Ch., *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*. 1919.
  14. Whittaker and Watson, *Cours of Modern Analysis*. 3<sup>rd</sup> ed. 1920. Chapter IX.
- Während der Drucklegung erschien:
- G. Prasad, *Six lectures on recent researches in the theory of Fourier's Series*. Calcutta 1928.

## Kapitel XXVI.

### Kugelfunktionen, Besselsche und verwandte Funktionen.

Von *Emil Hilb* in Würzburg.

---

Die Mehrzahl der hier zu besprechenden Funktionen verdankt ihre Bedeutung der Verwendbarkeit für Fragen der mathematischen Physik. Man erhält die meisten dieser Funktionen, wenn man z. B. in die Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

geeignete Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  einführt und versucht, die neue Differentialgleichung durch Integrale der Form  $\Xi(\xi) H(\eta) Z(\zeta)$  zu lösen, wo  $\Xi, H, Z$  von  $\xi$  bzw.  $\eta$  bzw.  $\zeta$  allein abhängen.

#### I. Kugelfunktionen.

Vgl. in erster Linie E. Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen*, 2. Aufl. Berlin 1878 und 1881, F. Neumann, *Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen*, Leipzig 1887, W. E. Byerly, *An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical and ellipsoidal harmonics*, Boston 1893, W. Thomson und P. G. Tait, *Handbuch der theoretischen Physik*, deutsch von H. Helmholtz und G. Wertheim, 1871, 1874, Bôcher, *Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie*, Leipzig 1894, F. Pockels, *Über die partielle Differentialgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$* , Leipzig 1891, A. Wangerin, *Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen*, Leipzig 1909 und 1921, Courant-Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin 1924.

## § 1. Legendresche Polynome.

Führt man in  $\Delta\varphi = 0$  Polarkoordinaten

$$(1) \quad x = r \cos \Theta, \quad y = r \sin \Theta \cos \omega, \quad z = r \sin \Theta \sin \omega$$

ein, so geht (1) über in

$$(2) \quad \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} \right] = 0.$$

Setzt man

$$(3) \quad \varphi = R(r) W(\Theta, \omega),$$

wo  $R$  nur von  $r$ ,  $W$  nur von  $\Theta$  und  $\omega$  abhängt, so erhält man

$$(4) \quad \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR(r)}{dr} - A R(r) = 0,$$

$$(5) \quad \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \frac{\partial W}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \omega^2} + A W = 0.$$

(4) hat die Integrale  $R = r^{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{A + \frac{1}{4}}}$ . Eine Lösung, die für  $r = 0$  oder  $r = \infty$  regulär ist, erhält man also nur für

$$(6) \quad A = n(n+1),$$

wo  $n$  eine ganze Zahl oder Null ist. Dann wird  $R(r) = r^n$  oder  $r^{-n-1}$  und (5) geht über in

$$(7) \quad \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \frac{\partial W}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \omega^2} + n(n+1) W = 0.$$

Ein spezielles Integral von  $\Delta\varphi = 0$  ist

$$\begin{aligned} (8) \quad \varphi &= [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= [r^2 - 2rr_0(\cos \Theta \cos \Theta_0 + \sin \Theta \sin \Theta_0 \cos(\omega - \omega_0)) + r_0^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= (r^2 - 2rr_0 \cos \gamma + r_0^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

mit

$$(9) \quad \cos \gamma = \cos \Theta \cos \Theta_0 + \sin \Theta \sin \Theta_0 \cos(\omega - \omega_0).$$

Nun ist

$$(10) \quad (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos \gamma) \text{ für } r < r_0$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma) \text{ für } r > r_0.$$

Dabei ist  $P_n(\cos \gamma)$ , das Legendresche Polynom (Legendre, *Mém. par div. sav.* X, 1785), ein Polynom  $n^{\text{ten}}$  Grades in  $\cos \gamma$ , das die Differentialgleichung (7) befriedigt. Ist  $\Theta_0 = 0$ ,  $\Theta = \gamma$ , so ist  $P_n(\cos \gamma)$  von  $\omega$  unabhängig, genügt also der Differentialgleichung

$$(11) \quad \frac{d^2 P_n(\cos \Theta)}{d\Theta^2} + \operatorname{ctg} \Theta \frac{dP_n(\cos \Theta)}{d\Theta} + n(n+1)P_n(\cos \Theta)$$

$$\equiv L(P_n(\cos \Theta)) + n(n+1)P_n(\cos \Theta) = 0.$$

Für

$$(12) \quad \cos \Theta = x$$

erhält man für die Polynome  $P_n(x)$ , die in  $x$  vom  $n^{\text{ten}}$  Grade sind,

$$(13) \quad (1-x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

## § 2. Eigenschaften der Legendreschen Polynome.

Aus (10) folgt

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),$$

allgemein

$$(14) \quad P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} + \dots \right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r! (n-r)! (n-2r)!} x^{n-2r},$$

wo  $\left[\frac{1}{2}n\right] = \frac{n}{2}$  bei geradem  $n$ ,  $= \frac{1}{2}(n-1)$  bei ungeradem  $n$  ist.

Entsprechend ist

$$P_0(\cos \Theta) = 1, \quad P_1(\cos \Theta) = \cos \Theta,$$

$$P_2(\cos \Theta) = \frac{1}{4} (3 \cos 2\Theta + 1),$$

$$P_3(\cos \Theta) = \frac{1}{8} (5 \cos 3\Theta + 3 \cos \Theta),$$

$$P_4(\cos \Theta) = \frac{1}{64} (35 \cos 4\Theta + 20 \cos 2\Theta + 9),$$

$$P_5(\cos \Theta) = \frac{1}{128} (63 \cos 5\Theta + 35 \cos 3\Theta + 30 \cos \Theta),$$

$$P_6(\cos \Theta) = \frac{1}{512} (231 \cos 6\Theta + 126 \cos 4\Theta + 105 \cos 2\Theta + 50),$$

allgemein

$$(15) \quad P_n(\cos \Theta) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \left\{ 2 \cos n\Theta + \frac{1 \cdot (2n)}{2 \cdot (2n-1)} 2 \cos (n-2)\Theta \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot (2n)(2n-2)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} 2 \cos (n-4)\Theta + \dots \right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} 2 \frac{(2r)!}{(r!)^2} \frac{(2n-2r)!}{2^{2n}((n-r)!)^2} \cos (n-2r)\Theta.$$

Speziell ist

$$(16) \quad P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0,$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$$

und

$$(17) \quad |P_n(\cos \Theta)| \leq 1 \quad \text{für reelle } \Theta.$$

Aus (13) folgt mittelst des Greenschen Satzes (vgl. 1285) für ganze positive Zahlen  $m$  und  $n$

$$(18) \quad \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad \text{für } m \neq n.$$

Die Legendreschen Polynome sind also bis auf konstante Faktoren die zu dem Intervalle  $-1, +1$  gehörigen orthogonalisierten Polynome (vgl. 1264), und es ist  $P_n(x)$  bis auf einen konstanten Faktor das einzige Polynom  $n^{\text{ten}}$  Grades, für welches bei jedem beliebigen Polynome  $\vartheta_{n-1}(x)$  vom Grade  $n-1$  stets

$$(19) \quad \int_{-1}^{+1} P_n(x) \vartheta_{n-1}(x) dx = 0$$

ist. Andererseits folgt durch partielle Integration

$$(20) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \vartheta_{n-1}(x) dx = 0$$

und nach Vergleich der Koeffizienten von  $x^n$

$$(21) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Rodrigues, *Corresp. sur l'éc. pol.* **3** (1816), S. 361—385. Vgl. auch Wangerin, *D. Math. Ver.* 23 (1914), S. 385—389.

Daraus ergibt sich weiter durch partielle Integration als Ergänzung von (18)

$$(22) \quad \int_{-1}^{+1} (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Für jedes beliebige Polynom  $\vartheta_{n-2}(x)$  vom  $(n-2)^{\text{ten}}$  Grade folgt nach (19) mittelst partieller Integration

$$\int_{-1}^{+1} P_n'(x) (1-x^2) \vartheta_{n-2}(x) dx = 0.$$

In Verbindung mit (19) ergeben sich daraus die Rekursionsformeln

$$(23a) \quad P_{n+1}'(x) - x P_n'(x) = (n+1) P_n(x),$$



$$(23b) \quad (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

$$(23c) \quad xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x),$$

$$(23d) \quad P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x),$$

$$(23e) \quad (x^2-1)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Nach (23b) ist

$$(24) \quad \sum_{\nu=0}^n \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) = \frac{n+1}{2} \frac{P_n(x) - P_{n+1}(x)}{1-x};$$

ferner läßt sich auch die Differentialgleichung (13) umgekehrt aus (19) ableiten. (Vgl. zu dieser Methode zur Gewinnung von Funktionalgleichungen für orthogonalisierte Polynome Markoff bei Possé, *Fractions continues algébriques*, S. 51, Petersburg 1886.) P. Funk, *Math. Ann.* **77**, S. 136—152, 1916 definiert die Legendreschen Polynome, deren Argument der cos. der sphärischen Entfernung zweier Punkte der Kugel ist, durch eine homogene Integralgleichung, deren Kern eine beliebige Funktion der Entfernung zweier Punkte der Kugel ist.

### § 3. Ein zweites Integral der Differentialgleichung (13).

Wir denken uns die komplexe  $x$ -Ebene längs der reellen Achse zwischen  $\pm 1$  aufgeschnitten. In der so zerschnittenen Ebene erhält man als zweites Integral von (13)

$$(25) \quad Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \log \frac{x+1}{x-1} - R_n(x),$$

wo  $R_n(x)$  ein Polynom  $n-1^{\text{ten}}$  Grades von solcher Art ist, daß  $Q_n(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  nach Null geht, d. h. daß  $R_n(x)$  alle nicht negativen Potenzen der nach fallenden Potenzen von  $x$  geordneten Entwicklung von  $\frac{1}{2} P_n(x) \log \frac{x+1}{x-1}$  enthält. Es ist

$$(26) \quad R_n(x) = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} P_{\nu-1}(x) P_{n-\nu}(x) = \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}} P_{n-1-2\nu}(x) \frac{(2n-4\nu-1)}{(n-\nu)(2\nu+1)}.$$

(Schläfli, *Über die zwei Heineschen Kugelfunktionen*, S. 61, Bern

1881; Christoffel, *J. f. Math.* **55**, S. 61—82, 1858.) Nach F. Neumann, *J. f. Math.* **37**, S. 24, 1848 ist

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(y)}{x-y} dy.$$

Nach (25) ist längs des Schnittes zwischen  $\pm 1$

$$(27) \quad Q_n(x+i0) - Q_n(x-i0) = -\pi i P_n(x).$$

Für reelle  $x$  zwischen  $\pm 1$  führt man häufig eine andere Lösung

$$(28) \quad Q_n^*(x) = \frac{1}{2} (Q_n(x+i0) + Q_n(x-i0))$$

ein.  $Q_n(x)$  befriedigt die (23) entsprechenden Rekursionsformeln.

#### § 4. Integraldarstellungen für $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ .

Aus (21) folgt vermittelt des Cauchyschen Integralsatzes nach Schläfli l. c.

$$(29) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz,$$

wenn  $C$  um  $x$  entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne geht. Vermittelt  $z-x = \sqrt{x^2-1} e^{i\varphi}$  erhält man

$$(30) \quad P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \cos \varphi \sqrt{x^2-1})^n d\varphi$$

(Laplace, *Méc. Cél.*, Buch XI, Kap. 2), und sofern  $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$ :

$$(31) \quad P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \cos \varphi \sqrt{x^2-1})^{n+1}}$$

(Jacobi, *J. f. Math.*, **26**, S. 81—87, 1843).

Nach Dirichlet, *J. f. Math.*, **17**, S. 41, 1837; Mehler, *Math. Ann.*, **5**, S. 141, 1872 ist

$$\begin{aligned}
 (32) \quad P_n(\cos \Theta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\Theta \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \Theta)}} d\varphi \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_\Theta^\pi \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \Theta)}} d\varphi.
 \end{aligned}$$

Entsprechend (29) und (31) hat man

$$(33) \quad Q_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-z^2)^n}{(x-z)^{n+1}} dz,$$

$$(34) \quad Q_n(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cosh t)^{n+1}}.$$

### § 5. Angenäherte Darstellung von $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ für große $n$ .

Sei

$$(35) \quad \xi = x - \sqrt{x^2 - 1},$$

ferner  $\varepsilon$  eine feste positive Zahl, dann ist für  $|\xi| < 1 - \varepsilon$ ,  
 $|\arg \xi| < \pi$ ,  $|\arg(1 - \xi^2)| < \pi$ :

$$(36) \quad P_n(x) = \frac{\xi^{-n}}{\sqrt{n\pi}} (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} + o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$(37) \quad Q_n(x) = \xi^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{n}} (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} + o\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),$$

vgl. Heine, *Handbuch*, S. 174f.; Darboux, *J. d. Math.* (3) **4**, S. 22 u. 39; Barnes, *Quart. Journ.* **39**, S. 143 ff., 1908; Blumenthal, *Arch. Math. Phys.* (3) **19**, S. 136—174, 1912.

Für  $|\xi| = 1$  setzen wir  $x = \cos \Theta$ . Dann ist für  $\varepsilon < \Theta < \pi - \varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
 (38) \quad P_n(\cos \Theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \Theta}} \left[ \sin \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \Theta + \frac{\pi}{4} \right\} \left(1 - \frac{3}{8n}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\cos \left\{ \left(n + \frac{3}{2}\right) \Theta + \frac{\pi}{4} \right\}}{8n \sin \Theta} + O(n^{-2}) \right],
 \end{aligned}$$

$$(39) \quad Q_n^*(\cos \Theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2n \sin \Theta}} \left[ \cos \left\{ \left( n + \frac{1}{2} \right) \Theta + \frac{\pi}{4} \right\} \left( 1 - \frac{3}{8n} \right) + \frac{\sin \left\{ \left( n + \frac{3}{2} \right) \Theta + \frac{\pi}{4} \right\}}{8n \sin \Theta} + O(n^{-2}) \right].$$

Für das ganze Intervall  $0 \leq \Theta \leq \pi$  gilt nach Hilb, *Math. Zeitschr.* **5**, S. 17—25, 1919 die Darstellung

$$(40) \quad P_n(\cos \Theta) = \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} J_0 \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \Theta \right) + O(n^{-\frac{3}{2}}),$$

wo  $J_0$  die in II, § 1 definierte Besselsche Funktion ist.

### § 6. Entwicklungssätze.

Sei  $f(t)$  samt seinem Quadrate für reelle  $t$  in  $-1 \leq t \leq 1$  integrierbar. Wir setzen entsprechend (18) und (22)

$$(41) \quad a_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^{+1} f(t) P_n(t) dt.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \quad \text{gegen} \quad \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$$

für jedes  $x$ , für welches  $-1 < x < 1$ , wenn die entsprechende trigonometrische Fourierreihe dieses tut; genauer, es ist, sofern  $0 < \Theta < \pi$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=0}^N a_n P_n(\cos \Theta) - \sum_{n=0}^N \frac{\varepsilon_n}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t) \cos n t dt \cos n \Theta \right] = 0$$

mit  $\varepsilon_0 = 1$  sonst  $\varepsilon_n = 2$ . Haar, *Math. Ann.* **78**, S. 121—136, 1917; vgl. auch Burkhardt, *Münch. Sitzber.* **39**, Nr. 10, 1909; Hobson, *Lond. M. Soc. Proc.* (2) **6**, S. 388—395, 1908; (2) **7**, S. 24—39, 1909. Der entsprechende Satz gilt, immer unter Ausschluß der Punkte  $x = \pm 1$ , bei Summation mit Hilfe der Methode der arithmetischen Mittel. Über die Summation in  $x = \pm 1$  vgl. Gronwall, *Math. Ann.* **74**, S. 213—270, 1913; **75**, S. 321—375, 1914; E. Kogbetliantz, *Math. Ztschr.* **14**, S. 99—109, 1922.

Für komplexe Variable gilt: Liegt  $t$  auf einer Ellipse mit den Brennpunkten  $\pm 1$ , liegt  $z$  im Inneren der Ellipse, so gilt

$$(42) \quad \frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(z) Q_n(t).$$

(Heine, *J. f. Math.* **42**, S. 72, 1851; C. Neumann, *Über die Entwicklung einer Funktion nach den Kugelfunktionen*, Halle 1862.) Ist  $f(z)$  eine vorgegebene, innerhalb und auf der Ellipse  $C$  analytische Funktion, so ist

$$(43) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2\pi i} \int_C f(t) Q_n(t) dt P_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z),$$

wo  $a_n$  durch (41) definiert ist.

Speziell ist

$$(44) \quad x^n = 2^n n! \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(2n-4m+1)(n-m)! 2^{-2m}}{m!(2n-2m+1)!} P_{n-2m}(x).$$

$$(45) \quad x = P_1(x), \quad x^2 = \frac{2}{3} P_2(x) + \frac{1}{3} P_0(x),$$

$$x^3 = \frac{2}{5} P_3(x) + \frac{3}{5} P_1(x), \quad x^4 = \frac{8}{35} P_4(x) + \frac{4}{7} P_2(x) + \frac{1}{5} P_0(x), \dots$$

$$(46) \quad \cos n\Theta = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \left[ (2n+1) P_n(\cos \Theta) \right. \\ \left. + (2n-3) \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2 - (n-2)^2} P_{n-2}(\cos \Theta) \right. \\ \left. + (2n-7) \frac{[n^2 - (n+1)^2][n^2 - (n-1)^2]}{[n^2 - (n-2)^2][n^2 - (n-4)^2]} P_{n-4}(\cos \Theta) + \cdots \right].$$

$$(47) \quad \sin n\Theta = \frac{\pi}{4} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \left[ (2n-1) P_{n-1}(\cos \Theta) \right. \\ \left. + (2n+3) \frac{n^2 - (n-1)^2}{n^2 - (n+2)^2} P_{n+1}(\cos \Theta) \right. \\ \left. + (2n+7) \frac{[n^2 - (n-1)^2][n^2 - (n+1)^2]}{[n^2 - (n+2)^2][n^2 - (n+4)^2]} P_{n+3}(\cos \Theta) + \cdots \right].$$

## § 7. Zugeordnete Funktionen.

Es sei  $\cos \gamma$  durch (9) definiert, so daß  $P_n(\cos \gamma)$  ein Polynom  $n^{\text{ten}}$  Grades von  $\cos(\omega - \omega_0)$  wird, also in eine endliche trigonometrische Fourierreihe

$$(48) \quad P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^n \alpha_{m,n}(\Theta, \Theta_0) \cos m(\omega - \omega_0)$$

entwickelbar ist. Durch Einsetzen in (7) folgt, wenn nach (12)  $x = \cos \Theta$  gesetzt wird, daß  $z = \alpha_{m,n}(\Theta, \Theta_0)$  der Differentialgleichung

$$(49) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 z}{dx^2} - 2x \frac{dz}{dx} + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) z = 0$$

genügt, deren Integrale

$$(50) \quad \begin{aligned} P_n^{(m)}(x) &= (\sqrt{1-x^2})^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \\ Q_n^{(m)}(x) &= (\sqrt{1-x^2})^m \frac{d^m Q_n(x)}{dx^m} \end{aligned}$$

sind. Wegen der Symmetrie in  $\Theta$  und  $\Theta_0$  ergibt sich schließlich nach Bestimmung der numerischen Konstanten das Additionstheorem

$$(51) \quad \begin{aligned} P_n(\cos \gamma) &= P_n(\cos \Theta) P_n(\cos \Theta_0) \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^{(m)}(\cos \Theta) P_n^{(m)}(\cos \Theta_0) \cos m(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

(Legendre, *Paris mém.*, S 432, 1789.)

$P_n^{(m)}(x)$  und  $Q_n^{(m)}(x)$  heißen die Zugeordneten der Kugelfunktionen; Heine, *Handbuch*, schreibt statt  $P_n(x)$  und  $Q_n(x)$   $P^n(x)$ ,  $Q^n(x)$ ; ferner ist bei Heine, S. 202 und 206

$$P_v^n(x) = (x^2 - 1)^{\frac{v}{2}} \frac{(n-v)!}{1 \cdot 3 \cdot (2n-1)} \frac{d^v P_n(x)}{dx^v},$$

$$\text{S. 210: } Q_v^n(x) = (-1)^v (x^2 - 1)^{\frac{v}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{(n+v)!} \frac{d^v Q^n(x)}{dx^v}.$$

Bez. des Additionstheorems für  $Q_n$  vgl. Heine, *Handbuch*, S. 333 f.



## § 8. Allgemeine Kugelfunktionen.

Die  $2n + 1$  Funktionen

$$\cos m\omega P_n^{(m)}(\cos \Theta), \quad \sin m\omega P_n^{(m)}(\cos \Theta) \quad (m \leq n)$$

sind linear unabhängig. Führt man nach (1) in

$$r^n \cos m\omega P_n^{(m)}(\cos \Theta) \quad \text{bzw.} \quad r^n \sin m\omega P_n^{(m)}(\cos \Theta)$$

die rechtwinkligen Koordinaten  $xyz$  ein, so erhält man, wenn  $C$  eine geeignete Konstante ist, z. B. als allgemeines Glied der ersteren Funktion

$$\begin{aligned} & C r^n \cos^{m-2k} \omega \sin^{2k} \omega \sin^m \Theta \cos^{n-2l-m} \Theta \\ &= C r^{2l} r^{m-2k} \sin^{m-2k} \Theta \cos^{m-2k} \omega r^{2k} \sin^{2k} \Theta \sin^{2k} \omega r^{n-2l-m} \cos^{n-2l-m} \Theta \\ &= C (x^2 + y^2 + z^2)^l y^{m-2k} z^{2k} x^{n-2l-m}; \end{aligned}$$

die Funktionen

$$r^n \cos m\omega P_n^{(m)}(\cos \Theta), \quad r^n \sin m\omega P_n^{(m)}(\sin \Theta)$$

sind also homogene ganze Funktionen von  $x, y, z$  vom Grade  $n$  und genügen der Differentialgleichung  $\Delta \varphi = 0$ . Nun enthält die allgemeinste homogene Potentialfunktion des Grades  $n$  genau  $2n + 1$  Konstante und läßt sich durch die speziellen  $2n + 1$  Funktionen linear mit konstanten Koeffizienten darstellen. Durch Division mit  $r^n$  erhält man aus den homogenen Potentialfunktionen, die nach Thomson und Tait räumliche harmonische Kugelfunktionen heißen, die sogenannten allgemeinen Kugelfunktionen oder Laplaceschen Funktionen  $Y_n(\Theta, \omega)$ , für welche die Darstellung

$$(52) \quad Y_n(\Theta, \omega) = \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\omega + B_m \sin m\omega) P_n^{(m)}(\cos \Theta)$$

gilt. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Bd. 1, 2. Aufl., S. 179—214, 1881 definiert die allgemeinen Kugelfunktionen durch die Gleichung

$$(53) \quad Y_n(\Theta, \omega) = (-1)^n C \frac{r^{2n+1}}{n!} \frac{\partial}{\partial k_1} \frac{\partial}{\partial k_2} \cdots \frac{\partial}{\partial k_n} \left( \frac{1}{r} \right),$$

wo  $C$  eine Konstante,  $k_1, k_2, \dots, k_n$  beliebige Richtungen sind. Vgl. hierzu auch Ostrowski, *D. Math. Ver.* **33**, 1924, Courant-

Hilbert, S. 423—430, und Waelsch, *Monatsh. f. Math.* **20**, S. 289—320, *Wien. Ber.* **118**, S. 85—90, 1909, der bei einem systematischen Aufbau der Theorie der Kugelfunktionen mittelst binären Invarianten auch diese Darstellung gewinnt.

Aus den bekannten Orthogonalitätseigenschaften folgt für jede allgemeine Kugelfunktion (53)

$$(54) \quad \int_0^\pi d\Theta \int_0^{2\pi} \sin \Theta Y_n(\Theta, \omega) P_n(\cos \gamma) d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\Theta_1, \omega_1).$$

Entsprechend erhält man bei  $0 \leq \Theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \omega \leq 2\pi$  für irgendeine Funktion  $f(\Theta, \omega)$  die Darstellung

$$(55) \quad f(\Theta, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi d\Theta_1 \int_0^{2\pi} \sin \Theta_1 f(\Theta_1, \omega_1) P_n(\cos \gamma) d\omega_1.$$

Um hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von (55) bequem aussprechen zu können, denken wir uns eine Koordinatentransformation derart durchgeführt, daß für den betrachteten Punkt  $\Theta = 0$  wird. Dann ist hinreichend, daß  $f(\Theta_1, \omega_1)$  auf der Kugel beschränkt und integrierbar, in der Umgebung des betrachteten Punktes stetig ist, daß es ferner auf jedem größten Kreis (Meridian) durch den Punkt beschränkte Schwankung hat und daß diese Schwankung für alle diese Meridiane beschränkt sei, daß schließlich in genügender Nähe des Punktes diese Schwankung gleichmäßig stetig in bezug auf  $\omega$  ist. B. H. Camp, *Am. Bull.* **18**, S. 236—243, 1911; der Beweis bei Jordan, *Cours d'Analyse*, 2. Aufl., **2**, S. 252, ist nach Camp unvollständig. Vgl. auch wegen früherer Untersuchungen Heine, *Handbuch* **1**, S. 435 ff., **2**, S. 361, Anm.; U. Dini, *Ann. di mat.* (2) **6**, S. 112—140, 208—225, 1874; Darboux, *J. de math.* (2) **19**, S. 1—18, 1874. Ist  $f(\Theta, \omega)$  absolut integrierbar, so ist die Reihe in einem Stetigkeitspunkte  $\Theta, \omega$  mit der Summe  $f(\Theta, \omega)$  vermittelt Cesàroscher Mitteln  $k^{\text{ter}}$  Ordnung summierbar, sofern  $k > \frac{1}{2}$  ist und  $f(\Theta, \omega)$  im Gegenpol  $\pi - \Theta, \omega + \pi$  höchstens von der Ordnung  $\frac{3}{2}$  unendlich wird. Für  $k \geq 1$  fällt diese Gegenpolbedingung weg. T. H. Gronwall, *Math. Ann.* **74**, S. 213—220, 1914; **75**, S. 321—325; Hilb, *Math. Ztschr.* **5**, S. 17—25, 1919; O. Volk, *Münch. Sitzber.* 1921, S. 167—188;

Kogbetliantz, *Math. Ztschr.* **14**, S. 99—109, 1924; Lukács, ebenda, S. 250—262; Funk, *Math. Ann.* **77**, S. 136—152, 1916 beweist die angenäherte Darstellung einer stetigen Funktion des Ortes auf der Kugel durch eine endliche Reihe von Kugelfunktionen. Gauß, *Werke* **5**, S. 119, F. Neumann, *Math. Ann.* **15**, S. 567—576, 1879, Vorl. über Potentialtheorie Kap. VII geben die Darstellung einer Funktion mittelst Kugelfunktionen auf Grund gegebener Beobachtungen. Das Analogon zur Gibbs'schen Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene untersucht Weyl, *Palermo Circ. mat. Rend.* **29**, S. 308—323, 1910; **30**, S. 377—407; **32**, S. 118—131, 1911.

### § 9. Oszillationstheoreme.

Aus (21) folgt mittelst des Satzes von Rolle, nach welchem zwischen zwei reellen Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten mindestens eine Nullstelle seiner Ableitung liegt, daß  $P_n(x)$  genau  $n$  reelle Nullstellen zwischen  $+1$  und  $-1$  hat. Die Funktionen  $P_n^{(m)}(\cos \Theta) \sin m\omega$ ,  $P_n^{(m)}(\cos \Theta) \cos m\omega$  verschwinden entsprechend auf der Kugel in  $n - m$  Breitenkreisen,  $m$  Meridianen. Nach dem Aussehen des Netzes der Verschwindungsstellen nennt man im Anschluß an die Engländer diese Funktionen allgemein tesserale harmonische Funktionen, für  $m = n$  sektorielle, für  $m = 0$  zonale harmonische Funktionen. Die Verteilung der Nullstellen steht in engem Zusammenhange mit den sogenannten Oszillationstheoremen; der Name rührt von F. Klein, *Gött. Nachr.* 1890, *Ges. Werke* II, S. 545 her. Seien in der Differentialgleichung  $\frac{d}{dx} p \frac{dy}{dx} + (Aq + r)y = 0$  die Funktionen  $p, q, r$  im Intervalle  $a, b$  gegebene reelle, stetige Funktionen,  $p$  einmal stetig differenzierbar, außerdem  $p$  und  $q$  wesentlich positiv und ebenso wie  $r$  von dem Parameter  $A$  unabhängig. Es ist dann  $A$  so zu bestimmen, daß die Differentialgleichung ein Integral besitzt, das, wenn  $k$  und  $l$  reelle Zahlen sind, eines der fünf Randbedingungs-paare  $y(a) = 0, y(b) = 0$  oder  $y'(a) = 0, y'(b) = 0$  oder  $y'(a) + ky(a) = 0, y'(b) + ly(b) = 0$  oder  $y(a) = ky(b), p(a)y'(a) = \frac{p(b)}{k}y'(b)$  oder  $y(a) = kp(b)y'(b), p(a)y'(a) = -\frac{1}{k}y(b)$  erfüllt.

Nach Sturm, *J. de math.* **1**, S. 106—186, 1836 kann man bei den ersten drei Randbedingungen den Parameter  $A$  auf eine und nur eine Weise so bestimmen, daß das Integral im Intervalle  $a, b$  eine gegebene Anzahl von Nullstellen hat (Oszillations-

theorem). Das etwas kompliziertere Theorem bei den anderen Randbedingungen behandeln G. D. Birkhoff, *Trans. Am. M. S.* (2) **15**, S. 250—270, 1909; O. Haupt, *Math. Ann.* **76**, S. 67—104, 1915 und *Untersuchungen über Oszillationstheoreme*, Dissert. Würzburg 1911. Ist unter Annahme analytischer Koeffizienten ein Endpunkt eine singuläre Stelle der Bestimmtheit mit reellen Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung (Exponenten), so bleibt das obige Oszillationstheorem bestehen, wenn man als eine Grenzbedingung verlangt, daß die Lösung zur größeren Wurzel gehört. Sind die Wurzeln von  $A$  unabhängig und ist ihre Differenz kleiner 1 (Stieltjessche Grenze), so kann man als eine Grenzbedingung vorschreiben, daß die Lösung eine vorgegebene lineare Verbindung der zu den beiden Wurzeln gehörigen Lösungen ist. Wegen Oszillationstheoremen oberhalb der Stieltjesschen Grenze vgl. Haupt, Hilb, *Math. Ann.* **89**, S. 130—146, 1923. Bei zwei Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dx} p_1 \frac{dy}{dx} + (Aq_1 + B)y = 0, \quad \frac{d}{d\xi} p_2 \frac{d\eta}{d\xi} - (Aq_2 + B)\eta = 0$$

mit  $a_1 \leq x \leq b$ ,  $p_1 > 0$ ,  $q_1 > 0$ ,  $a_2 < \xi < b_2$ ,  $p_2 > 0$ ,  $q_2 > 0$  und  $\text{Max. } q_1 < \text{Min. } q_2$  kann man die Parameter  $A$  und  $B$  auf eine und nur eine Weise so bestimmen, daß  $y$  in  $a_1$  und  $b_1$ ,  $\eta$  in  $a_2$  und  $b_2$  je ein Paar der ersten drei Randbedingungen erfüllen und je eine vorgegebene Anzahl von Nullstellen haben. Das ist das Kleinsche Oszillationstheorem, F. Klein, *Math. Ann.* **18**, S. 410—422, 1881; *Ges. Werke* S. 521—539; Pockels, *Über die Integration von  $\Delta u + k^2 u = 0$* , S. 118, Teubner 1891. Das Kleinsche Oszillationstheorem beherrscht den ganzen hier zu besprechenden Fragekreis.

Die Kugelfunktionen ordnen sich folgendermaßen ein: Indem man (5) durch das Produkt zweier Funktionen zu integrieren sucht, von denen die eine  $y$  nur von  $\Theta$  bzw.  $\cos \Theta = x$ , die andere  $\eta$  nur von  $\omega$  abhängt, erhält man, wenn man  $A = \nu(\nu + 1)$  setzt, die zwei Differentialgleichungen

$$(56) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - x^2} \right] y = 0,$$

$$(57) \quad \frac{d^2 \eta}{d\omega^2} + \mu^2 \eta = 0;$$

$\mu$  bestimmt sich dann als ganze Zahl  $m$ , durch die Forderung, daß (57) eine Lösung mit der Periode  $2\pi$  und für  $0 \leq \omega < 2\pi$  genau  $2m$  Nullstellen besitzt,  $\nu$  wird andererseits als ganze Zahl

$n$  durch die Forderung festgelegt, daß die Lösung von (56) sowohl in  $x = +1$ , als auch in  $x = -1$  zur Wurzel  $\frac{\mu}{2}$  der determinierenden Fundamentalgleichung gehört und  $n - m$  Nullstellen zwischen  $-1$  und  $+1$  besitzt. Andere, und zwar im allgemeinen nicht ganzzahlige Werte für  $\mu$  und  $\nu$  erhält man etwa durch die Forderung, Lösungen von (5) zu bestimmen, die auf einem von zwei Meridianen und zwei Breitenkreisen begrenzten Rechtecke verschwinden. Hilb, *Math. Ann.* **63**, S. 38—53, 1907, Hilbert, *Gött. Nachr.*, S. 408, 1910 zeigen, daß man alle solche Lösungen durch den Ansatz erhält, der auf (56) und (57) führte. Wir kommen durch diesen Ansatz also auf Lösungen von (56), wenn  $\nu$  und  $\mu$  auch nicht ganze Zahlen sind; diese Differentialgleichung ordnen wir im folgenden einem noch umfassenderen Fragekreise ein.

### § 10. Kugelfunktionen höherer Ordnung.

Die Theorie der Anziehung im Raume von  $s + 1$  Dimensionen führt entsprechend auf Kugelfunktionen  $s^{\text{ter}}$  Ordnung als den Entwicklungskoeffizienten von  $(r^2 + r_0^2 - 2rr_0x)^{-\frac{s-1}{2}}$  nach Potenzen von  $\frac{r}{r_0}$ . (Wegen Literatur vgl. R. Olbricht, *Studien über Kugel- und Cylinderfunktionen*, Leipzig 1887.) Setzt man  $\frac{s-1}{2} = \varrho$  und wählt man  $\varrho$  beliebig, so erhält man die besonders von Gegenbauer, *Wien. Sitzber.* **70**, S. 434—443 (1874), **75**, S. 891—896 (1877), **97**, S. 259—316 (1888), **102**, S. 942 (1893) studierten Funktionen  $C_n^{(\varrho)}(x)$ , die der Differentialgleichung

$$(58) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{(2\varrho + 1)}{x^2 - 1} x \frac{dy}{dx} - \frac{n(n + 2\varrho)}{x^2 - 1} y = 0$$

genügen. Ist  $n$  entsprechend seiner ursprünglichen Definition zunächst ganz, so gilt

$$(59) \quad C_n^{(\varrho)}(x) = (-2)^n \frac{\varrho(\varrho + 1) \cdots (\varrho + n - 1)}{n!(2n + 2\varrho - 1) \cdots (n + 2\varrho)} (1 - x^2)^{\frac{1}{2} - \varrho} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^{n + \varrho - \frac{1}{2}}$$

(vgl. für  $\varrho = \frac{1}{2}$  (21)).



Ist  $r$  eine ganze positive Zahl, so ist

$$(60) \quad C_{n-r}^{(r+\frac{1}{2})}(x) = \frac{1}{(2r-1)(2r-3)\dots 1} \frac{d^r P_n(x)}{dx^r} \\ = \frac{(1-x^2)^{-\frac{r}{2}}}{(2r-1)(2r-3)\dots 1} P_n^{(r)}(x).$$

Wegen der für diese Funktionen geltenden Rekursionsformeln, Additionstheoreme usw. vgl. Gegenbauer, l. c.

Geht man zu den Zugeordneten über und ersetzt man die ganzen Zahlen  $s, n, m$  durch beliebige Zahlen  $\sigma, \nu, \mu$ , so erhält man die Differentialgleichung

$$(61) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{\sigma x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{\nu(\nu+\sigma-1)(1-x^2) - \mu(\mu+\sigma-2)}{(1-x^2)^2} y = 0,$$

also eine Differentialgleichung mit drei singulären Stellen der Bestimmtheit  $+1, -1, \infty$  und den Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen  $\frac{\mu}{2}, -\frac{\mu+\sigma-2}{2}; \frac{\mu}{2}, -\frac{\mu+\sigma-2}{2}; -\nu, \nu+\sigma-1$ . Die Differentialgleichung (61) kann als die allgemeinste Differentialgleichung mit drei singulären Stellen der Bestimmtheit aufgefaßt werden, bei welcher für zwei singuläre Stellen die Wurzeln der beiden determinierenden Fundamentalgleichungen entsprechend einander gleich sind. (Olbricht, l. c. S. 13.) Wir beschränken uns auf den Fall  $\sigma = 2$ , d. h. auf

$$(62) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{\nu(\nu+1)(1-x^2) - \mu^2}{(1-x^2)^2} y = 0,$$

also auf (56).

Für  $x_1 = \frac{1-x}{2}, y = (x^2-1)^{\frac{\mu}{2}} y_1$ , bzw.  $x^2 = x_2, y = (x^2-1)^{\frac{\mu}{2}} y_2$ ,

bzw.  $(x - \sqrt{x^2-1})^2 = x_3, y = x_3^{\frac{\nu+\mu+1}{2}} (x^2-1)^{\frac{\mu}{2}} y_3$  erhält man

$$(63) \quad x_1(1-x_1)y_1'' + (\mu+1)(1-2x_1)y_1' + (\nu-\mu)(\nu+\mu+1)y_1 = 0$$

$$\text{bzw. } x_2(1-x_2)y_2'' + \left(\frac{1}{2} - \frac{2\mu+3}{2}x_2\right)y_2' + \frac{(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)}{4}y_2 = 0$$

$$\text{bzw. } x_3(1-x_3)\frac{d^2 y_3}{dx_3^2} + \left\{\left(\nu + \frac{3}{2}\right) - \left(\nu + 2\mu + \frac{5}{2}\right)x_3\right\}\frac{dy_3}{dx_3} \\ - (\nu + \mu + 1)\left(\mu + \frac{1}{2}\right)y_3 = 0.$$



Man hat also für  $y_1, y_2, y_3$  je eine hypergeometrische Differentialgleichung, für deren Integrale man je 24 Reihendarstellungen kennt. Andererseits erhält man aus der allgemeinen Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung Darstellungen durch bestimmte Integrale. Da  $\mu$  und  $\nu$  beliebige, auch komplexe Werte sind, empfiehlt es sich, die komplexe  $x$ -Ebene zwischen  $\pm 1$  aufzuschneiden. In abweichender Normierung zum Falle ganzer  $n$  und  $m$ , was wir durch Überstreichen ausdrücken, erhält man nach Hobson, *Lond. Phil. Soc. Trans.* 187 A, S. 443—531 (1896)

$$\begin{aligned}
 (64) \quad & \bar{P}_\nu^{(\mu)}(x) \\
 & \stackrel{(x+, 1+, x-, 1-)}{=} \frac{e^{-\nu\pi i}}{4 \sin \nu\pi} \frac{1}{2^\nu} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} (x^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \int (t^2-1)^\nu (t-x)^{-\nu-\mu-1} dt \\
 & = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1, 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Das Integral ist also als Doppelschleifenintegral erst um  $x$  und 1 im positiven, dann um  $x$  und 1 im negativen Sinne zu nehmen. Bei der Reihendarstellung muß  $\frac{|1-x|}{2} < 1$  sein. Wegen Ausartungen und dabei notwendig werdenden Abänderungen vgl. Hobson, l. c. Ein zweites Integral in der Normierung von E. W. Barnes, *Quart. J.* 39, S. 97—209 (1908) mit entsprechenden Ausartungen und notwendigen Abänderungen ist definiert durch

$$\begin{aligned}
 (65) \quad & \bar{Q}_\nu^{(\mu)}(x) = \frac{e^{-\mu\pi i} \sin(\nu+\mu)\pi e^{-(\nu+1)\pi i}}{4i \sin^2 \nu\pi} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \\
 & \stackrel{(-1+, 1-)}{(x^2-1)^{\frac{\mu}{2}}} \int (t^2-1)^\nu (t-x)^{-\nu-\mu-1} dt \\
 & = \frac{\sin(\nu+\mu)\pi}{\sin \nu\pi} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1) \sqrt{\pi}}{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \frac{(x^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{x^{\nu+\mu+1}} \\
 & F\left(\nu+\frac{\mu+2}{2}, \frac{\nu+\mu+1}{2}, \nu+\frac{3}{2}; x^2\right) \text{ mit } |x| > 1.
 \end{aligned}$$

Bei Hobson, l. c. ist die rechte Seite noch mit  $\frac{\sin \nu\pi e^{\mu\pi i}}{\sin(\nu+\mu)\pi}$  multipliziert.

Die Rekursionsformeln (23) gelten entsprechend für  $P_\nu(x)$  und  $Q_\nu(x)$  bei beliebigem  $\nu$ . Als Verallgemeinerung von (21) hat man (Barnes, S. 177) bei ganzem  $m$ , beliebigem  $\nu$

$$(66) \quad \bar{P}_\nu^{(m-\nu)}(x) = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}(m-\nu)}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \frac{d^m (x^2-1)^\nu}{dx^m},$$

wenn  $x$  nicht auf dem Schnitte  $-\infty, 1$  liegt; als Verallgemeinerung von (50) ist bei ganzem  $m$ , beliebigem  $\nu$

$$(67) \quad \bar{P}_\nu^{(m)}(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m}, \quad \bar{Q}_\nu^{(m)}(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m}.$$

Die acht Funktionen  $\bar{P}_\nu^{(\pm\mu)}$ ,  $\bar{P}_{-\nu-1}^{(\pm\mu)}(x)$ ,  $\bar{Q}_\nu^{(\pm\mu)}(x)$ ,  $\bar{Q}_{-\nu-1}^{(\pm\mu)}(x)$  lassen sich durch ein einziges Paar aus ihnen linear ausdrücken. Die Differentialgleichungen (63) geben, wenn man

$$(x^2-1)^{\frac{\mu}{2}} 2^\mu \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) = g_\mu, \quad \frac{(x^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{\Gamma(\nu - \mu + 1) 2^\mu \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} = h_\nu^\mu,$$

$$x + \sqrt{x^2-1} = z, \quad x + \sqrt{x^2-1} \cos \varphi = \tau, \quad x + \sqrt{x^2-1} \cosh t = \sigma$$

setzt, die weiteren Integraldarstellungen

$$(68) \quad \bar{P}_\nu^{(\mu)}(x) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{\pi}} g_\mu \int_{\left(z+, \frac{1}{z}-\right)} \frac{t^{\nu+\mu}}{(1-2xt+t^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} dt,$$

$$P_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\left(z+, \frac{1}{z}-\right)} \frac{t^\nu}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}} dt,$$

$$(69) \quad \bar{Q}_\nu^{(\mu)}(x) = \frac{i e^{-\nu\pi i} g_\mu}{4\sqrt{\pi} \sin \nu\pi} \int_{\left(\frac{1}{z}+, 0+, \frac{1}{z}-, 0-\right)} \frac{t^{\nu+\mu}}{(1-2zt+t^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} dt;$$

$$\text{speziell} \quad Q_\nu(x) = \int_0^{\frac{1}{z}} \frac{t^\nu}{(1-2zt+t^2)^{\frac{1}{2}}} dt \quad \text{bei } \Re(\nu) > -1.$$

( $\Re(\nu)$  bedeute reeller Teil von  $\nu$ .) Als Verallgemeinerung der Integrale (30), (31), (34) hat man

$$(70) \quad \bar{P}_\nu^{(\mu)}(x) \Gamma(\nu + 1) = \Gamma(\nu + \mu + 1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau^\nu \frac{\cos}{\sin} \mu \varphi d\varphi$$

und, wenn  $\mu$  eine ganze positive Zahl  $m$ ,  $\Re(x) > 0$  ist,

$$(-1)^m \Gamma(\nu - m + 1) \bar{P}_\nu^{(m)}(x) = \frac{1}{2\pi} \Gamma(\nu + 1) \int_0^{2\pi} \tau^{-\nu-1} \frac{\cos}{\sin} m \varphi d\varphi.$$

Ferner ist

$$(71) \quad \begin{aligned} \bar{Q}_\nu^{(\mu)}(x) \Gamma(\nu - \mu + 1) \sin \nu \pi \\ = \sin(\nu + \mu) \pi \Gamma(\nu + 1) \int_0^\infty \sigma^{-\nu-1} \cosh \mu t dt, \end{aligned}$$

wenn  $\Re(\nu + \mu + 1) > 0$ ,  $\Re(\nu - \mu + 1) > 0$ , schließlich

$$(72) \quad \begin{aligned} \bar{P}_\nu^{(\mu)}(x) - \frac{2}{\pi} \frac{\sin \mu \pi \sin \nu \pi}{\sin(\mu + \nu) \pi} \bar{Q}_\nu^{(\mu)}(x) \\ = h_\nu^\mu \int_0^\pi \tau^{\nu-\mu} \sin^{2\mu} \varphi d\varphi = h_\nu^\mu \int_0^\pi \tau^{-\nu-\mu-1} \sin^{2\mu} \varphi d\varphi \end{aligned}$$

für  $\Re\left(\mu + \frac{1}{2}\right) > 0$ ,  $\Re(x) > 0$ .

Das Mehler-Dirichletsche Integral (32) gilt noch, wenn statt  $n$  irgendeine Zahl  $\nu$  gesetzt wird; wegen weiterer Verallgemeinerungen von (32) vgl. Hobson, l. c. Eine eigenartige Integraldarstellung vermittelt  $\Gamma$ -Funktionen gibt Barnes, l. c.

Wegen der asymptotischen Darstellungen für  $\nu \rightarrow \infty$  bzw.  $\mu \rightarrow \infty$  vgl. Hobson und insbesondere Barnes; bei beiden finden sich weitere wichtige Eigenschaften abgeleitet.

## § 11. Ringfunktionen und Kegelfunktionen.

Ist  $\nu$  die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl, so erhält man die Ringfunktionen (toroidal functions). Vgl. C. Neumann, *Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe*. Halle 1864, Riemann, *Ges. W.*, S. 407 (1876), Heine, *Handbuch* 2, S. 283f., W. M. Hicks, *Lond. Phil. Soc. Trans.* A 171, S. 609—652 (1882), A. B. Basset, *Amer. J.* 15 (1893), Niven,

*Lond. M. S. Proc.* **24**, S. 372—386 (1893), Hobson, l. c., S. 523 ff.  
Es ist speziell

$$(73) \quad Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh x) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1)} e^{-(n+\frac{1}{2})x} F\left(\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, n+1, e^{-2x}\right).$$

Die entsprechende Darstellung von  $P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh x)$  ist umständlicher, vgl. die angegebenen Arbeiten.

Bei Randwertaufgaben für koaxiale Kreiskegel treten die Mehlerschen Kegelfunktionen, d. h. Kugelfunktionen  $P_{-\frac{1}{2}+ip}(\cos \Theta)$  auf, wo  $p$  irgendeine reelle Zahl ist. Thomson und Tait, *Handbuch* **1**, S. 270, F. G. Mehler, *J. f. Math.* **68**, S. 134 (1868), *Math. Ann.* **18**, S. 161 (1881), Heine, *Handbuch* **1**, S. 300, **2**, S. 219 ff., Hobson, l. c., S. 529. Entsprechend (32) und (68) hat man

$$(74) \quad P_{-\frac{1}{2}+ip}(\cos \Theta) = K_p(\cos \Theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\Theta} \frac{\cosh p\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \Theta)}} d\varphi \\ = \frac{2}{\pi} \cosh p\pi \int_0^{\infty} \frac{\cos pv}{\sqrt{2(\cosh v + \cos \Theta)}} dv.$$

Die Darstellung willkürlich gegebener Funktionen durch Kegelfunktionen führt nach Mehler auf Integraldarstellungen.

## § 12. Lamésche Polynome.

Um ein Integral von  $\Delta\varphi = 0$  zu bestimmen, das auf einem Ellipsoid

$$(75) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bei  $a > c > b$  gegebene Werte annimmt, führt Lamé, *J. de math.* **4**, S. 100—163 (1839), elliptische Koordinaten

$$(76) \quad x = \frac{a\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}, \\ z = \frac{\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}$$

mit  $a > c > \mu > b > \nu > 0$  ein.

Für konstantes  $\varrho$  bzw.  $\mu$  bzw.  $\nu$  liegt der Punkt  $x, y, z$  auf dem Ellipsoid (75) bzw. auf einem konfokalen einschaligen bzw. zweischaligen Hyperboloid. Setzt man

$$(77) \quad \varepsilon(\mu) = \int_b^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \mu^2}}, \quad \zeta(\nu) = \int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}},$$

$$\xi(\varrho) = \int_c^\varrho \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}},$$

so geht  $\Delta\varphi = 0$  über in

$$(\varrho^2 - \nu^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2} + (\varrho^2 - \mu^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + (\mu^2 - \nu^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = 0,$$

die durch den Ansatz  $\varphi = M(\mu) N(\nu) P(\varrho)$  in die drei Gleichungen

$$(78) \quad \frac{d^2 M(\mu)}{d\varepsilon^2} + (A\mu^2 + B)M(\mu) = 0,$$

$$\frac{d^2 N(\nu)}{d\xi^2} - (A\nu^2 + B)N(\nu) = 0,$$

$$\frac{d^2 P(\varrho)}{d\varrho^2} - (A\varrho^2 + B)P(\varrho) = 0$$

mit  $A$  und  $B$  als Parametern zerfällt. Führt man andererseits in (7) die Koordinaten

$$\cos \Theta = \frac{\mu \nu}{bc}, \quad \sin \Theta \cos \omega = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{b^2 - \nu^2}}{b \sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$\sin \Theta \sin \omega = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}}{c \sqrt{c^2 - b^2}},$$

so geht (7) über in

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + n(n+1)(\mu^2 - \nu^2)W = 0,$$

woraus man durch den Ansatz  $W = M(\mu) N(\nu)$  die ersten beiden Gleichungen (78) mit  $A = n(n+1)$  erhält. Da nun die allgemeinen Kugelfunktionen  $Y_n(\Theta, \omega)$  nach § 8 ganze Funktionen  $n^{\text{ten}}$  Grades von  $\mu \nu, \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{b^2 - \nu^2}, \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}$  sind, so liegt es nahe, nach Lösungen von (78) der Form

$$K_s^{(n)}(\mu) = \mu^n + a, \mu^{n-2} + \dots,$$

$$L_s^{(n)}(\mu) = \sqrt{\mu^2 - b^2} (\mu^{n-1} + b_1 \mu^{n-3} + \dots),$$

$$M_s^{(n)}(\mu) = \sqrt{c^2 - \mu^2} (\mu^{n-1} + c_1 \mu^{n-3} + \dots),$$

$$N_s^{(n)}(\mu) = \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2} (\mu^{n-2} + d_1 \mu^{n-4} + \dots)$$

zu suchen. Sei die ganze Zahl  $\sigma = \frac{n}{2}$  bzw.  $\frac{n-1}{2}$ , so erhält man durch die Forderung, daß die angesetzten Reihen abbrechen, also Polynome vom Grade  $n, n-1, n-1, n-2$  sind, für den Parameter  $B$  Gleichungen vom Grade  $\sigma+1, n-\sigma, n-\sigma, \sigma$ , von denen jede nur reelle voneinander verschiedene Wurzeln besitzt. Vgl. etwa Heine, *Handbuch*, S. 360 f. Man erhält also  $2n+1$  Lösungen  $E_n^{(s)}(\mu)$ , die Laméschen Polynome, wo  $s = 1, 2, \dots, 2n+1$  die verschiedenen Wurzeln der Gleichungen andeutet. Da ferner

$$(79) \quad \int_0^{\xi(b)} d\xi \int_0^{\varepsilon(c)} d\varepsilon (\mu^2 - \nu^2) E_n^{(r)}(\mu) E_n^{(r)}(\nu) E_n^{(s)}(\mu) E_n^{(s)}(\nu) = 0$$

für  $m \geq n$  und bei  $m = n$  für  $r \geq s$  ist, so sind die  $2n+1$  Funktionen  $E_n^{(s)}(\mu) E_n^{(s)}(\nu)$  als orthogonales Funktionensystem linear unabhängig und als lineare Kombinationen der  $2n+1$  Funktionen  $\cos m\omega P_n^{(m)}(\cos \Theta)$  und  $\sin m\omega P_n^{(m)}(\cos \Theta)$  bei  $m = 0, 1, \dots, n$  diesen äquivalent. Aus der Möglichkeit der Darstellung (55) folgt also unmittelbar die Darstellung einer auf dem Ellipsoide gegebenen Funktion durch die unendliche Reihe nach den Produkten  $E_n^{(s)}(\mu) E_n^{(s)}(\nu)$ , wobei die Koeffizienten wegen (79) unmittelbar angebbar sind. Als Verallgemeinerung der Darstellung analytischer Funktionen einer Veränderlichen durch Legendresche Polynome erhält man nach O. Volk, *Math. Zeitschrift* 23, S. 224—237, 1925 die Darstellung analytischer Funktionen zweier Veränderlicher durch Produkte Laméscher Polynome. Eine direkte Ableitung der Laméschen Polynome mittelst kartesischer Koordinaten gibt W. D. Niven, *Lond. Phil. Soc. Trans.* 182 A, S. 231—278 (1892).

Wir haben im obigen  $A = n(n+1)$  von vornherein bestimmt. Nach F. Klein, *Math. Ann.* 18, S. 410—427 (1884) kann man  $A$  und  $B$  vermittelt des zweiparametrischen Oszillationstheorems bestimmen. Wie Klein als erster in einer von der Göttinger philosophischen Fakultät 1890 gestellten, von Bôcher, vgl. I, gelösten Preisaufgabe hervorhebt, kann man nicht nur die



Entwicklungen nach Laméschen Polynomen, sondern fast alle hier überhaupt zu besprechenden Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen als Ausartungen der entsprechenden Entwicklungen bei der Lösung der Randwertaufgabe für einen von sechs konfokalen Zykliden begrenzten Raum erhalten. Bôcher gibt eine ausführliche Darstellung aller formalen Fragen, dann aber entwickelt er den Zusammenhang mit dem Oszillationstheorem. Wegen hinreichender Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer gegebenen Funktion nach den Produkten solcher Funktionen vgl. E. Hilb, *Math. Ann.* **63**, S. 38—53 (1907), D. Hilbert, *Gött. Nachr.*, 6. Mitt., S. 403 f. (1910), wegen der Integraldarstellungen bei gewissen Ausartungen E. Hilb, *Math. Ann.* **66**, S. 1—66 (1908).

## II. Besselsche Funktionen.

Vgl. neben der in I. genannten Literatur C. Neumann, *Theorie der Besselschen Funktionen*, Leipzig 1867, Lommel, *Studien über die Besselschen Funktionen*, Leipzig 1868, Gray and Mathews, *A treatise on Bessel's functions and their applications to physics*, London 1895, Graf und Gubler, *Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen*, Bern 1898, 1900, N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*, Leipzig 1904, Schafheitlin, *Die Theorie der Besselschen Funktionen*, Leipzig 1908, schließlich das 800 Seiten umfassende Buch von Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge 1922.

### § 1. Differentialgleichung der Besselschen Funktionen.

Führt man in die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0,$$

wo  $k^2$  ein Parameter ist, Polarkoordinaten  $x = r \cos \omega$ ,  $y = r \sin \omega$  ein, so erhält man

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} + k^2 \varphi = 0.$$

Setzt man  $\varphi = R(r) \Omega(\omega)$ , so zerfällt (2) in

$$(3) \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) R = 0 \quad \text{und}$$

$$(4) \quad \frac{d^2 \Omega}{d\omega^2} + \nu^2 \Omega = 0.$$

Schreibt man unter Abänderung der Bezeichnung für  $kr$  jetzt  $x$ , für  $R$  jetzt  $y$ , so erhält man die gewünschte Differentialgleichung

$$(5) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

Diese Differentialgleichung besitzt die Integrale

$$(6) \quad J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)},$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2m}}{m! \Gamma(-\nu+m+1)}.$$

Entsprechend der für irgend zwei Integrale  $y_1$  und  $y_2$  von (5) geltenden Gleichung

$$(7) \quad x(y_1 y'_2 - y_2 y'_1) = C,$$

ist

$$(8) \quad x(J_\nu(x) J'_{-\nu}(x) - J_{-\nu}(x) J'_\nu(x)) = -\frac{2 \sin \nu \pi}{\pi};$$

es bilden daher  $J_\nu(x)$  und  $J_{-\nu}(x)$  ein Fundamentalsystem von Integralen für (5), sofern  $\nu$  keine ganze Zahl  $n$  ist. Um auch diesen Fall zu umfassen, führt man

$$(9) \quad Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi}$$

ein, wobei

$$(10) \quad x(J_\nu(x) Y'_\nu(x) - Y_\nu(x) J'_\nu(x)) = \frac{2}{\pi}$$

ist, so daß also  $J_\nu(x)$  und  $Y_\nu(x)$  für alle  $\nu$  ein Fundamentalsystem bilden.

Für ganzzahliges  $\nu = n$  erhält man aus (9) durch Grenzübergang

$$(11) \quad \pi Y_n(x) = 2 J_n(x) \log \frac{x}{2}$$

$$- \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{s!(n+s)!} \left( \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} + \frac{\Gamma'(s+n+1)}{\Gamma(s+n+1)} \right)$$

$$- \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s}.$$

Entwicklungen nach Laméschen Polynomen, sondern fast alle hier überhaupt zu besprechenden Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen als Ausartungen der entsprechenden Entwicklungen bei der Lösung der Randwertaufgabe für einen von sechs konfokalen Zykliden begrenzten Raum erhalten. Bôcher gibt eine ausführliche Darstellung aller formalen Fragen, dann aber entwickelt er den Zusammenhang mit dem Oszillationstheorem. Wegen hinreichender Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer gegebenen Funktion nach den Produkten solcher Funktionen vgl. E. Hilb, *Math. Ann.* **63**, S. 38—53 (1907), D. Hilbert, *Gött. Nachr.*, 6. Mitt., S. 403 f. (1910), wegen der Integraldarstellungen bei gewissen Ausartungen E. Hilb, *Math. Ann.* **66**, S. 1—66 (1908).

## II. Besselsche Funktionen.

Vgl. neben der in I. genannten Literatur C. Neumann, *Theorie der Besselschen Funktionen*, Leipzig 1867, Lommel, *Studien über die Besselschen Funktionen*, Leipzig 1868, Gray and Mathews, *A treatise on Bessel's functions and their applications to physics*, London 1895, Graf und Gubler, *Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen*, Bern 1898, 1900, N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*, Leipzig 1904, Schafheitlin, *Die Theorie der Besselschen Funktionen*, Leipzig 1908, schließlich das 800 Seiten umfassende Buch von Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge 1922.

### § 1. Differentialgleichung der Besselschen Funktionen.

Führt man in die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0,$$

wo  $k^2$  ein Parameter ist, Polarkoordinaten  $x = r \cos \omega$ ,  $y = r \sin \omega$  ein, so erhält man

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} + k^2 \varphi = 0.$$

Setzt man  $\varphi = R(r) \Omega(\omega)$ , so zerfällt (2) in

$$(3) \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) R = 0 \quad \text{und}$$

$$(4) \quad \frac{d^2 \Omega}{d\omega^2} + \nu^2 \Omega = 0.$$

$$(16) \quad H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{n+1}{2}\pi\right)} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(n+r)!}{r!(n-r)!} \frac{1}{(2xi)^r},$$

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{n+1}{2}\pi\right)} \sum_{r=0}^n \frac{(n+r)!}{r!(n-r)!} \frac{1}{(2xi)^r}.$$

Manchmal, z. B. bei Watson, findet man die Funktionen

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} J_\nu\left(xe^{\frac{\pi i}{2}}\right) \quad \text{bei} \quad -\pi < \arg x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{und}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}\left(e^{\frac{\pi i}{2}}x\right).$$

## § 2. Rekursionsformeln.

Seien  $a, b$  willkürliche von  $\nu$  und  $x$  unabhängige Konstanten, sei ferner

$$(17) \quad Z_\nu(x) = aJ_\nu(x) + bY_\nu(x),$$

dann gilt

$$(18) \quad \begin{aligned} Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} Z_\nu(x), \\ Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) &= 2Z'_\nu(x), \\ xZ'_\nu(x) + \nu Z_\nu(x) &= xZ_{\nu-1}(x), \\ xZ'_\nu(x) - \nu Z_\nu(x) &= -xZ_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, wenn  $m$  eine ganze Zahl ist,

$$(19) \quad J_{\nu+m}(x) = J_\nu(x)R_{m,\nu}(x) - J_{\nu-1}(x)R_{m-1,\nu+1}(x) \quad \text{oder}$$

$$\frac{2 \sin \nu \pi}{\pi x} R_{m,\nu}(x) = J_{\nu+m}(x)J_{-\nu+1}(x) + (-1)^m J_{-\nu-m}(x)J_{\nu-1}(x).$$

Es folgt

$$(20) \quad R_{m,\nu}(x) = \sum_{r=0}^{r \leq \frac{m}{2}} (-1)^r \binom{m-r}{r} \frac{\Gamma(\nu+m-r)}{\Gamma(\nu+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r}.$$

Ist  $\nu$  eine negative ganze Zahl, so muß die rechte Seite in (20) umgeformt werden. Die Funktionen  $R_{m,\nu}(x)$  heißen Lommelsche Polynome. Lommel, *Math. Ann.* **3**, S. 475—487.

1871; 4, S. 103—116, 1871; A. Hurwitz, *Math. Ann.* **33**, S. 246—266, 1889; J. H. Graf, *Ann. di Mat.* (2) **23**, S. 45—65, 1895; L. Crelier, *Ann. di Mat.* (2) **24**, S. 131—163, 1896.

Es gilt

$$(21) \quad R_{m,\nu}(x) = (-1)^m R_{m,-\nu-m+1}(x),$$

$$R_{m-1,\nu+1}(x) + R_{m+1,\nu-1}(x) = \frac{2(\nu-1)}{x} R_{m,\nu}(x),$$

$$(22) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{2} \right)^{\nu+m} \frac{R_{m,\nu+1}(x)}{\Gamma(\nu+m+1)} = J_{\nu}(x).$$

Wegen weiterer Rekursionsformeln vgl. Lommel, *l. c.*; Nielsen, *Ann. di Mat.* (3) **6**, S. 331—340, 1901.

### § 3. Transformationen der Differentialgleichung (5).

Lommel, *Math. Ann.* **3**, S. 475—487 (1871), **14**, S. 510 bis 536 (1879). Setzt man nach (17)

$$(23) \quad u = x^{\alpha} Z_{\nu}(\beta x^{\gamma}),$$

so geht (5) über in

$$(24) \quad x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + (1 - 2\alpha) x \frac{du}{dx} + [\beta^2 \gamma^2 x^{2\gamma} + \alpha^2 - \gamma^2 \nu^2] u = 0$$

Ist

$$(25) \quad v = \sqrt{\frac{\psi(x)}{\psi'(x)}} Z_{\nu}(\psi(x)),$$

so genügt  $v$  der Differentialgleichung

$$(26) \quad v'' + \left[ \frac{1}{2} \frac{\psi'''(x)}{\psi'(x)} - \frac{3}{4} \left( \frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} \right)^2 + \left( \psi^2(x) - \nu^2 + \frac{1}{4} \right) \left( \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \right)^2 \right] v = 0.$$

Speziell genügt  $v = Z_{\nu}(e^x)$  der Differentialgleichung

$$v'' + (e^{2x} - \nu^2) v = 0.$$

Lommel untersucht auch Differentialgleichungen höherer Ordnung. Z. B. genügt, wenn  $n$  ganz,

$$v = x^{\frac{n}{2}} Z_n(\gamma \sqrt{x})$$

der Differentialgleichung

$$\frac{d^{2n}v}{dx^{2n}} = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2n} v}{x^n} \quad \text{mit} \quad \gamma^{2n} = (-1)^n c^{2n}.$$

Vgl. wegen weiterer Transformationen Emde, Jahnke, *Funktionentafeln*, Leipzig 1909, S. 166 ff.

#### § 4. Integraldarstellungen der Besselschen Funktionen.

Nach Bessel, *Berl. Abh.* S. 1—52, 1824 (1826), *Abh. I* S. 84—109 (1875) ist

$$\begin{aligned} (26a) \quad J_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\Theta - x \sin \Theta) d\Theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\Theta - x \sin \Theta) d\Theta \end{aligned}$$

Bei geradem  $n$  ist

$$\begin{aligned} (27) \quad J_n(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos n\Theta \cos(x \sin \Theta) d\Theta \\ &= \frac{2}{\pi} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos n\eta \cos(x \cos \eta) d\eta, \end{aligned}$$

bei ungeradem  $n$

$$\begin{aligned} (28) \quad J_n(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin n\Theta \sin(x \sin \Theta) d\Theta \\ &= \frac{2}{\pi} (-1)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos n\eta \sin(x \cos \eta) d\eta. \end{aligned}$$

(Vgl. Jacobi, *J. f. Math.* **15**, S. 1—26, (1836).) Nach Poisson, *J. Éc. Pol.* XII (19. Heft), S. 249—403 (1823), vgl. auch Bessel, l. c. S. 36/37, Jacobi, l. c. S. 13 gilt, wenn  $\nu$  eine



ganze Zahl  $n$ , nach Lommel, *Studien*, bei beliebigem  $\nu$ , für welches der reelle Teil, also  $\Re(\nu)$ ,  $> -\frac{1}{2}$  die Darstellung

$$(29) \quad J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(x \cos \Theta) \sin^{2\nu} \Theta \, d\Theta.$$

Um auf systematischem Wege die zahlreichen Integraldarstellungen für die Besselschen Funktionen zu erhalten, geht man zu der Differentialgleichung für  $u(x) = x^{-\varrho} Z_\nu(x)$ , also zu

$$(30) \quad x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + (1 + 2\varrho)x \frac{du}{dx} + (x^2 + \varrho^2 - \nu^2)u = 0$$

über und setzt  $u = \int e^{xt} v(t) dt$ , wo  $v$  der Laplaceschen Transformierten

$$(31) \quad \frac{d^2}{dt^2}[(1 + t^2)v(t)] - (1 + 2\varrho) \frac{d}{dt}[tv(t)] - (\nu^2 - \varrho^2)v = 0$$

genügt und der Integrationsweg so zu wählen ist, daß die Differenz von

$$e^{xt} \left[ x(t^2 + 1)v(t) - \frac{d}{dt}((1 + t^2)v(t)) + (1 + 2\varrho)tv(t) \right]$$

am Anfang und Ende des Weges verschwindet.

I. Der Ansatz  $\varrho = \nu$  führt auf Integrale vom Poissonschen Typus. Es ist  $v = (t^2 + 1)^{\nu - \frac{1}{2}}$  und, wenn man  $t$  durch  $it$  ersetzt, erhält man für  $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$  zunächst (29), nämlich

$$(32) \quad J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} e^{x i t} (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{i x \cos \Theta} \sin^{2\nu} \Theta \, d\Theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(x \cos \Theta) \sin^{2\nu} \Theta \, d\Theta \\
 &= \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \Theta) \cos^{2\nu} \Theta \, d\Theta.
 \end{aligned}$$

$\int_a^{b+c-}$  bezeichne wieder ein Schleifenintegral, bei dem der Integrationsweg von  $a$  ausgeht, um  $b$  im positiven, um  $c$  im negativen Sinne herumgeht und nach  $a$  zurückkehrt. Die unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen sollen beim Beginn des Integrationsweges als die Hauptwerte definiert sein. Dann erhält man durch obigen Ansatz bei beliebigem  $\nu$ , wenn  $A$  reell  $> 1$  ist, das Integral von Hankel, *Math. Ann.* **1**, S. 467—501 (1869):

$$(33) \quad J_\nu(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) x^{\nu(1+, -1-)}}{2^{\nu+1} \pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_A e^{ixt} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt.$$

Ist  $\nu + \frac{1}{2}$  keine ganze positive Zahl, so ist für

$$-\frac{\pi}{2} + \omega < \arg x < \frac{\pi}{2} + \omega, \quad |\omega| < \frac{\pi}{2},$$

$$(34) \quad J_{-\nu}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) e^{\nu \pi i} x^{\nu(-1+, 1+)}}{2^{\nu+1} \pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{\infty i e^{-i\omega}} e^{ixt} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt,$$

für  $-\frac{1}{2}\pi < \omega < \frac{3}{2}\pi$ ,  $-\frac{1}{2}\pi + \omega < \arg x < \frac{1}{2}\pi + \omega$ ,

$$(35) \quad H_\nu^{(1)}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) x^\nu}{2^\nu \pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{\infty i e^{-i\omega}}^{(1+)} e^{ixt} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt.$$

Setzt man  $t - 1 = -e^{-\frac{\pi i}{2}} \frac{u}{x}$ , so erfolgt für  $\Re\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0$  nach Deformation des Integrationsweges

$$(36) \quad H_{\nu}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{e^{i\left(x - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty e^{i\beta}} e^{-u} u^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} du$$

bei

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{1}{2}\pi + \beta < \arg x < \frac{3}{2}\pi + \beta$$

und entsprechend

$$(37) \quad H_{\nu}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{e^{-i\left(x - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty e^{i\beta}} e^{-u} u^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} du$$

bei

$$-\frac{3}{2}\pi + \beta < \arg x < \frac{1}{2}\pi + \beta.$$

Setzt man  $\arg x = \beta$ ,  $u = 2x \cot \Theta$ , so erhält man für  $\Re\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0$  daraus die Formeln von Schafheitlin, *J.f. Math.* **114**, S. 31—44, 1894:

$$(38) \quad J_{\nu}(x) = \frac{2^{\nu+1} x^{\nu}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu - \frac{1}{2}} \Theta \sin\left(x - \nu \Theta + \frac{1}{2} \Theta\right)}{\sin^{2\nu+1} \Theta} e^{-2x \cot \Theta} d\Theta$$

$$(39) \quad Y_{\nu}(x) = -\frac{2^{\nu+1} x^{\nu}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu - \frac{1}{2}} \Theta \cos\left(x - \nu \Theta + \frac{1}{2} \Theta\right)}{\sin^{2\nu+1} \Theta} e^{-2x \cot \Theta} d\Theta$$

II.  $\varrho = 0$ ,  $v = \frac{(\sqrt{t^2 + 1} - t)^{\pm \nu}}{\sqrt{t^2 + 1}}$ . Setzt man  $t = -i \sin \tau$ ,  $x = r e^{i\vartheta}$  und sei  $\eta$  ein beliebiger Winkel zwischen  $-\vartheta$  und  $\pi - \vartheta$ , so ist nach Sommerfeld, *Math. Ann.* **47**, S. 327—357, 1896, vgl. auch Hopf und Sommerfeld, *Arch. der Math. und Phys.* (3) **18**, S. 1—16, 1911:

$$(40) \quad H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\eta - \frac{\pi}{2} - i\infty}^{-\eta - \frac{\pi}{2} + i\infty} e^{-ix \sin \tau + i\nu \tau} d\tau,$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\eta - \frac{\pi}{2} - i\infty}^{\frac{3}{2}\pi - \eta + i\infty} e^{-ix \sin \tau + i\nu \tau} d\tau.$$

$$(41) \quad J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta - \frac{\pi}{2} + i\infty}^{\frac{3}{2}\pi - \eta + i\infty} e^{-ix \sin \tau + i\nu \tau} d\tau.$$

Für  $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$  folgt

$$(42) \quad J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \tau - \nu \tau) d\tau \\ - \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \sinh \tau - \nu \tau} d\tau.$$

Schläfli, *Ann. di Math.* (2) **5**, S. 199—205, 1873, *Math. Ann.* **3**, S. 134—149, 1871.

Für ganzzahliges  $\nu$ , also für  $\nu = n$  ergibt sich daraus die am Anfang erwähnte Integraldarstellung (26a) von Bessel.

Durch Änderung der Integrationsveränderlichen erhält man aus (40) und (41) für  $-\pi < \omega < \pi$ ,  $|\omega - \arg x| < \frac{\pi}{2}$

$$(43) \quad H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{0 e^{i\omega}}^{\infty e^{(\pi-\omega)i}} u^{-\nu-1} e^{\frac{1}{2}x(u - \frac{1}{u})} du,$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = -\frac{1}{\pi i} \int_{0 e^{i\omega}}^{\infty e^{(-\pi-\omega)i}} u^{-\nu-1} e^{\frac{1}{2}x(u - \frac{1}{u})} du.$$

$$(44) \quad J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(+0)} u^{-\nu-1} e^{\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)} du$$

für  $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$ .

Für reelles  $x$  und  $-1 < \Re(\nu) < 1$  folgt speziell

$$(45) \quad H_\nu^{(1)}(x) = \frac{2e^{-\frac{\nu}{2}\pi i}}{\pi i} \int_0^\infty e^{ix \cosh t} \cosh \nu t \, dt,$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = -\frac{2e^{+\frac{\nu}{2}\pi i}}{\pi i} \int_0^\infty e^{-ix \cosh t} \cosh \nu t \, dt$$

und insbesondere

$$(46) \quad J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{t^2-1}} dt, \quad Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\cos xt}{\sqrt{t^2-1}} dt,$$

Mehler, *Math. Ann.* **5**, S. 141—144, 1872.

III.  $\varrho = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{d^2}{dt^2} [(t^2+1)v] - 2 \frac{d}{dt} [tv(t)] - \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)v = 0$  ist für  $t = i\tau$  die Gleichung für die Kugelfunktionen vom Index  $\nu - \frac{1}{2}$ , und es ist nach Whittaker, *Lond. Soc. Proc.* **35**, S. 198 bis 206, 1903

$$(47) \quad J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi i} \frac{(-1+1+)}{\pi \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{\infty i e^{-i\omega}} e^{ixt} Q_{\nu - \frac{1}{2}}(t) dt$$

bei  $-\frac{\pi}{2} + \omega < \arg x < \frac{\pi}{2} + \omega$ .

IV. Schreibt man statt  $\nu$  jetzt  $\nu + n$ , wo  $n$  eine ganze Zahl ist und setzt man  $\varrho = \nu$ , so erhält man

$$\frac{d^2}{dt^2} [(t^2+1)v] - (1+2\nu) \frac{d}{dt} [tv(t)] - (2\nu n + n^2)v = 0$$

und, vgl. I, § 10 (58), für  $t = i \cos \Theta$  bei  $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ .

$$(48) \quad J_{\nu+n}(x) \\ = \frac{(-i)^n \Gamma(2\nu) n! \left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2\nu + n)} \int_0^\pi e^{ix \cos \Theta} \sin^{2\nu} \Theta C_n^\nu(\cos \Theta) d\Theta,$$

vgl. Gegenbauer, *Wien. Sitzber.* **67** (2), S. 202—204, 1873, **70**, S. 6—16, 1875, O. A. Smith, *Giorn. di Mat.* (2) **12**, S. 365—373, 1905.

Schließlich erwähnen wir noch die Integraldarstellungen von E. W. Barnes, *Cambr. Phil. Trans.* **20**, S. 253—279, 1908.

$$(49) \quad \pi e^{+\frac{1}{2}(\nu+1)\pi i} H_\nu^{(1)}(x) \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int \Gamma(-\nu-s) \Gamma(-s) \left(-\frac{1}{2}ix\right)^{\nu+2s} ds,$$

$$(50) \quad \pi e^{-\frac{1}{2}(\nu+1)\pi i} H_\nu^{(2)}(x) \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int \Gamma(-\nu-s) \Gamma(-s) \left(\frac{1}{2}ix\right)^{\nu+2s} ds,$$

wobei die Integrationswege von  $+\infty$  nach Umkreisung aller Pole der Integranden entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne nach  $+\infty$  zurückkehren.

Von speziellen Integralen hat das von Airy, *Cambr. Phil. Trans.* **6**, S. 379—402, 1838, eingeführte Integral

$$\int_0^\infty \cos(t^3 - xt) dt$$

nach Nicholson, *Phil. Mag.* (6) **18**, S. 6—17, 1909 bei reellem positiven  $x$  den Wert

$$\frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{x}{3}} \left[ J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right) + J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right) \right].$$

Verallgemeinerungen gibt Hardy, *Quart. J.* **41**, S. 226—240, 1910. Bez. anderer spezieller Integraldarstellungen vgl. Hardy, *Mess. of Math.* **40**, S. 44—51, 1911.



## § 5. Asymptotische Darstellungen.

Es sei

$$\begin{aligned}
 (51) \quad (\nu, m) &= (-1)^m \frac{\left(\frac{1}{2} - \nu\right)_m \left(\frac{1}{2} + \nu\right)_m}{m!} \\
 &= \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \cdots (4\nu^2 - (2m-1)^2)}{2^{2m} m!}.
 \end{aligned}$$

Nach Hankel, *Math. Ann.* **1**, S. 467—501, 1869 folgt aus (36) und (37)

$$\begin{aligned}
 (52) \quad H_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right)} \\
 &\quad \left[ \sum_{m=0}^{p-1} (-1)^m \frac{(\nu, m)}{(2ix)^m} + O(x^{-p}) \right]
 \end{aligned}$$

mit  $-\pi + 2\delta \leq \arg x \leq 2\pi - 2\delta$  und  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ,

$$\begin{aligned}
 (53) \quad H_\nu^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right)} \\
 &\quad \left[ \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(\nu, m)}{(2ix)^m} + O(x^{-p}) \right]
 \end{aligned}$$

mit  $-2\pi + 2\delta \leq \arg x \leq \pi - 2\delta$  und  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ .

Ferner ist für  $|\arg x| < \pi$

$$\begin{aligned}
 (54) \quad J_\nu(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\
 &\quad \left[ \sum_{m=0}^{p-1} (-1)^m \frac{(\nu, 2m)}{(2x)^{2m}} + O(x^{-2p}) \right] \\
 &\quad \left. - \sin\left(x - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \left[ \sum_{m=0}^{p-1} (-1)^m \frac{(\nu, 2m+1)}{(2x)^{2m+1}} + O(x^{-2p-1}) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$(55) \quad Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin \left( x - \frac{\nu \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\
\left. \left[ \sum_{m=0}^{p-1} (-1)^m \frac{(\nu, 2m)}{(2x)^{2m}} + O(x^{-2p}) \right] \right. \\
\left. + \cos \left( x - \frac{\nu}{2} \pi - \frac{\pi}{4} \right) \left[ \sum_{m=0}^{p-1} (-1)^m \frac{(\nu, 2m+1)}{(2x)^{2m+1}} + O(x^{-2p-1}) \right] \right\}.$$

$O(x^{-p})$  bedeutet bekanntlich eine Funktion, die für  $|x| \rightarrow \infty$  von der Größenordnung  $|x|^{-p}$  ist.

$J_\nu(x)$ , welches abgesehen von einem konstanten Faktor bei positivem reellem  $\nu$  als einziges Integral von (5) in  $x = 0$  endlich bleibt, wird also unendlich wie  $\cos x$ , wenn der imaginäre Teil von  $x$  positiv oder negativ unendlich wird.  $H_\nu^{(1)}(x)$  und  $H_\nu^{(2)}(x)$  werden für  $x = 0$  unendlich,  $H_\nu^{(1)}(x)$  verschwindet aber wie  $e^{ix}$ , wenn der imaginäre Teil von  $x$  positiv unendlich wird,  $H_\nu^{(2)}(x)$  wie  $e^{-ix}$ , wenn der imaginäre Teil von  $x$  negativ unendlich wird.

Ist  $x$  reell und positiv,  $\nu$  reell und  $\geq 0$ , so ist für  $2p > \nu - \frac{1}{2}$  in der letzten, für  $2p > \nu - \frac{3}{2}$  in der zweiten eckigen Klammer von (54) und (55) der Rest von gleichem Vorzeichen aber numerisch kleiner wie das erste vernachlässigte Glied. Hankel l. c. 491—494, Watson, *Treatise* S. 209. Eine einfache Ableitung der Darstellungen (52), (53) folgt nach Barnes, l. c. S. 273—279 aus (49) und (50). Hadamard, *Bull. Soc. M.* **36**, S. 77—85, 1908 gibt an Stelle der asymptotischen Darstellungen eine solche durch eine konvergente Reihenentwicklung und ein zu vernachlässigendes Glied, das bei reellem positivem  $x$  sich wie  $e^{-2x}$  verhält.

Schließlich erwähnen wir die asymptotische ( $\sim$ ) Darstellung

$$(56) \quad J_\nu^2(x) + Y_\nu^2(x) \sim \frac{2}{\pi x} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} 1 \cdot 3 \cdots (2m-1) \frac{(\nu, m)}{2^m x^{2m}} \right]$$

bei  $|\arg x| < \pi$ , L. Lorenz, *K. Danske Vidensk. Selskabs Skrifter* (6) **6**, S. 1—62, 1890, Orr, *Cambr. Proc.* **10**, S. 93—100.

Die asymptotischen Darstellungen der Besselschen Funktionen für große reelle  $x$  und  $\nu$  behandelt Debye, *Math. Ann.*

**67**, S. 535—558, 1909, allgemeiner für absolut große komplexe  $x$  und  $\nu$  *Münchn. Sitzber.* 1910, 5. Abt., vgl. auch Watson l. c. S. 225ff. Die von Debye verwendete Methode der Sattelpunkte besteht, wenn man von den Sommerfeldschen Integraldarstellungen (40) bei großem reellem positivem  $x$  ausgeht, in folgendem: Man bestimmt, wenn

$$f(\tau) = i \left( \sin \tau - \frac{\nu}{x} \tau \right),$$

für den reellen Teil von  $f(\tau)$ , also für  $\Re(f(\tau))$ , die Sattelpunkte d. h. die Punkte, in denen der Differentialquotient von  $\Re(f(\tau))$  für alle Richtungen verschwindet, für die also  $\cos \tau = \frac{\nu}{x}$  ist, und geht von diesen längs Kurven, auf denen der imaginäre Teil von  $f(\tau)$  konstant ist, nach dem Anfangs- bzw. Endpunkt des Integrationsweges. Dann kommen für die Berechnung des Integrals bei großem reellem positivem  $x$  nur die Teile des Integrationsweges in unmittelbarer Nachbarschaft der Sattelpunkte, in denen  $\Re(f(\tau))$  ein Minimum hat, in Betracht.

1. Der reelle Index  $\nu$  ist kleiner als das reelle positive Argument. Wir setzen für

$$0 < \tau_0 < \frac{\pi}{2}, \quad \nu = x \cos \tau_0, \quad A_0(\tau_0) = 1,$$

$$A_1(\tau_0) = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} \operatorname{ctg}^2 \tau_0,$$

$$A_2(\tau_0) = \frac{3}{128} + \frac{77}{576} \operatorname{ctg}^2 \tau_0 + \frac{385}{3456} \operatorname{ctg}^4 \tau_0, \quad \dots,$$

dann gelten die asymptotischen Darstellungen ( $\sim$ )

$$(57) \quad H_\nu^{(1)}(x) \sim \frac{1}{\pi} e^{ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\tau_0) \frac{e^{-i(2n+1)\frac{\pi}{4}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

$$(58) \quad H_\nu^{(2)}(x) \sim \frac{1}{\pi} e^{-ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\tau_0) \frac{e^{i(2n+1)\frac{\pi}{4}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

$$(59) \quad J_\nu(x) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\tau_0) \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}} \\ \cos \left\{ x (\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0) - (2n + 1) \frac{\pi}{4} \right\}.$$

2. Der Index  $\nu$  sei größer als das positiv reelle  $x$ , also  $\tau_0$  in  $\nu = x \cos \tau_0$  etwa negativ rein imaginär, so ist

$$(60) \quad H_\nu^{(1)}(x) \sim -\frac{i}{\pi} e^{-ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n(\tau_0) \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{ix}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

$$(61) \quad H_\nu^{(2)}(x) \sim \frac{i}{\pi} e^{ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n(\tau_0) \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{ix}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

$$(62) \quad J_\nu(x) \sim \frac{1}{\pi} e^{ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\tau_0) \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{ix}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

$$(63) \quad J_{-\nu}(x) \sim \frac{\sin \nu \pi}{\pi} e^{-ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n(\tau_0) \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{ix}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}}.$$

3. Der Index  $\nu$  und das reelle positive  $x$  seien beinahe gleich, d. h. es sei  $\frac{\nu}{x} = 1 - \varepsilon$ , wo  $|\varepsilon|$  klein gegen 1. Wir setzen

$$(64) \quad B_0(\varepsilon x) = 1, \quad B_1(\varepsilon x) = \varepsilon x, \quad B_2(\varepsilon x) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 x^2 - \frac{1}{20},$$

$$B_3(\varepsilon x) = \frac{1}{6} \varepsilon^3 x^3 - \frac{1}{15} \varepsilon x, \quad B_4(\varepsilon x) = \frac{\varepsilon^4 x^4}{24} - \frac{\varepsilon^2 x^2}{24} + \frac{1}{280},$$

$$B_5(\varepsilon x) = \frac{1}{120} \varepsilon^5 x^5 - \frac{1}{60} \varepsilon^3 x^3 + \frac{43}{8400} \varepsilon x, \dots$$

Dann ist

$$(65) \quad H_{\nu}^{(1)}(x) \sim -\frac{2}{3\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{2}{3}(n+1)\pi i}}{\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{n+1}{3}}} B_n(\varepsilon x) \sin \frac{n+1}{3} \pi \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right),$$

$$(66) \quad H_{\nu}^{(2)}(x) \sim -\frac{2}{3\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2}{3}(n+1)\pi i}}{\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{n+1}{3}}} B_n(\varepsilon x) \sin \frac{n+1}{3} \pi \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right),$$

$$(67) \quad J_{\nu}(x) \sim \frac{1}{3\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{3}\pi\right)}{\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{n+1}{3}}} B_n(\varepsilon x) \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right).$$

Für die Berechnung der  $B_n$  vgl. Meissel, *Astr. Nachr.* **127**, 1891, Airey, *Phil. Mag.* (6) **31**, S. 520—528, 1916.

Die so gewonnenen Resultate geben eine vollständige theoretische Lösung. Eine weitere Annäherung für den Fall, daß  $\frac{x}{\nu}$  nahezu 1 ist, während  $|x - \nu|$  sehr groß ist, geben Nicholson, *Phil. Mag.* (6) **19**, S. 228—249, spez. S. 247—249, 1910, Emde, *Arch. Math. Phys.* (3) **24**, S. 239—250, 1916, Watson, *Cambr. Phil. Soc. Proc.* **19**, S. 96—110, 1918. Weitere Eigenschaften von  $J_{\nu}(\nu x)$  für  $0 < x \leq 1$  finden sich bei Watson, *Lond. M. S. Proc.* (2) **16**, S. 150—174, 1917, ferner im *Treatise*, S. 252—261.

## § 6. Nullstellen der Besselschen Funktionen.

Aus der asymptotischen Darstellung (54) folgt, daß  $J_\nu(x)$  bei reellem  $\nu$  unendlich viele reelle Nullstellen hat; aus (6) ergibt sich, daß  $J_\nu(x)$  für  $\nu > -1$  keine rein imaginäre Nullstellen hat; der Greensche Satz beweist schließlich, daß für  $\nu > -1$   $J_\nu(x)$  überhaupt keine komplexen Nullstellen hat. Für  $\nu > -1$  sind also alle Nullstellen von  $J_\nu(x)$  reell. Sind  $a$  und  $b$  reell, so liegt nach einem bekannten Satze von Sturm zwischen zwei Nullstellen von  $J_\nu(x)$  eine Nullstelle von

$$aJ_\nu(x) + bY_\nu(x).$$

Die Anzahl der komplexen Nullstellen von  $J_\nu(x)$  bei  $\nu < -1$  hat Hurwitz, *Math. Ann.* **33**, S. 246—266, 1889, bestimmt. Alle auf endliche Anzahlen komplexer Nullstellen bei Besselschen Funktionen bezüglichen Fragen lassen sich durch einfachste Stetigkeitsbetrachtungen beantworten. (Hilb, *Math. Zeitschr.* **15**, S. 274—279, 1922.) Das gleiche gilt von den Nullstellen des Hauptzweiges der Hankelschen Funktionen.

Für  $-\pi \leq \arg x < \pi$  hat der Hauptwert von  $H_\nu^{(1)}(xe^{\frac{\pi i}{2}})$  keine,  $2n-1$ ,  $2n$  komplexe Nullstellen, deren Realteile alle negativ sind, wenn  $\nu < \frac{3}{2}$  bzw.  $\nu = \frac{4n-1}{2}$  bzw.  $\frac{4n-1}{2} < \nu < \frac{4n+3}{2}$  ist. Der Beweis von Falckenberg und Hilb, *Gött. Nachr.* 1916, S. 190—196 läßt sich, indem man ihn des geometrischen Charakters entkleidet, elementar mit Stetigkeitsbetrachtungen in wenigen Zeilen erbringen.

Die positiven Nullstellen von  $J_0(x)$  liegen in den Intervallen  $m\pi + \frac{3}{4}\pi$ ,  $m\pi + \frac{7}{8}\pi$ , die von  $Y_0(x)$  in  $m\pi + \frac{\pi}{4}$ ,  $m\pi + \frac{3}{8}\pi$ , wo  $m = 0, 1, 2, \dots$ , vgl. Schafheitlin, *J. f. Math.* **114**, S. 31—44, 1895. Für  $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq \alpha < \pi$  liegt je eine Nullstelle von  $J_\nu(x) \cos \alpha - Y_\nu(x) \sin \alpha$  in den Intervallen  $m\pi + \frac{3}{4}\pi + \frac{\nu}{2}\pi - \alpha$ ,  $m\pi + \frac{7}{8}\pi + \frac{\nu}{4}\pi - \alpha$ , vgl. Watson, *Treatise*, S. 490ff. Ebenda finden sich im Anschluß an Schafheitlin l. c. entsprechende Sätze für  $\frac{1}{2} < \nu < \frac{5}{2}$ . Allgemein liegt nach Schafheitlin l. c., ferner *J. f. Math.* **122**, S. 299 bis 321, 1900, die kleinste positive Nullstelle von  $J_\nu(x)$  für  $\nu > 0$  zwischen



$$\sqrt{\nu(\nu+2)} \text{ und } \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)},$$

für  $\nu > \frac{7}{2}$  genauer zwischen

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} \text{ und } \sqrt{2(\nu+1)(\nu+2)}.$$

Für  $\nu > \frac{1}{2}$  liegen die Nullstellen von  $J_\nu(x) \cos \alpha - Y_\nu(x) \sin \alpha$ , die größer sind als  $\frac{(2\nu+1)(2\nu+3)\pi}{4}$ , in den Intervallen  $m\pi - \alpha + \frac{\nu+1}{2}\pi$ ,  $m\pi - \alpha + \frac{2\nu+3}{4}\pi$ , wobei  $m$  ganz ist. Zur numerischen Berechnung der Nullstellen dienen die Reihenentwicklungen, asymptotischen Darstellungen, sowie gewisse mit den Oszillationstheoremen verwandte Sätze von Sturm. Vgl. Watson, *Treatise*, S. 505f., Mc. Mahon, *Ann. of Math.* **9**, S. 23—30, 1895, Kalähne, *Zeitschr. Math. Phys.* **54**, S. 55 bis 86, 1907, Marshall, *Ann. of Math.* (2) **11**, S. 153—160, 1910, Emde, *Arch. Math. Phys.* (2) **24**, S. 239—250, 1916.

### § 7. Additionstheoreme.

Nach Schläfli, *Math. Ann.* **3**, S. 134—149, 1871, Sonine, *Math. Ann.* **16**, S. 1—80, 1880, ist für  $|x| < |t|$

$$(68) \quad J_\nu(x+t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{\nu-m}(t) J_m(x),$$

$$Y_\nu(x+t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y_{\nu-m}(t) J_m(x),$$

nach Lommel, *Studien*, S. 11—16 im Anschluß an Bessel, *Berl. Abh.*, S. 1—52, 1824

$$(69) \quad (x+t)^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(\sqrt{x+t}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^m}{m!} x^{-\frac{1}{2}(\nu+m)} J_{\nu+m}(\sqrt{x})$$

und für  $|t| < |x|$

$$(70) \quad (x+t)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(\sqrt{x+t}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^m}{m!} x^{\frac{1}{2}(\nu-m)} J_{\nu-m}(\sqrt{x}).$$

Für  $\nu = -\frac{1}{2}$  bzw.  $+\frac{1}{2}$  folgt

$$(71) \quad \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \sqrt{x^2 - 2xt} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} J_{m-\frac{1}{2}}(x)$$

und für  $|t| < \frac{|x|}{2}$

$$(72) \quad \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \sqrt{x^2 + 2xt} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} J_{\frac{1}{2}-m}(x).$$

Es sei nun

$$(73) \quad \omega = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi},$$

dann ist nach Neumann, *Theorie der Besselschen Funktionen* für  $\nu = 0$ , allgemein nach Graf, *Math. Ann.* **43**, S. 136—144, 1893, wenn  $|ye^{\pm i\varphi}| < |x|$

$$(74) \quad J_{\nu}(\omega) \left( \frac{x - ye^{-i\varphi}}{x - ye^{i\varphi}} \right)^{\frac{\nu}{2}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{\nu+m}(x) J_m(y) e^{m\varphi i}.$$

Gegenbauer, *Wien. Ber.* **70** (2), S. 6—16, 1875, vgl. auch Sonine, *Math. Ann.* **16**, S. 1—80, 1880, für  $\nu = \frac{1}{2}$ . Clebsch, *J. f. Math.* **61**, S. 195—262, sp. S. 227, 1863, gibt die Additionstheoreme (vgl. I § 10)

$$(75) \quad \frac{J_{\nu}(\omega)}{\omega^{\nu}} = 2^{\nu} \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu}} \frac{J_{\nu+m}(y)}{y^{\nu}} C_m^{\nu}(\cos \varphi),$$

wenn  $\nu \neq 0, -1, -2, \dots$

$$(76) \quad \frac{Y_{\nu}(\omega)}{\omega^{\nu}} = 2^{\nu} \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{Y_{\nu+m}(x)}{x^{\nu}} \frac{Y_{\nu+m}(y)}{y^{\nu}} C_m^{\nu}(\cos \varphi),$$

wenn  $|ye^{\pm i\varphi}| < |x|$ .

Speziell ist

$$(77) \quad e^{ix \cos \varphi} = 2^{\nu} \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) i^m \frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu}} C_m^{\nu}(\cos \varphi).$$

### § 8. Funktionen, welche in der Theorie der Besselschen Funktionen auftreten.

1. Neumannsche Polynome  $O_n(t)$ . C. Neumann, Theorie der Besselschen Funktionen, S. 8—15, *J. f. Math.* **67**, S. 310 bis 314, 1867, setzt in

$$(78) \quad \frac{1}{t-x} = \sum_0^{\infty} \varepsilon_n J_n(x) O_n(t),$$

wo  $|x| < t$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ , sonst  $\varepsilon_n = 2$  und

$$(79) \quad O_0(t) = \frac{1}{t}, \quad O_n(t) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{n(n-m-1)!}{m! \left(\frac{1}{2}t\right)^{n-2m+1}}.$$

$O_n(t)$  ist also ein Polynom  $n+1$ ten Grades in  $\frac{1}{t}$ , es genügt der Differentialgleichung

$$(80) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{3}{t} \frac{dy}{dt} + \left(1 - \frac{n^2-1}{t^2}\right) y = \frac{1}{t} \cos^2 \frac{n}{2} \pi + \frac{n}{t^2} \sin^2 \frac{n}{2} \pi.$$

Rekursionsformeln geben Neumann l. c. S. 21, Schläfli, *Math. Ann.* **3**, S. 134—149, 1871, Gegenbauer, *Wien. Ber.* **65** (2), S. 33—35, 1872. Ist  $C$  eine beliebige den Anfangspunkt einfach umschließende, geschlossene Kurve, so ist bei ganzen  $n$  und  $m$

$$(81) \quad \int_C J_n(t) O_m(t) dt = 0$$

für  $n^2 \neq m^2$ ,

$$(82) \quad \int_C J_n(t) O_n(t) dt = \frac{2\pi i}{\varepsilon_n}.$$

Gegenbauer, *Wien. Ber.* **74** (2), S. 124—130, 1827, setzt verallgemeinernd

$$(83) \quad \frac{x^\nu}{t-x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,\nu}(t) J_{\nu+n}(x).$$

Die Entwicklung

$$(84) \quad \frac{1}{t^2-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n^2(x) \Omega_n(t)$$

§ 8. Funkt., welche in d. Theorie d. Besselschen Funkt. auftreten 1441

bei  $|x| < |t|$  führt nach C. Neumann, *Leipz. Ber.* **21**, S. 221 bis 256, 1869, auf die Polynome

$$(85) \quad \Omega_0(t) = \frac{1}{t^2}, \quad \Omega_n(t) = \frac{1}{4} \sum_{s=0}^n \frac{n(n+s-1)! (s!)^2}{(n-s)! (2s)! \left(\frac{1}{2}t\right)^{2s+2}} \quad \text{bei } n \geq 1.$$

2. Verallgemeinerung der Integraldarstellungen (26 a) führt bei nicht ganzzahligem  $\nu$  nach Anger, *Neueste Schr. Naturf. G. Danzig* **5**, S. 1—29, 1855, auf die Funktion

$$(86) \quad \Psi_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu \Theta - x \sin \Theta) d\Theta.$$

H. Weber, *Zürich. Vierteljahrschr.* **24**, S. 33—76, 1879, untersucht

$$(87) \quad \Omega_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\nu \Theta - x \sin \Theta) d\Theta$$

und beweist

$$(88) \quad \begin{aligned} \sin \nu \pi \Psi_\nu(x) &= \cos \nu \pi \Omega_\nu(x) - \Omega_{-\nu}(x), \\ \sin \nu \pi \Omega_\nu(x) &= \Psi_{-\nu}(x) - \cos \nu \pi \Psi_\nu(x). \end{aligned}$$

Asymptotische Darstellungen bei großem  $|x|$  geben Weber l. c., S. 48, Lommel, *Math. Ann.* **16**, S. 183—208, 1880, vgl. ferner Nielsen, *Handbuch*, S. 228f., Watson, *Treatise*, S. 315ff.; hier auch Darstellungen, wenn  $\nu$  und  $|x|$  gleichzeitig groß werden. Im Anschluß an (29) betrachtet Struve, *Petersb. Mém.* (7) **30**, 8, 1882, *Ann. der Phys.* (3) **17**, S. 1008—1016, 1882 die Funktion

$$(89) \quad H_\nu(x) = \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \cos \Theta) \sin^{2\nu} \Theta d\Theta$$

bei  $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ . Vgl. auch Siemon, *Programm Luisenschule Berlin* 1890.

3. Lommelsche Funktionen. Wegen Lommelscher Polynome vgl. § 2. Die sog. Lommelschen Funktionen genügen der Differentialgleichung

$$(90) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = x^{\mu-1}.$$

Lommel, *Math. Ann.* **9**, S. 425—444, 1876. Vgl. Nielsen, *Handbuch*, S. 86f., Watson, *Treatise*, S. 345ff.

Die Lommelschen Funktionen von zwei Veränderlichen  $U_\nu(w, x)$ ,  $V_\nu(w, x)$ , (Lommel, *Münch. Ab.* **15**, S. 233—328, 531—663, 1886) sind definiert durch

$$(91) \quad U_\nu(w, x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{x}\right)^{\nu+2m} J_{\nu+2m}(x),$$

$$(92) \quad V_\nu(w, x) = U_{-\nu+2}(w, x) + \cos\left(\frac{w}{2} + \frac{x^2}{2w} + \frac{\nu\pi}{2}\right).$$

Es genügen  $U_\nu(w, x)$  bzw.  $V_\nu(w, x)$  der Differentialgleichung

$$(93) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{w^2} y = \left(\frac{w}{x}\right)^{\nu-2} J_\nu(x)$$

bzw.

$$(94) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{w^2} y = \left(\frac{x}{w}\right)^\nu J_{-\nu+2}(x).$$

Für  $\Re(\nu) > 0$  ist

$$(95) \quad U_\nu(w, x) = \frac{w^\nu}{x^{\nu-1}} \int_0^1 J_{\nu-1}(xt) \cos\left\{\frac{w}{2}(1-t^2)\right\} t^\nu dt,$$

$$V_\nu(w, x) = -\frac{x^{\nu-1}}{w^{\nu-2}} \int_1^\infty J_{1-\nu}(xt) \cos\left\{\frac{w}{2}(1-t^2)\right\} t^{2-\nu} dt.$$

Wegen anderer Integralstellungen vgl. Hardy, *Mess. of Math.* **38**, p. 129—132, 1909, Watson, *Treatise*, p. 548 ff., wegen asymptotischer Darstellungen Lommel, l. c. S. 572 ff., Mayall, *Cambr. Phil. Soc. Proc.* **9**, p. 259—269, 1898.

## § 9. Entwicklungen nach Besselschen Funktionen.

1. Neumannsche Reihen. Aus (78) folgt für eine innerhalb und auf dem Kreise  $C$  um den Nullpunkt reguläre Funktion  $f(x)$

$$(97) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(x) \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_C f(t) O_n(t) dt.$$

Allgemeiner folgt aus (83)

$$(98) \quad x^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(x) \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) A_{n,\nu}(t) dt,$$

sofern  $\nu$  nicht negativ ganz ist.

Definiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(x)$  eine analytische Funktion  $f(x)$ , so heißt

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+n}}{\Gamma(\nu+n+1)} = f(x)$  zu  $g(x)$  assoziiert. Die beiden Reihen haben nach Pincherle, *Bologna Memorie* (4) 3, p. 151—180, 1881, denselben Konvergenzkreis; allgemein ist jede singuläre Stelle von  $f(x)$  eine solche von  $g(x)$ . Nielsen, *Math. Ann.* 55, S. 493—496, 1902.

Entsprechend (84) ist

$$(99) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (J_n(x))^2 \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_C t f(t) \Omega_n(t) dt.$$

Gegenbauer, *Wien. Ber.* 75 (2), S. 218—222, 1877, gibt Entwicklungen nach Produkten  $J_{\mu+\frac{n}{2}}(x) J_{\nu+\frac{n}{2}}(x)$ , Nielsen, *Hand-*

*buch*, S. 298, betrachtet Reihen der Form  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(x) J_{\varrho-n}(x)$

Spezielle Reihen sind

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x),$$



$$\cos(x \sin \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n} J_{2n}(x) \cos 2n \Theta,$$

$$\sin(x \sin \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n+1} J_{2n+1}(x) \sin(2n+1) \Theta,$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n} J_{2n}(x),$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+2n)(m+n-1)!}{n!} J_{m+2n}(x) \quad \text{mit } m = 1, 2, \dots;$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J_{\nu}(x) \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu} \Gamma(\nu+1-\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu+2n)\Gamma(\mu+n)}{n! \Gamma(\nu+1-\mu-n) \Gamma(\nu+n+1)} J_{\mu+2n}(x), \end{aligned}$$

wenn  $\nu - \mu$ ,  $\mu$  und  $\nu$  nicht negative ganze Zahlen sind. Ferner ist

$$\begin{aligned} (100) \quad \int_0^x J_{\nu}(t) dt &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{\nu+2n+1}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\nu+1} J_{\nu+n}(x)}{(\nu+1)(\nu+3) \dots (\nu+2n+1)} \end{aligned}$$

bei  $\Re(\nu) > -1$ . Speziell folgt daraus für die Fresnelschen Integrale, wenn  $x = \frac{\pi}{2} u^2$  gesetzt wird,

$$\begin{aligned} (101) \quad C(x) &= \int_0^u \cos \frac{\pi}{2} u^2 du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^x J_{-\frac{1}{2}}(x) dx \\ &= J_{\frac{1}{2}}(x) + J_{\frac{5}{2}}(x) + J_{\frac{9}{2}}(x) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (102) \quad S(x) &= \int_0^u \sin \frac{\pi}{2} u^2 du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^x J_{\frac{1}{2}}(x) dx \\ &= J_{\frac{3}{2}}(x) + J_{\frac{7}{2}}(x) + J_{\frac{11}{2}}(x) + \dots \end{aligned}$$

Wegen entsprechender Entwicklungen für Integrallogarithmus, Integralcosinus, Integralsinus vgl. etwa Nielsen, *Handbuch*, S. 97 ff.

2. Kapteynsche Reihen. Die Keplersche Gleichung

$$(103) \quad M = E - \varepsilon \sin E$$

hat für  $\varepsilon \leq 1$  die Lösung

$$(104) \quad E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon) \sin nM.$$

Bessel, *Berl. Abh.* S. 49—55, 1816—17 (1819); *Ges. W.* I, S. 17—20. Allgemein nennt man eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n J_{\nu+n}[(\nu+n)x]$$

Kapteynsche Reihe, *Ann. Éc. Norm.* (3) **10**, S. 91—120, 1893.

Ist

$$(105) \quad R(x) = \frac{x e^{\sqrt{1-x^2}}}{1 + \sqrt{1-x^2}},$$

so konvergiert

$$(106) \quad \frac{1}{t-x} = V_0(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) J_n(nx)$$

für  $|R(x)| < |R(t)|$  und  $|R(x)| < 1$ .

Dabei ist, vgl. (79),

$$(107) \quad V_n(t) = n(1-t^2) O_n(nt) + \sin^2 \frac{n\pi}{2} + t \cos^2 \frac{n\pi}{2}, \quad V_0(t) = \frac{1}{t}.$$

Ist

$$(108) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für } |R(x)| \leq a \leq 1$$

regulär, so ist

$$(109) \quad f(x) = \alpha_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n J_n(nx)$$

mit

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C V_n(t) f(t) dt,$$

wo längs  $C |R(t)| = a$  ist. Es ist

$$(110) \quad \alpha_0 = a_0, \quad \alpha_n = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{<\frac{n}{2}} \frac{(n-2m)^2 (n-m-1)!}{m! \binom{n}{2}^{n-2m+1}} a_{n-2m}.$$

Allgemeiner erhält man unter denselben Konvergenzbedingungen aus der Darstellung

$$(111) \quad \left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+m)}{(\nu+2m)^{\nu+1} m!} J_{\nu+2m}((\nu+2m)x)$$

$$(112) \quad x^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,\nu} J_{\nu+n}((\nu+n)x)$$

mit

$$\alpha_{n,\nu} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{<\frac{n}{2}} \frac{(n+\nu-2m)^2 \Gamma(\nu+n-m)}{\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}n\right)^{\nu+n-2m+1} m!} a_{n-2m}.$$

Die Konvergenz wird mittelst der Debyeschen Darstellungen, § 5, untersucht.

3. Besselsche Fourierreihen.  $J_\nu(\lambda x)$  genügt der Differentialgleichung

$$(113) \quad \frac{d}{dx} x \frac{dy}{dx} + \left(\lambda^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0.$$

Für  $\nu > -\frac{1}{2}$  bestimmen wir  $\lambda_m$  durch die Forderung

$$(114) \quad J_\nu(\lambda) = 0$$

oder durch

$$(115) \quad \lambda^{-\nu} [\lambda J'_\nu(\lambda) + H J_\nu(\lambda)] = 0.$$

Durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf die Greensche Funktion erhält man für eine gegebene Funktion

$f(x)$ , für welche  $\int_0^1 |\sqrt{t} f(t)| dt$  existiert und die für  $a < x < b$

mit  $0 < a < b < 1$  von beschränkter Schwankung ist, bei  $a < x < b$  entsprechend (114) bzw. (115)

$$(116) \quad \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{J_{\nu+1}^2(\lambda_m)} \int_0^1 t f(t) J_{\nu}(\lambda_m t) dt J_{\nu}(\lambda_m x) \quad \text{bzw.}$$

$$(117) \quad \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\lambda_m^2 \int_0^1 t f(t) J_{\nu}(\lambda_m t) dt J_{\nu}(\lambda_m x)}{(\lambda_m^2 - \nu^2) J_{\nu}^2(\lambda_m) + \lambda_m^2 J_{\nu}'^2(\lambda_m)}.$$

Ist  $H + \nu = 0$ , so ist in (115)  $\lambda_1 = 0$ , das erste Glied der Reihe in (117) wird  $2(\nu + 1)x^{\nu} \int_0^1 t^{\nu+1} f(t) dt$ , ist  $H + \nu$  negativ, so existieren zwei rein imaginäre Wurzeln  $\lambda_m$  von (117). Vgl. W. H. Young, *Lond. M. S. Proc.* (2) **18**, S. 163—200,

1920. Existiert  $\int_0^1 |\sqrt{t} f(t)| dt$ , so sind die Reihen für  $0 < x < 1$

durch arithmetische Mittel erster Ordnung summierbar, wenn  $f(x+0)$  und  $f(x-0)$  existieren. Wegen Summabilität und dem Verhalten in den Endpunkten vgl. Moore, *Amer. M. S. Trans.* **10**, S. 391—435, 1909; **12**, S. 181—206, 1911; **21**, S. 107—156, 1920; bzw. Übertragung der Riemannschen Theorie der trigonometrischen Reihen vgl. Watson, *Treatise*, S. 649.

4. Reihen von Schlömilch, *Zschr. Math. Phys.* **2**, S. 137 bis 165, 1857. Es besitze  $f(x)$  für  $0 \leq x \leq \pi$  eine stetige Ableitung von beschränkter Schwankung. Dann ist in diesem Intervall

$$(118) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(mx)$$

mit 
$$a_0 = 2f(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u f'(u \sin \varphi) d\varphi du,$$

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u f'(u \sin \varphi) \cos m\varphi d\varphi du, \quad m > 0.$$

Doch gibt es die Nullentwicklung

$$(119) \quad 0 = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_0(mx) \text{ für } 0 < x < \pi.$$

Für  $x = 0$  oszilliert, für  $x = \pi$  divergiert die Reihe in (119). Andererseits ist bis auf einen konstanten Faktor (119) die einzige Nullentwicklung für das Intervall  $0 < x < \pi$ . Watson, *Treatise*, S. 643. Wegen Verallgemeinerungen der Reihen von Schlömilch vgl. etwa Watson, *Treatise*, S. 621 ff.

5. Integraldarstellungen. Es existiere  $\int_0^{\infty} |f(x)\sqrt{x}| dx$ , dann ist für  $\nu \geq -\frac{1}{2}$

$$(120) \quad \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \int_0^{\infty} f(t) J_{\nu}(\lambda t) J_{\nu}(\lambda x) t dt = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)),$$

wenn  $x$  innerhalb eines Intervalles liegt, in dem  $f(t)$  von beschränkter Schwankung ist. Hankel, *Math. Ann.* 8, S. 471 bis 494, 1875; H. Weber, *Math. Ann.* 6, S. 146—161, 1873 gibt eine Verallgemeinerung für beliebige Zylinderfunktionen. Unter entsprechenden, hier zu umständlich auszusprechenden Voraussetzungen über  $f(r, \varphi)$  gilt

$$(121) \quad \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(R, \Phi) J_0[\lambda \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\Phi - \varphi)}] R dR d\Phi \\ = 2\pi f(r, \varphi).$$

C. Neumann, *Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand*, Halle 1862. Gegenbauer, *Wien. Ber.* 95 (2), S. 409/10, 1887; vgl. Watson, *Treatise*, S. 453 ff.

## § 10. Bestimmte Integrale mit Besselschen Funktionen.

Solche Integrale lassen sich in zahlreichen Fällen durch Reihenentwicklungen, durch Ersetzen der Besselschen Funktionen durch ein bestimmtes Integral, vermittels des Residuensatzes, sowie vermittels Zurückführung auf die Integration linearer Differentialgleichungen berechnen. Bei der erdrückenden Zahl der Typen verweise ich auf Nielsen, *Handbuch*, S. 179—258; Watson, *Treatise*, S. 323—449.

### III. Funktionen des elliptischen und parabolischen Zylinders. Orthogonale Polynome.

#### § 1. Funktionen des elliptischen Zylinders.

Setzt man

(1)  $x = \cosh \xi \cos \eta$ ,  $y = \sinh \xi \sin \eta$  mit  $\xi \geq 0$ ,  $-\pi < \eta \leq \pi$ ,  
so erhält man für konstante  $\xi$  bzw.  $\eta$  konfokale Ellipsen bzw. Hyperbeln.

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0$$

geht über in

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + k^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) \varphi = 0.$$

Setzt man

$$(4) \quad \varphi = \Xi(\xi) H(\eta),$$

so zerfällt (3) in

$$(5) \quad \frac{d^2 \Xi(\xi)}{d\xi^2} + (k^2 \cosh^2 \xi + B) \Xi(\xi) = 0,$$

$$(6) \quad \frac{d^2 H(\eta)}{d\eta^2} - (k^2 \cos^2 \eta + B) H(\eta) = 0,$$

wo (5) aus (6) entsteht, indem man  $\eta$  durch  $i\xi$  ersetzt. Unter Abänderung der Bezeichnung betrachten wir

$$(7) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - (k^2 \cos^2 x + B) y = 0$$

oder

$$(8) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + (q^2 + 2q_1 \cos 2x) y = 0.$$

Nach Untersuchungen von Lindemann, *Math. Ann.* **22**, S. 117 bis 123, 1883; Stieltjes, *Astr. Nachr.* **109**, S. 145—152, 261 bis 266, 1884; Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Paris 1893, 2, Kap. 17 hat (8) zwei Integrale

$$(9) \quad y_1 = e^{i h x} \varphi_1(x), \quad y_2 = e^{-i h x} \varphi_2(x),$$

wo  $\varphi_1(x)$  und  $\varphi_2(x)$  periodische Funktionen mit der Periode  $\pi$  sind. Ist  $q$  nicht eine ganze Zahl, so erhält man für  $h$  die Gleichung



$$(10) \quad \cos h\pi = \cos q\pi \left[ 1 - \frac{\pi^2}{512q^2(1-q^2)^2} q_1^4 + \dots \right] \\ + \sin q\pi \left[ -\frac{\pi}{16q(1-q^2)} q_1^2 + \frac{(15q^4 - 35q^2 + 8)\pi}{1024q^3(1-q^2)^3(2^2 - q^2)} q_1^4 - \dots \right].$$

In der Physik hat man meistens die folgende Aufgabe: In (7) ist  $k^2$  gegeben und  $B$  als Eigenwert so zu bestimmen, daß (7) eine periodische Lösung hat. Diese periodischen Lösungen bilden ein orthogonales Funktionensystem. Ihre Existenz folgt aus dem Oszillationstheorem. Heine, *Handbuch* **1**, S. 401–415, **2**, S. 202–210 unterscheidet 4 Klassen der gesuchten periodischen Lösungen. Die erste Klasse setzt er in der Form

$$(11) \quad \mathfrak{E}_1(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos 2nx$$

an, die 2. Klasse enthält nur Glieder  $\cos(2n+1)x$ , die 3.  $\sin(2n+1)x$ , die 4.  $\sin 2nx$ . Der Parameter  $B$  wird z. B. im ersten Falle durch die Forderung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  bestimmt und

die Existenz unendlich vieler Eigenwerte mittels Sturmscher Methoden erwiesen. Für kleine Werte von  $k^2$  entwickelt Mathieu, *J. de Math.* (2) **13**, S. 137–203, 1868 nach Potenzen von  $k^2$ , vgl. auch Sieger, *Ann. der Phys.* **27**, S. 626–664, 1908. Nach Whittaker, *Proc. of 5. intern. Math. Kongr.* I, S. 366–371, 1912 genügen die periodischen Lösungen von (8) der homogenen Integralgleichung

$$(12) \quad y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} e^{2i\sqrt{q_1} \sin x \sin t} y(t) dt,$$

wo  $\lambda$  ein Parameter ist. Heine, *Handbuch*, S. 413ff., stellt die periodischen Lösungen durch Reihen nach Besselschen Funktionen dar, vgl. auch Sieger, l. c.; O. Volk, *Diss.* München 1920 gibt die Entwicklung beliebiger analytischer Funktionen nach Funktionen des elliptischen Zylinders.

## § 2. Funktionen des parabolischen Zylinders als Spezialfall allgemeinerer Funktionen.

Setzt man

$$(13) \quad x = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}, \quad y = \xi\eta \quad \text{bei} \quad 0 < \eta < \infty, \quad -\infty < \xi < \infty,$$

so sind die neuen Koordinatenlinien konfokale Parabeln. (2) geht über in

$$(14) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + k^2(\xi^2 + \eta^2)\varphi = 0.$$

Setzt man

$$(15) \quad \varphi = \Xi(\xi)H(\eta),$$

so erhält man

$$(16) \quad \frac{d^2 \Xi(\xi)}{d\xi^2} + (k^2 \xi^2 + B)\Xi(\xi) = 0,$$

$$(17) \quad \frac{d^2 H(\eta)}{d\eta^2} + (k^2 \eta^2 - B)H(\eta) = 0.$$

Vgl. Weber, *Math. Ann.* **1**, S. 1—36, 1869; C. Baer, *Gymn.-Programm*. Küstrin 1883; P. Epstein, *Diss.* München 1914.

Setzt man

$$\xi = \frac{u}{\sqrt{2ik}}, \quad \eta = \frac{v}{\sqrt{2ik}}, \quad B = 2ik\left(\nu + \frac{1}{2}\right),$$

so gehen (16) und (17) über in

$$(18) \quad \frac{d^2 \Xi}{du^2} - \left(\frac{u^2}{4} - \nu - \frac{1}{2}\right)\Xi = 0,$$

$$(19) \quad \frac{d^2 H}{dv^2} - \left(\frac{v^2}{4} + \nu + \frac{1}{2}\right)H = 0.$$

Unter Abänderung der Bezeichnung betrachten wir die Differentialgleichung

$$(20) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right)y = 0.$$

Nach Vorgang von Whittaker, *Am. M. S. Bull.* **10**, S. 125—134, 1904, vgl. auch Whittaker und Watson, *Modern Analysis*, S. 337 ff., 1920, betrachten wir zunächst die Differentialgleichung

$$(21) \quad \frac{d^2 W}{dx^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{x}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2}\right]W = 0.$$

Ist  $2\mu$  keine ganze Zahl, so hat (21) die beiden Integrale

$$(22) \quad M_{\kappa, \pm \mu}(x) = x^{\frac{1}{2} \pm \mu} e^{-\frac{x}{2}} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2} \pm \mu - \kappa}{1!(1 \pm 2\mu)} x + \frac{\left(\frac{1}{2} \pm \mu - \kappa\right) \left(\frac{3}{2} \pm \mu - \kappa\right)}{2!(1 \pm 2\mu)(2 \pm 2\mu)} x^2 + \dots \right\},$$

wobei

$$(23) \quad M_{\kappa, \mu}(x) = e^{-\pi i \left(\frac{1}{2} + \mu\right)} M_{-\kappa, \mu}(e^{\pi i} x)$$

ist. Eine andere Lösung von (21) ist

$$(24) \quad W_{\kappa, \mu}(x) = \frac{-1}{2\pi i} \Gamma\left(\kappa + \frac{1}{2} - \mu\right) e^{-\frac{x}{2}} x^{\kappa} \int_{\infty}^{(0+)} (-t)^{-\kappa - \frac{1}{2} + \mu} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^{\kappa - \frac{1}{2} + \mu} e^{-t} dt,$$

wobei der Integrationsweg  $t = -x$  nicht einschließen soll. Um alle Werte von  $\mu$ , speziell den Fall, daß  $\kappa - \frac{1}{2} - \mu$  eine negative ganze Zahl ist, zu umfassen, setzt man, wenn  $\Re(\kappa - \frac{1}{2} - \mu) < 0$ ,

$$(25) \quad W_{\kappa, \mu}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\kappa}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \kappa + \mu\right)} \int_0^{\infty} t^{-\kappa - \frac{1}{2} + \mu} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^{\kappa - \frac{1}{2} + \mu} e^{-t} dt;$$

wobei allerdings  $x$  nicht negativ reell sein darf. Ein zweites Integral von (21) ist  $W_{-\kappa, \mu}(-x)$ .

Ist  $|\arg x| < \frac{3}{2}\pi$ ,  $2\mu$  nicht ganz, so ist

$$(26) \quad W_{\kappa, \mu}(x) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \kappa\right)} M_{\kappa, \mu}(x) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)} M_{\kappa, -\mu}(x).$$

Für große  $|x|$  hat man, sofern  $|\arg x| < \frac{3}{2}\pi$ , die asymptotische Darstellung

$$(27) \quad W_{\kappa, \mu}(x) \sim e^{-\frac{x}{2}} x^{\kappa} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{ \mu^2 - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)^2 \right\} \left\{ \mu^2 - \left(\kappa - \frac{3}{2}\right)^2 \right\} \cdots \left\{ \mu^2 - \left(\kappa - n + \frac{1}{2}\right)^2 \right\}}{n! x^n} \right\}.$$

Als erstes Integral von (20) erhält man

$$(28) \quad y = 2^{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}} \left( \frac{x^2}{2} \right) = D_{\nu}(x),$$

so daß nach (26)

$$(29) \quad D_{\nu}(x) = 2^{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)} M_{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}} \left( \frac{x^2}{2} \right) + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} M_{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4}} \left( \frac{x^2}{2} \right) \right\}.$$

Neben der aus (25) folgenden Integraldarstellung hat man

$$(30) \quad D_{\nu}(x) = -\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{\infty}^{(0+)} e^{-xt - \frac{1}{2}t^2} (-t)^{-\nu-1} dt.$$

Andere Lösungen von (20) sind

$$D_{\nu}(-x), \quad D_{-\nu-1}(ix), \quad D_{-\nu-1}(-ix);$$

durch Vergleich der ersten Glieder der Potenzreihen folgt

$$(31) \quad D_{\nu}(x) = e^{\pm \nu \pi i} D_{\nu}(-x) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\pm \frac{1}{2}(\nu+1)\pi i} D_{-\nu-1}(\mp ix).$$

Aus (30) erhält man die Rekursionsformeln

$$(32) \quad D_{\nu+1}(x) - x D_{\nu}(x) + \nu D_{\nu-1}(x) = 0,$$

$$(33) \quad D_{\nu}'(x) + \frac{1}{2} x D_{\nu}(x) - \nu D_{\nu-1}(x) = 0.$$

Nach (27) hat man für  $|\arg x| < \frac{3}{4}\pi$  die asymptotische Darstellung

$$(34) \quad D_{\nu}(x) \sim e^{-\frac{x^2}{4}} x^{\nu} \left\{ 1 - \frac{\nu(\nu-1)}{2x^2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2 \cdot 4 x^4} \dots \right\}.$$

Vermittels (31) ist dann für

$$\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{5}{4}\pi$$

$$(35) \quad D_\nu(x) \sim e^{-\frac{x^2}{4}} x^\nu \left\{ 1 - \frac{\nu(\nu-1)}{2x^2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2 \cdot 4 x^4} - \dots \right\} \\
- \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\nu\pi i} e^{\frac{x^2}{4}} x^{-\nu-1} \left\{ 1 + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2x^2} \right. \\
\left. + \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}{2 \cdot 4 x^4} + \dots \right\}.$$

Dann und nur dann, wenn  $\nu$  eine ganze Zahl  $n$  ist, hat (34) für alle  $x$  Gültigkeit, und statt  $\sim$  hat man  $=$ . Ferner geht (30) über in

$$(36) \quad D_n(x) = -\frac{n!}{2\pi i} e^{-\frac{x^2}{4}} \int^{(0+)} e^{-xt - \frac{1}{2}t^2} (-t)^{-n-1} dt \\
= (-1)^n \frac{n!}{2\pi i} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{(x+)}^{\frac{x+}{2}} \frac{e^{-\frac{\tau^2}{2}}}{(\tau-x)^{n+1}} d\tau = (-1)^n e^{\frac{x^2}{4}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Die Polynome

$$(37) \quad \mathfrak{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} D_n(x\sqrt{2})$$

heißen Hermite'sche Polynome (*C. R.* 58, S. 266—273, 1864). Es ist also

$$(38) \quad \mathfrak{H}_n(x) = (2x)^n - n(n-1)(2x)^{n-2} \\
+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} - \dots,$$

$$(39) \quad \frac{d^2 \mathfrak{H}_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{d \mathfrak{H}_n(x)}{dx} + 2n \mathfrak{H}_n(x) = 0,$$

$$(40) \quad \frac{d \mathfrak{H}_n(x)}{dx} = 2n \mathfrak{H}_{n-1}(x),$$

$$(41) \quad \mathfrak{H}_n(x) - 2x \mathfrak{H}_{n-1}(x) + 2(n-1) \mathfrak{H}_{n-2}(x) = 0, \\
\mathfrak{H}_0(x) = 1, \quad \mathfrak{H}_1(x) = 2x, \quad \mathfrak{H}_2(x) = 4x^2 - 2, \quad \dots$$

$$(42) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{H}_m(x) \mathfrak{H}_n(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{bzw. } 2^n n! \sqrt{\pi} \quad \text{für } n \neq m \\
\text{bzw. } n = m.$$

Nach Weyl, *Diss.* Göttingen 1908, *Math. Ann.* 66, S. 273—324, 1908, spez. S. 306 ist jede einmal stetig differenzierbare Funk-

tion  $f(x)$ , für welche  $xf(x)$  und  $f'(x)$  quadratisch integrierbar sind, in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$(43) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f(t) \mathfrak{H}_n(t) dt \mathfrak{H}_n(x)$$

entwickelbar. Vgl. auch Galbrun, *Bull. Soc. M.* **41**, S. 24—47, 1913; Kapteyn, *Amst. Ak. Versl.* **22**, S. 1057—69, 1285—94, 1913/14; ebenda **23**, S. 49—59, 1914; Markoff, *Bull. Ac. Petersb.* (5) **9**, S. 435—46, 1898 untersucht die Nullstellen von  $\mathfrak{H}_n(x)$ , die alle reell sind.

### § 3. Darstellung verschiedener Funktionen durch $W_{\kappa, \mu}(x)$ .

Es ist 
$$\int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{2\sqrt{x}} W_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(x^2),$$

der Integrallogarithmus

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} = -\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-\log x}} W_{-\frac{1}{2}, 0}(-\log x),$$

der Integralkosinus

$$\text{Ci}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{e^{\frac{i}{2}x + \frac{\pi}{4}i}}{2\sqrt{x}} W_{-\frac{1}{2}, 0}(-ix) + \frac{e^{-\frac{ix}{2} - \frac{\pi i}{4}}}{2\sqrt{x}} W_{-\frac{1}{2}, 0}(ix).$$

Vgl. Whittaker, l. c. Wegen weiterer Ausführungen über die hier erwähnten Funktionen vgl. etwa Nielsen, *Der Integrallogarithmus und verwandte Transzendenten*. Leipzig 1906. Auch die Besselschen Funktionen sind ein Spezialfall der Funktionen  $W_{\kappa, \mu}(x)$ , und zwar ist

$$J_{\nu}(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2\nu+1}{2}} i^{\nu+\frac{1}{2}} \Gamma(\nu+1)} M_{0, \nu}(2ix).$$



## § 4. Orthogonale Polynome.

Als Verallgemeinerung der Legendreschen und Hermite'schen Polynome kann man sich die Aufgabe stellen, zu einer im Intervalle  $a \leq x \leq b$  nicht negativen Funktion  $p(x)$  die durch Orthogonalisierung von  $\sqrt{p(x)}$ ,  $x\sqrt{p(x)}$ ,  $x^2\sqrt{p(x)}$ ,  $\dots$  entstandenen mit  $\sqrt{p(x)}$  multiplizierten Polynome  $Q_0(x)$ ,  $Q_1(x)$ ,  $\dots$  zu bilden. Für  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  erhält man die Tschebyscheffschen Polynome

$$(44) \quad T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x),$$

*Petersb. Mém. Ac.* (6) 7, S. 199—291, 1859. Das Maximum von  $|T_n(x)|$  für  $-1 \leq x \leq +1$  nimmt den kleinsten Wert an, der bei einem Polynom  $n^{\text{ten}}$  Grades mit reellen Koeffizienten und höchstem Koeffizienten 1 möglich ist.  $T_n(x)$  genügt der Differentialgleichung

$$(45) \quad (1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0;$$

es ist

$$(46) \quad \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)(2t)^n = \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2},$$

und für  $n > 1$

$$(47) \quad T_{n+1}(x) - xT_n(x) + \frac{1}{4}T_{n-1}(x) = 0,$$

ferner

$$(48) \quad \int_{-1}^{+1} (T_n(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2^{2n-1}}.$$

Für  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $p(x) = x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-\beta}$  bei  $\beta > 0$ ,  $\alpha - \beta > -1$  erhält man die Jacobischen Polynome

$$(48) \quad J_n(\alpha, \beta; x) = \frac{x^{1-\beta}(1-x)^{\beta-\alpha}}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)} \frac{d^n}{dx^n} [x^{\beta+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\beta}]$$

als Lösungen der Differentialgleichung

$$x(1-x)y'' + [\beta - (\alpha+1)x]y' + (\alpha+n)ny = 0.$$

Jacobi, *J. f. Math.* 56, S. 149—165, 1859.

Für  $a = 0$ ,  $b = \infty$ ,  $p(x) = e^{-x}$  erhält man die Laguerreschen Polynome

$$(49) \quad L_n(x) = e^x \frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n} \\ = (-1)^n \left( x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} - \dots + (-1)^n n! \right).$$

Es ist

$$(50) \quad \sum_0^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n = e^{\frac{-xt}{1-t}},$$

$$(51) \quad L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0,$$

$$(52) \quad L_n'(x) - n L_{n-1}'(x) = -n L_{n-1}(x).$$

Das Polynom  $L_n(x)$  genügt der Differentialgleichung

$$(53) \quad xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

und es ist

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n^2(x) dx = (n!)^2.$$

Laguerre, *Bull. Soc. M.* **7**, S. 72—81, 1879; vgl. auch Szegö, *Math. Zschr.* **1**, S. 341—356.

Bei endlichem Intervall leitet Szegö, *Math. Ann.* **82**, S. 188—212, 1921 das weitgehendste Entwicklungstheorem für analytische Funktionen nach orthogonalen Polynomen ab. In *Math. Zschr.* **12**, S. 61—94, 1922 gibt er unter bestimmten Voraussetzungen über  $p(x)$  einen Satz, der die Konvergenz- und Summierbarkeitssätze aus der Theorie der trigonometrischen Fourierreihen auf die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach orthogonalen Polynomen zu übertragen gestattet. Wegen der Entwicklung nach Jacobischen Funktionen vgl. a. a. O. S. 82 ff. Wegen Verallgemeinerungen spezieller orthogonaler Polynome auf solche mehrerer Veränderlichen verweise ich auf Appell und Lambert, *Enzyklop.*, franz. Ausgabe, II, 5, 2, S. 231—268.

## Kapitel XXVII.

### Zahlentheorie.

Von *Erich Bessel-Hagen* in Bonn.

Literaturverzeichnis mit den Abkürzungen häufig zitierter Werke s. am Schluß des Artikels S. 1572.

---

#### § 1. Historisches. Vorbemerkungen.

Die eigentliche Aufgabe der Zahlentheorie ist die Erforschung der Eigenschaften der *ganzen* Zahlen. Der Name Zahlentheorie ist dem Titel des ersten zusammenfassenden Werkes über diese Disziplin entlehnt, A. M. Legendres 1798 erschienenem *Essai sur la théorie des nombres*. Ältere Mathematiker und auch noch Gauß nannten das Gebiet „Höhere Arithmetik“. Es zeigte sich bald, daß das Ziel, die Eigenschaften der ganzen Zahlen zu erkennen, sich gar nicht erreichen läßt, ohne gebrochene und irrationale Zahlen in den Bereich der Betrachtung einzubeziehen und sogar von den Hilfsmitteln der Analysis, insbesondere also auch von dem Begriff der Stetigkeit Gebrauch zu machen; hierdurch erwachsen wiederum neue Fragestellungen, die mit den ursprünglichen oft kaum Berührung zu haben scheinen. So ist heute wie so viele Wissenschaftsgebiete auch die Zahlentheorie zu einem weitverzweigten Gebilde angewachsen, dessen Eigenart sich gar nicht mehr mit wenig Worten beschreiben läßt, sondern nur als durch die lange historische Entwicklung bedingt aufgefaßt werden kann. Trotzdem wohnt ihr ein hohes Maß von Einheitlichkeit inne, das sie vor Zersplitterung bewahrt. Es scheint gerade in der gegenwärtigen Generation von Zahlentheoretikern das Verständnis dafür im Wachsen begriffen zu sein, in Fragestellungen und Theorien, in denen scheinbar von ganzen Zahlen überhaupt nicht die Rede ist, doch die Probleme der *ganzen* Zahlen wiederzuerkennen.

Obwohl die Anfänge der Zahlentheorie in die ältesten Zeiten zurückreichen, wurde sie erst spät zu einer systematischen Wis-

senschaft ausgebildet. Zwei Quellen sind es, aus denen in dem vorwissenschaftlichen Stadium in erster Linie die zahlentheoretischen Spekulationen genährt wurden. Die eine ist der bei fast allen Völkern anzutreffende Hang, in den ganzen Zahlen etwas Geheimnisvolles und Mysteriöses zu sehen; er führt zunächst zu Aberglauben, indem in Religion und Sage bestimmten Zahlen zauberhafte Eigenschaften beigelegt werden, daneben aber zum Aufsuchen eigentümlicher Zahlenbeziehungen und Zahlenspielerien. Für den erwachten wissenschaftlichen Geist war es dann eine der zugleich reizvollsten und förderndsten Aufgaben, die solchen Spielereien zu Grunde liegenden Prinzipien aufzudecken. Die zweite Quelle, vielleicht nicht ganz so ergiebig, war die Ausbildung des Zahlenrechnens für die Bedürfnisse des täglichen Lebens.

Wenn auch im klassischen Altertum ein guter Bestand auf wissenschaftlichem Niveau stehender zahlentheoretischer Kenntnisse vorhanden war — zu nennen sind in erster Linie Buch 7 bis 9 der *Elemente* des Euklid und die *Arithmetik* von Diophant —, so kann man doch von der Zahlentheorie als einem eigenen Zweige der Mathematik erst seit P. de Fermat (1601—1666) reden. Im Mittelpunkt seiner Betrachtungen standen die sogenannten Diophantischen Gleichungen, das sind unbestimmte Gleichungen oder Gleichungssysteme, die in ganzen Zahlen aufzulösen sind. Die Waffe, mit der Fermat diese Probleme angriff, waren allgemeine zahlentheoretische Sätze, die er mit erstaunlicher Divinationsgabe entdeckte. Da er seine Beweise nicht veröffentlichte, blieb seinen Nachfolgern die Aufgabe, für seine Resultate Beweise aufzufinden. Es dauerte noch rund hundert Jahre, ehe dies für den Hauptbestand seiner Sätze gelang. Am meisten in dieser Hinsicht leistete L. Euler (1707—1783), der in langem Ringen ein Resultat Fermats nach dem anderen bestätigte und durch eigene Entdeckungen und neue fruchtbare Fragestellungen die Zahlentheorie unermeßlich bereicherte. Sein Werk wurde fortgeführt durch J. L. Lagrange (1736—1813) und A. M. Legendre (1752—1833).

Im Jahre 1801 erscheinen die *Disquisitiones arithmeticae* des jugendlichen C. F. Gauß (1777—1855), ein Epoche machendes Werk, durch welches alles Vorangegangene so weit überholt wurde, daß man es vielfach zu Unrecht überhaupt als den Anfang der wissenschaftlichen Zahlentheorie angesehen hat. Seine Schwierigkeiten sind aber so bedeutende, daß damals überhaupt nur die hervorragendsten unter den Mathematikern den Zugang

zu seinem tiefen Inhalte fanden. Einige wenige, aber gedankenreiche, Abhandlungen von Gauß bringen weitere bahnbrechende Fortschritte. P. G. Lejeune-Dirichlet (1805—1859) hat das große Verdienst, seiner Mitwelt den Weg zu den Resultaten von Gauß geebnet und gekürzt zu haben; er wirkte nicht nur durch glänzend geschriebene Abhandlungen, sondern auch durch formvollendete Vorlesungen, durch die er zahlentheoretische Kenntnisse in einen weiteren Kreis von Mathematikern trug. Außerdem verdankt ihm die Zahlentheorie viele der schönsten und für die Folgezeit fruchtbarsten Entdeckungen. Seit dieser Zeit steht, wenigstens in Deutschland, die Zahlentheorie gleichberechtigt neben anderen mathematischen Disziplinen. Es würde zu weit führen, die Namen auch nur der bedeutendsten Forscher zu nennen, die seit Dirichlet an dem weiteren Ausbau der Zahlentheorie mitgewirkt haben. Es darf aber gesagt werden, daß sich die Zahlentheorie gerade gegenwärtig in besonders lebensvollem Zustande befindet.

Mehr als in irgendeiner anderen mathematischen Disziplin haben in der Zahlentheorie neben Akademikern auch Dilettanten mitgearbeitet und manchen recht erfreulichen Beitrag geliefert. Das mag seine Ursache darin haben, daß — im Unterschiede zu anderen Zweigen der Mathematik — viele ihrer Fragestellungen ohne Vorkenntnisse unmittelbar aufzufassen sind, so daß sie dem Autodidakten unter allen mathematischen Gebieten am leichtesten zugänglich ist. Auch das große Maß von Begeisterung, das die höhere Arithmetik bei ihren Jüngern auszulösen pflegt, wird hier mitsprechen. Eine treffliche Probe dieses Enthusiasmus bietet das Vorwort zu dem im L. V. zitierten *Bericht* von Hilbert.

Es muß hier noch einer Eigentümlichkeit der Zahlentheorie gedacht werden, die sie in einen gewissen Gegensatz zur Analysis stellt. Während in der Analysis fast jedes Problem von selbst in den Rahmen einer größeren allgemeineren Theorie eingeordnet erscheint und daher auch mit allgemeinen Methoden angegriffen werden kann, stehen die meisten zahlentheoretischen Probleme zunächst isoliert da, und es bedarf ganz individueller Kunstgriffe, um sie entweder direkt zu lösen, oder auf andere in allgemeineren Zusammenhängen stehende Fragen zurückzuführen. Es darf als das Hauptergebnis der Forschungsarbeit seit Euler bezeichnet werden, daß wir heute in der Arithmetik wenigstens überhaupt einige in sich zusammenhängende umfassende Theorien mit großer Linie besitzen, in die es möglich ist, viele Einzelfragen einzuordnen; aber die Schwierigkeit der Einordnung



an die richtige Stelle ist oft sehr beträchtlich, und die Zahl der Fragen, die mit den uns zu Gebote stehenden allgemeineren Methoden unangreifbar sind, ist noch sehr groß.

In dem folgenden Referat kommt nur ein kleiner Teil der Zahlentheorie zur Darstellung. Von vorneherein war beabsichtigt, die *analytische Zahlentheorie* nur ganz knapp zu berücksichtigen. Denn einerseits entstammen in ihr nur die Fragestellungen der Zahlentheorie, während die Methoden fast ganz der Funktionentheorie angehören; andererseits existieren hier die vorzüglich zur Einführung geeigneten Werke von Landau (siehe L. V.) sowie zur allgemeinen Orientierung über die vorhandene Literatur das verhältnismäßig neue Enzyklopädiereferat von Bohr und Cramér (siehe L. V.), so daß für eine ausführlichere Darstellung kein Bedürfnis vorzuliegen schien.

Gegen den ursprünglichen Plan mußte die *Theorie der algebraischen Zahlen* beiseite gelassen werden, um den Abschluß des vorliegenden Bandes nicht zu verzögern; wer sie von modernem Standpunkt aus kennen lernen will, mag mit E. Heckes *Algbr. Zahlen* beginnen. Zum tieferen Eindringen halte er sich dann an den zwar in vieler Hinsicht veralteten, als Ganzes aber noch heute unentbehrlichen *Bericht* D. Hilberts, neben dem jedoch zahlreiche neuere Zeitschriftenabhandlungen zu lesen sind. Eine Zusammenstellung ihrer Titel nebst knappem Inhaltsauszug findet man in dem ersten Teile des *Report on Algebraic numbers* (siehe L. V. unter *Committee on Algebraic Numbers*<sup>1)</sup>). Zu den höchsten bisher erreichten Gipfeln führt der vorzügliche *Bericht* von H. Hasse (siehe L. V.). Denjenigen, die weniger an dem zahlentheoretischen Ausbau als an den abstrakteren Grundlagenfragen der Theorie der algebraischen Zahlen Interesse haben, sei das von Dedekind verfaßte elfte<sup>2)</sup> Supplement zu den Vorlesungen von Dirichlet (siehe L. V. Dirichlet-Dedekind) empfohlen, und zwar sollen möglichst die stark voneinander abweichenden Fassungen der 2., 3., 4. Aufl. nebeneinander benutzt werden. Eine Fortsetzung haben diese Theorien in den Untersuchungen von E. Noether und ihren Schülern erfahren. Vgl. darüber unten § 3.

Auch die Lehre von den sogen. *Diophantischen Approximationen*, deren Fragen vielfach die Theorie der algebraischen

1) Der kürzlich erschienene zweite Teil gibt ausführlichere Inhaltsauszüge der Literatur zu zwei speziellen Kapiteln der algebraischen Zahlentheorie.

2) In der 2. Aufl. ist der betreffende Abschnitt noch in das zehnte Supplement eingearbeitet.



Zahlen und die analytische Zahlentheorie voraussetzen, mußte aus diesem Bericht fortbleiben. Eine zusammenfassende Darstellung oder auch nur eine zusammenfassende Literaturübersicht über diesen Zweig der Zahlentheorie existiert bisher nicht.

Die *Diophantischen Gleichungen*, von denen die Zahlentheorie ihren Ausgang nahm, bilden keine eigene Disziplin. Zum Teil ordnen sie sich als Anwendungsbeispiele in die größeren zahlentheoretischen Gebiete ein, zum Teil stehen sie ganz isoliert. Eine Übersicht über das bisher Erreichte wurde erst durch den zweiten Band des sogleich zu nennenden Werkes von Dickson ermöglicht.

So beschränkt sich die vorliegende Darstellung im wesentlichen auf die elementare Zahlentheorie der ganzen rationalen Zahlen, und nur gelegentlich treten algebraische Zahlen und analytische Funktionen auf. Trotzdem wurde darauf Wert gelegt, nicht nur die Ergebnisse der elementaren Betrachtungen zu sammeln, sondern auch eine Reihe von Begriffen und Methoden aus den an sich ausgeschlossenen Gebieten zur Sprache zu bringen, um einerseits dem Anfänger den Zugang zu diesen Gebieten zu erleichtern, andererseits dem Vorgeschrrittenen andeuten zu können, wie sich die besprochenen elementaren Tatsachen vom höheren Standpunkte aus ansehen und in die allgemeinen Theorien einordnen. Mit Rücksicht auf den letztgenannten Zweck wurde unbedenklich gelegentlich auch von solchen Begriffen Gebrauch gemacht, die innerhalb dieses Artikels nicht erklärt sind.

Eine nahezu vollständige Bibliographie über einen sehr umfassenden Teil der Zahlentheorie — leider nicht, wie es dem Titel nach scheinen könnte, über die ganze Zahlentheorie — bietet das einzigartige Meisterwerk von L. E. Dickson, *History of the theory of numbers* (siehe L. V.). Es enthält vorzügliche Referate über die einzelnen zahlentheoretischen Abhandlungen und Werke, die in wenigen Zeilen mit mustergültiger Klarheit den wesentlichen Inhalt so deutlich herausheben, daß oft ein Vergleich der Originale überflüssig wird. **Dieser Hinweis sei hier ein für alle Male gegeben**, da im Text Verweisungen auf dieses Werk, die sonst auf Schritt und Tritt gegeben werden müßten, eingespart worden sind. Eine breiter angelegte Darstellung der älteren Zahlentheorie, zum Teil mit ausgeführten Beweisen, gibt der fesselnd geschriebene *Report* von H. J. St. Smith.

## § 2. Der Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfaktoren.

Eine ganze Zahl  $a$  heißt durch eine ganze Zahl  $b$  teilbar und  $b$  ein Teiler von  $a$ , wenn es eine ganze Zahl  $c$  gibt derart, daß  $a = bc$  ist. In Zeichen:  $b|a$ , dies wird gelesen „ $b$  teilt  $a$ “; die entgegengesetzte Aussage „ $b$  teilt nicht  $a$ “ wird geschrieben  $b \nmid a$ . Ist  $b|a$  und dabei  $|b| < |a|$ , so heißt  $b$  eigentlicher oder echter Teiler von  $a$ . Eine von 1 verschiedene natürliche<sup>1)</sup> Zahl, die außer sich selbst und 1 keinen positiven Teiler besitzt, heißt *Primzahl*. Eine ganze Zahl, deren reziproker Wert ganz ist, heißt *Einheit*. Es gibt nur die beiden Einheiten  $+1$  und  $-1$ .

Ältere Mathematiker rechneten 1 mit zu den Primzahlen; heute tun wir das nicht mehr, da uns der Ausbau der Theorie der ganzen algebraischen Zahlen darüber aufgeklärt hat, daß für den systematischen Aufbau die Einheiten eine völlig andere Rolle spielen als die Primzahlen. Es wäre im Hinblick auf die Natürlichkeit der Systematik angemessener, die Definition der Primzahl nicht auf positive Zahlen zu beschränken, also zu erklären: Eine von Null verschiedene ganze Zahl heißt Primzahl, wenn sie keine Einheit ist und außer den Einheiten keine echten Teiler besitzt. Doch hat sich der Sprachgebrauch allgemein eingebürgert, unter Primzahl stets eine positive Zahl zu verstehen; daher soll auch hier daran festgehalten werden.

Das Fundament der gesamten Zahlentheorie ist folgender Satz:

*Jede natürliche Zahl läßt sich auf eine und abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren auch nur auf eine Weise als Produkt von Primzahlen darstellen.*

Faßt man jeweils die gleichen Primzahlen in einer solchen Darstellung zu Primzahlpotenzen zusammen, so kann man auch sagen: *Jede natürliche Zahl läßt sich auf eine und abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren auch nur auf eine Weise als Produkt von Potenzen verschiedener Primzahlen darstellen.* Betrachtet man statt der natürlichen Zahlen beliebige von Null verschiedene ganze Zahlen, so hat man der Produktdarstellung noch eine Einheit als Faktor hinzuzufügen. Der Fundamentalsatz scheint zum ersten Male von Gauß (*Disqu. arithm.* art. 16) ausdrücklich formuliert und bewiesen worden zu sein, obwohl er vorher oft stillschweigend angewandt wurde. Bei Euklid findet er sich nicht in unserer Fassung, aber Euklid entwickelt sämtliche zum

1) „Natürliche Zahl“ bedeutet positive ganze Zahl.

Beweise erforderlichen Hilfssätze (*Elemente* 7, vor allem Sätze 29 bis 32), die zusammen genommen unserem Satze gleichwertig sind, und arbeitet mit ihnen in derselben Weise, wie wir es mit dem Fundamentalsatz tun.

Eines der wichtigsten Hilfsmittel für den Beweis des Satzes ist das auch sonst in der Zahlentheorie häufig anzuwendende Prinzip: *In jeder Menge nicht negativer ganzer Zahlen gibt es eine kleinste Zahl.* Aus diesem und den Begriffen der Teilbarkeit und der Primzahl folgt die Möglichkeit einer Zerlegung fast unmittelbar. Die Einzigkeit der Zerlegung beruht dagegen auf dem folgenden Hilfssatz: *Wenn  $p$  eine Primzahl ist und  $p|ab$ , so gilt entweder  $p|a$  oder  $p|b$ .* Er spricht übrigens eine charakteristische Eigenschaft der Primzahlen aus, denn er läßt sich in folgender Weise umkehren: *Wenn eine natürliche Zahl  $n > 1$  die Eigenschaft hat, daß für jedes Paar ganzer Zahlen  $a, b$  aus  $n|ab$  folgt  $n|a$  oder  $n|b$ , so ist  $n$  Primzahl.* Diese Eigenschaft werde im folgenden als „zweite Haupteigenschaft der Primzahlen“ bezeichnet.

Zum Beweise des Hilfssatzes bedarf es des Begriffes des *größten gemeinsamen Teilers* zweier Zahlen.<sup>1)</sup> Die Gesamtheit der Zahlen, die sowohl in  $a$  wie in  $b$  aufgehen (gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$ ), deckt sich mit der Gesamtheit der Teiler einer bestimmten nicht negativen Zahl  $d$ , welche der größte gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  heißt. Mit anderen Worten:  $d$  hat die doppelte Eigenschaft:

$$(1) \quad \text{Aus } t|a, \quad t|b \quad \text{folgt} \quad t|d$$

$$(2) \quad \text{Aus } t|d \quad \text{folgt} \quad t|a, \quad t|b;$$

hierdurch ist  $d$  bis auf eine Einheit als Faktor, d. h. bis auf das Vorzeichen, eindeutig bestimmt. Letzteres wird durch die willkürliche Festsetzung  $d \geq 0$  fixiert. Für den größten gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$  gebraucht man die Bezeichnung  $(a, b)$ . Es ist dann und nur dann  $(a, b) = 0$ , wenn  $a = b = 0$  ist. Falls eine der Zahlen  $a, b$  von Null verschieden ist, ergibt sich die Existenz einer Zahl  $d > 0$  mit den Eigenschaften (1), (2) aus folgender anderen Charakterisierung:  $d$  ist der kleinste positive Wert, den die Linearform  $ax + by$  annimmt, wenn  $x$  und  $y$

---

1) Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, steht im folgenden der Kürze halber oft „Zahl“ statt „ganze Zahl“.

unabhängig von einander je alle ganzen Zahlen durchlaufen. Insbesondere gibt es also ein Paar ganzer Zahlen  $x_0, y_0$ , derart daß

$$(3) \quad ax_0 + by_0 = d = (a, b).$$

Zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers dient der *Euklidische Algorithmus* (Euklid, *Elemente* 7, Satz 2). Er beruht auf fortgesetzter Anwendung der Division mit Rest, d. h. der Tatsache: Zu zwei ganzen Zahlen  $a$  und  $b$ , von denen  $b > 0$  ist, gibt es ein und nur ein Paar ganzer Zahlen  $q$  und  $r$ , derart daß

$$(4) \quad a = qb + r \quad 0 \leq r < b$$

ist. Um nun  $(a, b)$  zu bestimmen, fahre man fort: Entweder es ist  $r = 0$ , dann ist  $(a, b) = b$ , oder es ist  $r > 0$ , dann bilde man

$$b = q_1 r + r_1 \quad 0 \leq r_1 < r.$$

Hier ist wieder entweder  $r_1 = 0$  und dann  $(a, b) = r$ , oder es ist  $r_1 > 0$ , dann kann  $r$  durch  $r_1$  mit Rest dividiert werden. Auf diese Weise gelangt man zu einer Kette von endlich vielen Gleichungen

$$\begin{array}{llll} a & = qb & + r & 0 < r < b \\ b & = q_1 r & + r_1 & 0 < r_1 < r \\ r & = q_2 r_1 & + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\ . & . & . & . \\ r_{v-2} & = q_v r_{v-1} & + r_v & 0 < r_v < r_{v-1} \\ r_{v-1} & = q_{v+1} r_v & + r_{v+1} & 0 = r_{v+1}, \end{array}$$

und es ist  $r_v = (a, b)$ . Durchläuft man die Kette dieser Gleichungen von der vorletzten an in umgekehrter Reihenfolge, indem man mittels der vorletzten unter ihnen  $r_v$  durch  $r_{v-1}$  und  $r_{v-2}$ , sodann mit Hilfe der drittletzten durch  $r_{v-2}$  und  $r_{v-3}$  ausdrückt usf., so erhält man schließlich ein Paar von Zahlen  $x_0, y_0$ , das (3) befriedigt.

Ist  $(a, b) = 1$ , so heißen  $a$  und  $b$  *teilerfremd* oder *relativ prim*. Jede Zahl ist zu 1 teilerfremd. Eine ganze Zahl  $a$  ist durch eine Primzahl  $p$  entweder teilbar oder zu ihr teilerfremd. Aus  $p \nmid a$ , aber  $p \mid ab$ , folgt  $p \mid b$ , denn  $(a, p) = 1$ , also nach (3)  $b = abx_0 + pby_0$ , und in der rechten Seite geht  $p$  auf. Damit ist der oben genannte Hilfssatz bewiesen.

Einen abgekürzten Beweis des Fundamentalsatzes von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primzahlen ohne Benutzung des Hilfssatzes und der Division mit Rest, allein gestützt auf die Tatsache, daß aus  $0 < b < a$  folgt  $0 < a - b < a$ , und auf die Existenz einer kleinsten Zahl in jeder Menge nicht negativer ganzer Zahlen, gab kürzlich Zermelo. Siehe bei Hasse, *J. f. Math.* **159** (1928), S. 3—6.

Ein Gegenstück zum größten gemeinsamen Teiler ist das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache*  $m$  zweier Zahlen  $a, b$ . Es ist definiert durch die Eigenschaften:

$$(5) \quad \text{Aus } a \mid u, \quad b \mid u \quad \text{folgt} \quad m \mid u$$

$$(6) \quad \text{Aus } m \mid u \quad \text{folgt} \quad a \mid u, \quad b \mid u$$

$$(7) \quad m \geq 0$$

und ist mit  $a, b$  und  $d = (a, b)$  verknüpft durch die Beziehung  $ab = md$ . Die Begriffe „größter gemeinsamer Teiler“ und „kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches“ lassen sich auf mehr als zwei Zahlen ausdehnen. Der *größte gemeinsame Teiler*  $d = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  der  $n$  —  $n$  bedeutet hier eine beliebige natürliche Zahl — ganzen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ist definiert durch die Eigenschaften:

$$\text{Aus } t \mid a_1, \quad t \mid a_2, \quad \dots, \quad t \mid a_n \quad \text{folgt} \quad t \mid d$$

$$\text{Aus } t \mid d \quad \text{folgt} \quad t \mid a_1, \quad t \mid a_2, \quad \dots, \quad t \mid a_n$$

$$d \geq 0$$

Falls eine der Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  von Null verschieden ist, ist  $d$  der kleinste positive Wert der Linearform  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$  bei ganzzahligen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; insbesondere ist also die Gleichung

$$(8) \quad d = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

in ganzen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  lösbar. Das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache* ist definiert durch die Eigenschaften:

$$\text{Aus } a_1 \mid u, \quad a_2 \mid u, \quad \dots, \quad a_n \mid u \quad \text{folgt} \quad m \mid u$$

$$\text{Aus } m \mid u \quad \text{folgt} \quad a_1 \mid u, \quad a_2 \mid u, \quad \dots, \quad a_n \mid u$$

$$m \geq 0$$



Die sämtlichen (positiven<sup>1)</sup>) Teiler einer natürlichen Zahl  $a$  mit der Primzahlzerlegung

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = \prod_{\kappa=1}^k p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}} \quad 2)$$

erhält man in der Gestalt  $p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} \cdots p_k^{\varrho_k}$ , wo jedes  $\varrho_{\kappa}$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, k$ ) unabhängig von den übrigen die Werte  $0, 1, 2, \dots, \alpha_{\kappa}$  durchläuft. Haben die natürlichen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Primzahlzerlegungen

$$a_{\nu} = \prod_{\kappa=1}^k p_{\kappa}^{\alpha_{\nu, \kappa}},$$

so lauten die Primzahlzerlegungen ihres größten gemeinsamen Teilers  $d$  und ihres kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen  $m$

$$d = \prod_{\kappa=1}^k p_{\kappa}^{\delta_{\kappa}}, \quad m = \prod_{\kappa=1}^k p_{\kappa}^{\mu_{\kappa}},$$

wo

$$\delta_{\kappa} = \text{Min. } (\alpha_{1, \kappa}, \alpha_{2, \kappa}, \dots, \alpha_{n, \kappa})$$

$$\mu_{\kappa} = \text{Max. } (\alpha_{1, \kappa}, \alpha_{2, \kappa}, \dots, \alpha_{n, \kappa}).$$

Über die Bausteine der multiplikativen Zerlegungen, die Primzahlen, siehe § 13.

### § 3. Allgemeinere Grundbegriffe.

Die Entwicklung der Algebra und Zahlentheorie seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts hat sich, vor allem unter dem Einflusse von R. Dedekind und L. Kronecker, in die Richtung gewandt, eine Reihe von abstrakten Allgemeinbegriffen in den Mittelpunkt zu stellen und deren Eigenschaften zu untersuchen. Die Sätze über ganze Zahlen, Polynome usw. erscheinen dann als Anwendungen der allgemeinen Betrachtungen auf spezielle Gattungen mathematischer Dinge. Dadurch wird viel an Klarheit der Begriffe und oft auch an Kürze der Darstellung

1) Dieser Zusatz wird oft weggelassen, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, daß nur die positiven Teiler gemeint sind.

2) In solchen Formeln ist stets gemeint, daß  $p_1, p_2, \dots, p_k$  voneinander verschiedene Primzahlen sein sollen. Gewöhnlich schreibt man nur die Primzahlen auf, deren Exponenten positiv sind; gelegentlich ist es jedoch bequem, auch einige Primzahlen mit dem Exponenten Null in die Darstellung aufzunehmen.



gewonnen. Solche Allgemeinbegriffe sind *Gruppe*, *Ring*, *Integritätsbereich*, *Körper* oder *Rationalitätsbereich*, *Ideal*, *Modul*.

Über die Theorie der *Gruppen* vgl. Bd. I, 1, Kap. III dieses Repertoriums, sowie die elementaren Einführungen L. Baumgartner, *Gruppentheorie*, Samml. Götschen, Berlin und Leipzig 1921, H. Hasse, *Höhere Algebra* **1**, Samml. Götschen, Berlin und Leipzig 1926, Kap. II, und die tief gehenden Monographien W. Burnside, *Theory of groups of finite order*, 2. Aufl., Cambridge (Univ. Press) 1911 und A. Speiser, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 2. Aufl. Berlin (Springer) 1927.

Die Theorie der abstrakten *Bereiche* wurde nach älteren Ansätzen von H. Weber systematisch entwickelt und mit lehrbuchartiger Ausführlichkeit dargestellt von E. Steinitz in seiner bahnbrechenden Abhandlung *Algebraische Theorie der Körper* (*J. f. Math.* **137** (1910), S. 167—309). Eine vorzügliche Einführung gibt jetzt auch H. Hasse, *Höhere Algebra* (Samml. Götschen, Berlin und Leipzig 1926/27) **1**, Kap. 1 und **2**, Kap. 1. Über *Körper* vgl. auch dieses Repertorium Bd. I, 1, S. 176 ff. und S. 290 ff. Die Erklärung eines *Bereiches* oder *Ringes* ist folgende: Gegeben sei eine nicht leere<sup>1)</sup> Menge  $\mathfrak{M}$  mathematischer Dinge, die im folgenden durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet werden. Es seien ferner zwei Verknüpfungsvorschriften, genannt Addition und Multiplikation, definiert, vermöge derer jedem geordneten Paar gleicher oder verschiedener Dinge  $a, b$  aus  $\mathfrak{M}$  eindeutig ein Ding  $a + b$  bzw.  $a \cdot b$  (oder kürzer  $ab$ ) aus  $\mathfrak{M}$  zugeordnet ist. Dabei sollen folgende Gesetze erfüllt sein:

- (1)  $a + b = b + a$  (kommutatives Gesetz der Addition)
- (2)  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (assoziatives Gesetz der Addition)
- (3) Zu jedem Paar  $a, b$  gibt es ein und nur ein  $x$ , derart daß  $a + x = b$   
ist. (unbeschränkte und eindeutige Subtraktion)
- (4)  $a \cdot b = b \cdot a$  (kommutatives Gesetz der Multiplikation)

1) Einige Mathematiker fordern sogar, daß  $\mathfrak{M}$  mindestens zwei Elemente enthält.

$$(5) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{assoziatives Gesetz der Multiplikation})$$

$$(6) \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (\text{distributives Gesetz}).$$

Dann heißt  $\mathfrak{M}$  ein Ring oder Bereich hinsichtlich der zu Grunde gelegten Verknüpfungen. Nach (1), (2), (3) bilden sämtliche Elemente von  $\mathfrak{M}$  hinsichtlich der Verknüpfung durch Addition eine kommutative oder Abelsche Gruppe. Ihr Einheitsselement heißt Null und wird 0 geschrieben. Falls es in  $\mathfrak{M}$  von Null verschiedene Elemente gibt, die mit einem von Null verschiedenen Element multipliziert Null ergeben, so heißen diese *Nullteiler*. Die von Null und Nullteilern verschiedenen Elemente von  $\mathfrak{M}$  heißen die *regulären* Elemente. Es kann höchstens ein Element  $e$  geben, das für jedes Element  $a$  aus  $\mathfrak{M}$  die Relation  $ea = ae = a$  erfüllt; ein solches Element heißt *Einheitsselement*<sup>1)</sup> des Ringes. Die vier kombinatorisch möglichen Fälle: Vorhandensein oder Nichtvorhandensein von Nullteilern, Vorhandensein oder Nichtvorhandensein eines Einheitsselementes lassen sich durch passend gewählte Ringe realisieren. Ein Ring ohne Nullteiler und mit Einheitsselement heißt ein *Integritätsbereich*.

Ein Ring heißt *Körper* oder *Rationalitätsbereich*, wenn in ihm die Multiplikation eindeutig umkehrbar ist in folgendem Sinne:

(7) Zu jedem Paar  $a, b$ , wo  $a \neq 0$  ist, gibt es ein und nur ein  $x$ , derart daß

$$a \cdot x = b$$

ist. . . . . (unbeschränkte und eindeutige Division mit Ausnahme der Division durch Null)

Ein Körper ist eo ipso Integritätsbereich. In einem Körper bilden die von Null verschiedenen Elemente bei Verknüpfung durch Multiplikation eine Abelsche Gruppe. Zu jedem Ring  $\mathfrak{R}$  läßt sich, und im wesentlichen nur auf eine Weise, durch „Quotientenbildung“ ein  $\mathfrak{R}$  umfassender Ring  $\mathfrak{R}^*$  herstellen, in dem die Division durch jedes *reguläre* Element eindeutig ausführbar ist und dessen sämtliche Elemente als Quotienten von passenden Elementepaaren aus  $\mathfrak{R}$  darstellbar sind.  $\mathfrak{R}^*$  heißt der *Quotientenring* von  $\mathfrak{R}$ . Wenn in  $\mathfrak{R}$  keine Nullteiler vorhanden sind, wird  $\mathfrak{R}^*$  ein Körper und heißt dann der *Quotientenkörper* von  $\mathfrak{R}$ .

1) Hasse schlägt dafür die kürzere Benennung *Einselement* vor.

Der Begriff des *Ideals* wurde von R. Dedekind geschaffen, allerdings nur in Anwendung auf die speziellen Integritätsbereiche, deren Elemente ganze algebraische Zahlen sind. Da aber Dedekind bei der Herleitung seiner Sätze stets das Bestreben zeigte, sich nicht auf die spezielle Natur der von ihm untersuchten Bereiche, sondern möglichst nur auf abstrakte Allgemeinbegriffe zu stützen, muß er als der Schöpfer des allgemeinen Idealbegriffes angesehen werden.

Erste Veröffentlichung Dedekinds hierüber: Supplement X in *Dirichlet-Dedekind*, 2. Aufl. Siehe weiter Supplement XI der 3. und 4. Aufl. und eine Reihe von Abhandlungen, von denen eine Gesamtausgabe in Aussicht steht. Auch Kronecker hat zu der Idealtheorie Beiträge geliefert, seine Modul- oder Divisorensysteme sind in unserer Sprache nichts anderes als Idealbasen. Siehe seine Abhandlungen *J. f. Math.* **92** (1882), § 20 u. 21, S. 70—83 = *Werke* **2**, S. 326—342; *Berl. Monatsber.* 1883 S. 957—960 = *Werke* **2**, S. 417—424; *J. f. Math.* **99** (1886), S. 329—371 = *Werke* **3**<sub>1</sub>, S. 145—208; *J. f. Math.* **100** (1887), S. 490—510 = *Werke* **3**, S. 209—240; *Berl. Monatsber.* 1888, S. 417—423 = *Werke* **3**<sub>1</sub>, S. 281—292; und auch *Vorlesungen über Zahlentheorie* **1** (1901), S. 143—241.

Ideale in Polynombereichen traten außer bei Kronecker auch in Untersuchungen von D. Hilbert (*Math. Ann.* **36** (1890), S. 473—534; *Math. Ann.* **42** (1893), S. 313—373), E. Lasker (*Math. Ann.* **60** (1905), S. 20—116 u. 607—608), S. Macaulay (*Math. Ann.* **74** (1913), S. 66—121) auf, freilich noch unter anderen Namen (Modul, Modulsystem, abweichend von der heute üblichen Terminologie). Mit bewußter Tendenz herausgearbeitet wurde der allgemeine Idealbegriff zum ersten Male von E. Noether in ihrer grundlegenden Abhandlung *Idealtheorie in Ringbereichen*, *Math. Ann.* **83** (1921), S. 24—66, der zahlreiche weitere von ihr selbst und ihren Schülern folgten. Unter diesen sei nur eine ausführlich genannt, die in besonderem Maße die Zahlentheorie betrifft: E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in allgemeinen Zahl- und Funktionenkörpern*, *Math. Ann.* **96** (1926), S. 26—61. Ferner sei auf das Büchelchen F. S. Macaulay, *The algebraic theory of modular systems* (*Cambridge tracts* **19**), Cambridge 1916, hingewiesen.

Gegeben sei ein Ring  $\mathfrak{R}$ . Eine (nicht leere) Menge  $m$  von Elementen in diesem heißt ein Ideal, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

- (8) Aus  $a$  gehört zu  $\mathfrak{m}$ ,  $b$  gehört zu  $\mathfrak{m}$  folgt:  
 $a - b$  gehört zu  $\mathfrak{m}$ .
- (9) Aus  $a$  gehört zu  $\mathfrak{m}$ ,  $r$  gehört zu  $\mathfrak{R}$  folgt:  
 $ar$  gehört zu  $\mathfrak{m}$ .

Ideale werden mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet. Jedes Ideal enthält die Null; das Ideal, das nur die Null enthält, heißt das *Nullideal*. Enthält ein Ideal ein von Null verschiedenes Element  $a$ , so enthält es auch alle Elemente der Form  $ra + a + a + \dots + a$ , wo  $r$  ein beliebiges Element aus  $\mathfrak{R}$ . Falls  $\mathfrak{m}$  ein Einheitselement  $e$  besitzt, wird

$$a + a + \dots + a = a(e + e + \dots + e)$$

selbst von der Form  $ra$ , wo  $r$  Element von  $\mathfrak{R}$ . Allgemeiner: Enthält  $\mathfrak{m}$  die Elemente  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , so enthält es alle Elemente der Form

$$\begin{aligned} r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n \\ + a_1 + a_1 + \dots + a_1 \\ + a_2 + a_2 + \dots + a_2 \\ + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ + a_n + a_n + \dots + a_n, \end{aligned}$$

wo  $r_1, r_2, \dots, r_n$  beliebige Elemente aus  $\mathfrak{R}$ . Enthält  $\mathfrak{m}$  keine weiteren Elemente außer diesen, so heißt  $\mathfrak{m}$  aus  $a_1, a_2, \dots, a_n$  *abgeleitet*, und das System  $a_1, a_2, \dots, a_n$  heißt eine *Basis* von  $\mathfrak{m}$ . Man schreibt dann  $\mathfrak{m} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Ein Ideal, das aus einem einzigen Element abgeleitet werden kann, heißt *Hauptideal*. Das Ideal, das aus sämtlichen Elementen von  $\mathfrak{R}$  besteht, heißt das *Einheitsideal* und wird meist mit  $\mathfrak{o}$  bezeichnet; falls  $\mathfrak{R}$  ein Einheitselement besitzt, ist  $\mathfrak{o} = (e)$ . In einem *Körper* gibt es außer dem Nullideal und dem Einheitsideal keine weiteren Ideale.

Ein Ideal  $\mathfrak{a}$  heißt durch ein Ideal  $\mathfrak{b}$  teilbar, wenn jedes Element von  $\mathfrak{a}$  Element von  $\mathfrak{b}$  ist; in Zeichen  $\mathfrak{a} | \mathfrak{b}$ .  $\mathfrak{b}$  heißt echter Teiler von  $\mathfrak{a}$ , wenn es mindestens ein Element enthält, das  $\mathfrak{a}$  nicht angehört. Der größte gemeinsame Teiler ( $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots$ ) einer endlichen oder unendlichen Menge  $\mathfrak{M}$  von Idealen ist das eindeutig bestimmte Ideal  $\mathfrak{d}$  mit den Eigenschaften:

Aus  $\mathfrak{t} | \mathfrak{a}$  für jedes  $\mathfrak{a}$  aus  $\mathfrak{M}$  folgt  $\mathfrak{t} | \mathfrak{d}$

Aus  $\mathfrak{t} | \mathfrak{d}$  folgt  $\mathfrak{t} | \mathfrak{a}$  für jedes  $\mathfrak{a}$  aus  $\mathfrak{M}$ .

$\mathfrak{d}$  besteht aus allen Elementen  $d$ , die Summen endlich vieler in den Idealen aus  $\mathfrak{M}$  vorkommender Elemente sind. Jedes Ideal ist der größte gemeinsame Teiler der sämtlichen aus seinen Elementen abgeleiteten Hauptideale; diejenigen Ideale, die eine Basis besitzen, sind die größten gemeinsamen Teiler der aus ihren Basiselementen abgeleiteten Hauptideale. Zwei Ideale heißen *teilerfremd*, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler  $\mathfrak{o}$  ist. Der Begriff „relativ prim“ wird jedoch in der Idealtheorie anders definiert (siehe unten) und darf mit „teilerfremd“ nicht verwechselt werden. Das *kleinste gemeinsame Vielfache*  $[a_1, a_2, \dots]$  einer endlichen oder unendlichen Menge  $\mathfrak{M}$  von Idealen ist das eindeutig bestimmte Ideal  $\mathfrak{m}$  mit den Eigenschaften:

Aus  $a|u$  für jedes  $a$  aus  $\mathfrak{M}$  folgt  $\mathfrak{m}|u$

Aus  $\mathfrak{m}|u$  folgt  $a|u$  für jedes  $a$  aus  $\mathfrak{M}$ .

$\mathfrak{m}$  besteht aus allen Elementen, die gleichzeitig in jedem der Ideale  $a_1, a_2, \dots$  der Menge  $\mathfrak{M}$  als Element vorkommen, d. h.  $\mathfrak{m}$  ist im Sinne der Mengenlehre der Durchschnitt der Mengen  $a_1, a_2, \dots$ . Das *Produkt*  $a\mathfrak{b}$  zweier Ideale  $a, \mathfrak{b}$  ist das Ideal, das aus allen Summen je endlich vieler Produkte  $ab$  besteht, wo  $a$  ein beliebiges Element aus  $a$ ,  $b$  ein beliebiges Element aus  $\mathfrak{b}$  bedeutet. Offenbar gilt  $a|a\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{b}|a\mathfrak{b}$ . Die Umkehrung, daß aus  $a|c$  die Existenz eines  $\mathfrak{b}$  folgt, derart daß  $c = a\mathfrak{b}$  wird, ist jedoch nicht allgemein richtig. Enthält  $\mathfrak{R}$  ein Einheitselement  $e$ , so folgt aus  $(a, \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ , daß  $a\mathfrak{b} = [a, \mathfrak{b}]$ . Mit Hilfe des Produktbegriffes wird erklärt:  $a$  heißt *relativ prim* zu  $\mathfrak{b}$ , wenn aus  $\mathfrak{b}|ac$  stets folgt  $\mathfrak{b}|c$ . Unter dem *Quotienten*  $a:\mathfrak{b}$  der beiden Ideale  $a, \mathfrak{b}$  versteht man das Ideal, das aus allen Elementen  $c$  von  $\mathfrak{R}$  besteht, für die  $(c)\mathfrak{b}$  durch  $a$  teilbar wird.<sup>1)</sup>

Von besonderer Wichtigkeit für die Anwendungen sind solche Ringe, in denen der *Teilerkettensatz* gilt, d. h. in denen folgende Aussage wahr ist: Ist  $a_1, a_2, a_3, \dots$  eine Folge von Idealen, derart daß  $a_2$  echter Teiler von  $a_1$ ,  $a_3$  echter Teiler von  $a_2$ , usf. ist (eine sog. Teilerkette), so enthält diese nur end-

1) Nicht zu verwechseln sind hiermit die besonders in der Theorie der algebraischen Zahlen vorkommenden *Idealbrüche*. Unter dem Idealbruch  $\frac{a}{b}$  versteht man die Menge derjenigen Elemente  $c$  des *Quotientenringes*  $\mathfrak{R}^*$  von  $\mathfrak{R}$ , die mit jedem Element aus  $b$  multipliziert ein Element aus  $a$  ergeben. Der Idealbruch ist überhaupt kein Ideal des Ringes  $\mathfrak{R}$ , sondern ein  $\mathfrak{R}$ -Modul in  $\mathfrak{R}^*$  (siehe unten S. 1474).



lich viele Ideale. Es gilt der wichtige Fundamentalsatz: In einem Ringe  $\mathfrak{R}$  gilt der Teilerkettensatz dann und nur dann, wenn jedes Ideal  $\mathfrak{A}$  eine aus *endlich vielen* Elementen bestehende Basis besitzt. Dem Teilerkettensatz steht dual gegenüber der *Vielfachenkettensatz*, der das Abbrechen jeder Kette von echten Vielfachen aussagt. Die gleichzeitige Aussage von Teilerketten- und Vielfachenkettensatz belegt man mit dem Namen *Doppelkettensatz*.

Ein Ideal  $\mathfrak{p}$  heißt *Primideal*, wenn aus  $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}\mathfrak{b}$  folgt: entweder  $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}$  oder (vel)  $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}$ . Sachlich gleichbedeutend damit ist: wenn aus  $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}\mathfrak{b}$  folgt  $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}$  oder  $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}$ .<sup>1)</sup> Diese Definition überträgt also die zweite Haupteigenschaft der Primzahlen auf den Idealbegriff. Die Analogie zu der in der Primzahldefinition enthaltenen ersten Haupteigenschaft der Primzahlen lautet: Ein Ideal, das außer sich selbst und  $\mathfrak{o}$  keine Teiler hat, heißt ein *einfaches* Ideal. Die Begriffe Primideal und einfaches Ideal decken sich aber keineswegs allgemein; wenn für einen Ring  $\mathfrak{R}$  jedes Primideal einfach und jedes einfache Ideal ein Primideal ist, so ist dies als eine Besonderheit von  $\mathfrak{R}$  anzusehen. Ein Ideal  $\mathfrak{q}$  heißt ein *starkes Primärideal*, wenn aus  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{a}\mathfrak{b}$  folgt: entweder  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{a}$  oder  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{b}$  oder es gibt zwei natürliche Zahlen  $k, l$ , derart daß  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{a}^k$  und  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{b}^l$ . Der größte gemeinsame Teiler aller Ideale  $\mathfrak{a}$ , zu denen es eine natürliche Zahl  $k$  gibt, derart daß  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{a}^k$ , ist ein durch  $\mathfrak{q}$  eindeutig bestimmtes Primideal  $\mathfrak{p}$ , das „zu  $\mathfrak{q}$  gehörige“ Primideal. Es gilt  $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q}$ , und falls in  $\mathfrak{R}$  der Teilerkettensatz richtig ist, gibt es eine natürliche Zahl  $l$ , derart daß  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{p}^l$ . Jede Primideallpotenz ist starkes Primärideal, aber es gibt Ringe, in denen nicht jedes starke Primärideal Primideallpotenz ist.  $\mathfrak{q}$  heißt *schwaches Primärideal*, wenn aus  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{a}\mathfrak{b}$  folgt:  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{a}$  oder  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{b}$ , oder es gibt zwei natürliche Zahlen  $k, l$ , derart daß  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{a}^k$ ,  $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{b}^l$ . Jedes starke Primärideal ist schwaches Primärideal; die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, aber z. B. dann, wenn in  $\mathfrak{R}$  der Teilerkettensatz gültig ist.

Über Kongruenzen und Restklassen nach Idealen vgl. § 4.

Um den Begriff des *Moduls* zu definieren, hat man von einem Doppelbereich auszugehen. Vgl. E. Noether, *Math. Ann.* 83, § 9, S. 54ff. und *Math. Ann.* 96, § 2, S. 34ff. Es sei erstens ein Ring  $\mathfrak{R}$  gegeben, dessen Elemente mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden mögen, zweitens ein Bereich  $\mathfrak{M}$ , dessen Elemente mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet

1) Das Zeichen  $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}$  bedeutet  $\mathfrak{p} \mid (\mathfrak{a})$ .



seien. In  $M$  sei eine Verknüpfung, genannt Addition, definiert, derart daß  $M$  gegenüber der Addition eine Abelsche Gruppe bildet. Außerdem sei eine Multiplikation der Elemente von  $M$  mit denen von  $\mathfrak{R}$  erklärt. Dabei sollen die Postulate gelten<sup>1)</sup>:

Für jedes  $a$  aus  $\mathfrak{R}$  und jedes  $\alpha$  aus  $M$  gehört

$$(10) \quad a\alpha \text{ zu } M.$$

Für jedes  $a$  aus  $\mathfrak{R}$ ,  $b$  aus  $\mathfrak{R}$ ,  $\alpha$  aus  $M$  gilt

$$(11) \quad ab \cdot \alpha = a \cdot b\alpha.$$

Es gelten die beiden distributiven Gesetze

$$(12) \quad \begin{aligned} a(\alpha + \beta) &= a\alpha + a\beta \\ (a + b)\alpha &= a\alpha + b\alpha. \end{aligned}$$

Alsdann heißt eine Menge  $\mathfrak{M}$  von Elementen aus  $M$  ein  $\mathfrak{R}$ -Modul in  $M$ , wenn sie die (8), (9) entsprechenden Eigenschaften hat:

Aus  $\alpha$  gehört zu  $\mathfrak{M}$ ,  $\beta$  gehört zu  $\mathfrak{M}$  folgt:

$$(13) \quad \alpha - \beta \text{ gehört zu } \mathfrak{M}.$$

Aus  $\alpha$  gehört zu  $\mathfrak{M}$ ,  $r$  gehört zu  $\mathfrak{R}$  folgt:

$$(14) \quad r\alpha \text{ gehört zu } \mathfrak{M}.$$

Ein Ideal ist der Spezialfall eines Moduls, bei dem der Bereich  $M$  mit dem Ring  $\mathfrak{R}$  zusammenfällt. Für Moduln wird die Teilbarkeit in der gleichen Weise wie für Ideale definiert.

Die Gesamtheit der ganzen Zahlen bildet, wenn unter „Addition“ und „Multiplikation“ die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation verstanden wird, einen Integritätsbereich  $\Gamma$ . Der Quotientenkörper von  $\Gamma$  besteht aus der Gesamtheit aller rationalen Zahlen und heißt der natürliche Rationalitätsbereich  $P$ . In  $\Gamma$  ist die Gruppe der Addition zyklisch, sie besitzt als erzeugendes Element 1. Die Gruppe der Multiplikation in  $P$  dagegen ist nicht zyklisch, sondern direktes Produkt der endlichen

---

1) Es ist unanstößig, obwohl die Addition in  $\mathfrak{R}$  und die in  $M$  logisch völlig verschiedene Dinge sind, beide durch das gleiche  $+$ -Zeichen auszudrücken und ebensowenig die Multiplikation in  $\mathfrak{R}$  von der logisch völlig verschiedenen Multiplikation zwischen Elementen aus  $\mathfrak{R}$  und aus  $M$  in der Zeichensprache zu unterscheiden, da eben durch die Postulate (10) bis (12) die Gültigkeit der gewohnten formalen Rechengesetze sichergestellt wird.

zyklischen Gruppe mit den Elementen  $+1$  und  $-1$  und der unendlich vielen den verschiedenen Primzahlen  $p$  entsprechenden zyklischen Gruppen von unendlicher Ordnung mit den Elementen  $p^\alpha$  ( $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Die Idealtheorie in  $\Gamma$  gestaltet sich folgendermaßen: Zur Definition eines Ideals genügt die Eigenschaft (8), da (9) aus ihr von selbst folgt. In  $\Gamma$  ist jedes Ideal Hauptideal. Es ist  $(a) = (b)$  dann und nur dann, wenn  $a = \pm b$  ist. Daher sind sämtliche Ideale von  $\Gamma$  gegeben durch  $(n)$ , wo  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Ist  $\mathfrak{a} = (a)$ ,  $\mathfrak{b} = (b)$ , so ist  $\mathfrak{a}|\mathfrak{b}$  dann und nur dann, wenn  $a|b$ , d. h. jeder Teilbarkeitsrelation zwischen ganzen Zahlen entspricht eine Teilbarkeitsrelation zwischen Idealen und umgekehrt. Primideale sind die Ideale  $(n)$ , wo  $n = 0$  oder  $n = 1$  oder  $n = \text{Primzahl}$ . Jedoch ist es in der Zahlentheorie — im Gegensatz zu den Definitionen der allgemeinen Idealtheorie — üblich, nur die Ideale  $\mathfrak{p} = (p)$ , wo  $p$  Primzahl, Primideale zu nennen; dies soll auch hier geschehen. Die Ideale  $(0)$ ,  $(1)$  und die Primideale sind einfache Ideale. Jedes Primärideal ist Potenz von  $(0)$ ,  $(1)$  oder einem Primideal. Neben den Satz von der eindeutigen Darstellbarkeit der natürlichen Zahlen als Produkt von Primzahlen tritt jetzt der Fundamentalsatz der Idealtheorie in  $\Gamma$ : *Jedes von  $(0)$  und  $(1)$  verschiedene Ideal läßt sich auf eine und bis auf die Reihenfolge der Faktoren auch nur auf eine Weise als Produkt von Primidealen darstellen.*

#### § 4. Kongruenzen.

Einer der bedeutendsten Fortschritte, die Gauß in seinen *Disqu. arithm.* über seine Vorgänger hinaus tat, bestand in der Einführung einer zweckmäßigen Bezeichnung für einen längst geläufigen Begriff. Gauß nennt zwei ganze Zahlen  $a$  und  $b$  kongruent nach dem Modul  $m$  ( $m > 0$ , ganz), wenn die Differenz  $a - b$  durch  $m$  teilbar ist, in Zeichen

$$(1) \quad a \equiv b \pmod{m}. \quad ^1)$$

Diese Ausdrucks- und Bezeichnungsweise ist darum von so großer Bedeutung, weil sie es ermöglicht, mit Kongruenzen nach einem festen Modul formal genau so zu rechnen wie mit Gleichungen. Die Kongruenzbeziehung erfüllt die drei Grundpostu-

1) Die Bezeichnung „Modul“ erklärt sich aus der geschichtlichen Entwicklung. Nach der Systematik von § 3 müßte es heißen: kongruent nach dem Hauptideal  $(m)$ . Siehe auch unten S. 1477.

late jeder Äquivalenzrelation, nämlich Reflexivität:  $a \equiv a \pmod{m}$ , Symmetrie: Aus  $a \equiv b \pmod{m}$  folgt  $b \equiv a \pmod{m}$ , Transitivität: Aus  $a \equiv b \pmod{m}$ ,  $b \equiv c \pmod{m}$  folgt  $a \equiv c \pmod{m}$ . Weiter folgt aus  $a \equiv b \pmod{m}$ ,  $c \equiv d \pmod{m}$ , daß  $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$  und  $ac \equiv bd \pmod{m}$ . Allein bei der Division ist Vorsicht nötig; aus  $ab \equiv cb \pmod{m}$  folgt *nicht*  $a \equiv c \pmod{m}$ , sondern nur  $a \equiv c \pmod{\frac{m}{(m, b)}}$ . Ist aber insbesondere  $m$  eine Primzahl  $p$ , so folgt aus  $ab \equiv cb \pmod{p}$  und  $b \not\equiv 0 \pmod{p}$  immer  $a \equiv c \pmod{p}$ ; ebenso darf man jede Kongruenz durch einen zum Modul teilerfremden Faktor kürzen.

Die Gesamtheit der Zahlen, die  $\text{mod. } m$  einer festen Zahl kongruent sind (also auch alle miteinander kongruent), faßt man zu einer *Restklasse* nach dem Modul  $m$  zusammen. Alle in der Restklasse enthaltenen Zahlen haben mit dem Modul  $m$  den gleichen größten gemeinsamen Teiler; dieser kann daher als *größter gemeinsamer Teiler* der Restklasse und des Moduls bezeichnet werden. Eine Restklasse ist durch Angabe einer einzigen ihrer Zahlen als Repräsentant eindeutig gekennzeichnet. Ein System von  $m$  Zahlen, von denen keine zwei kongruent  $\pmod{m}$  sind, heißt ein *volles Restsystem*  $\pmod{m}$ ; ein solches wird z. B. gebildet von den Zahlen  $1, 2, \dots, m$  (*kleinstes positives Restsystem*) oder von den ganzen Zahlen  $a$ , für die  $-\frac{m}{2} \leq a < \frac{m}{2}$  (*System der absolut kleinsten Reste*). Jede ganze Zahl ist einer und nur einer der Zahlen eines vollen Restsystems kongruent. Unter einem *reduzierten Restsystem*  $\pmod{m}$  versteht man ein vollständiges Repräsentantensystem der zu  $m$  teilerfremden Restklassen, derart, daß jede zu  $m$  teilerfremde Zahl einer und nur einer Zahl des reduzierten Restsystems kongruent ist. Meistens ist es jedoch vorteilhafter, die Restklassen nicht durch irgendwelche Repräsentanten zu vertreten, sondern sie als selbständige Dinge zu behandeln. Die Rechenregeln für Kongruenzen geben die Möglichkeit, eine Addition und Multiplikation von Restklassen eindeutig zu definieren, indem man als Summe bzw. Produkt zweier Restklassen diejenige Restklasse erklärt, der die Summe bzw. das Produkt eines beliebigen Repräsentanten der einen und eines beliebigen Repräsentanten der anderen angehört. Ähnlich läßt sich die Division einer beliebigen Restklasse durch eine zum Modul teilerfremde Restklasse erklären. Die sämtlichen  $m$  Restklassen  $\pmod{m}$  bilden bei Ver-

knüpfung durch Addition und Multiplikation einen endlichen Ring  $\Gamma_m$ . Dieser Ring enthält ein Einheitsselement, nämlich die durch 1 repräsentierte Restklasse; er enthält Nullteiler, wenn  $m$  zusammengesetzt ist.<sup>1)</sup> Wenn jedoch  $m$  eine Primzahl ist, enthält er keine Nullteiler und stimmt mit seinem Quotientenkörper überein. *Die Restklassen nach einem Primzahlmodul bilden bei Verknüpfung durch Addition und Multiplikation einen endlichen Körper.*

Die Begriffe Kongruenz und Restklasse lassen sich auf ein beliebiges Ideal  $\mathfrak{m}$  eines beliebigen Ringes  $\mathfrak{R}$  ausdehnen. Zwei Elemente  $a$  und  $b$  aus  $\mathfrak{R}$  heißen kongruent nach dem Ideal  $\mathfrak{m}$ , in Zeichen  $a \equiv b \pmod{\mathfrak{m}}$ , wenn  $a - b$  Element von  $\mathfrak{m}$  ist. Die Rechenregeln für Kongruenzen, die Definition der Restklassen und ihrer Verknüpfungen geschieht genau wie oben im Spezialfalle. Die in  $\mathfrak{m}$  enthaltenen Elemente bilden bei Verknüpfung durch Addition eine Untergruppe  $\mathfrak{U}_m$  der Gruppe der Addition  $\mathfrak{A}$  des Ringes  $\mathfrak{R}$ . Die Nebengruppen dieser Untergruppe sind die Restklassen  $\pmod{\mathfrak{m}}$ , und die Gruppe der Addition  $\mathfrak{A}_m$  in dem von den Restklassen gebildeten Ringe  $\mathfrak{R}_m$  kann als die Quotientengruppe  $\mathfrak{A}/\mathfrak{U}_m$  angesehen werden. Die in § 3 gegebenen Definitionen von Primideal und Primärideal lassen sich jetzt so fassen: *Ein Ideal ist ein Primideal, wenn sein Restklassenring keine Nullteiler hat; ein Ideal ist ein schwaches Primärideal, wenn sein Restklassenring nur solche Nullteiler hat, von denen eine Potenz gleich Null ist. Ein Ideal ist ein starkes Primärideal, wenn unter den Idealen seines Restklassenringes nur solche Nullteilerideale vorkommen, von denen eine Potenz das Nullideal ist.* Ferner kann man jetzt das zu einem starken Primärideal  $\mathfrak{q}$  zugehörige Primideal kennzeichnen als den größten gemeinsamen Teiler aller derjenigen Ideale des Ringes  $\mathfrak{R}$ , die  $\pmod{\mathfrak{q}}$  betrachtet Nullteilerideale des Restklassenringes  $\mathfrak{R}_q$  werden.

Die Gruppe  $\mathfrak{A}_m$  der Addition in  $\Gamma_m$  ist zyklisch und wird durch die Restklasse der Zahlen  $\equiv 1 \pmod{m}$  erzeugt. Das Einheitsselement dieser Gruppe ist die Restklasse der Null, d. h. die Restklasse der durch  $m$  teilbaren Zahlen. Komplizierter ist die Struktur der Gruppe  $\mathfrak{G}_m$  der zu  $m$  teilerfremden Restklassen bei Verknüpfung durch Multiplikation; ihre genaue Kenntnis ist für die Zahlentheorie von höchster Wichtigkeit. Euler hat bereits ihre Ordnung bestimmt (Abh. 271, Nov. Comm. Petrop. 8

---

1) D. h. wenn in der Primzahlzerlegung von  $m$  mindestens zwei (gleiche oder verschiedene) Primzahlen vorkommen.

(1760/61; 1763), S. 74—104 = *Comm. arithm.* **1**, S. 274—286 = *Op. omn.* ser. 1, **2**, S. 531—555). Durchläuft  $p$  alle in  $m$  aufgehenden Primzahlen, so ist diese gleich

$$(2) \quad \varphi(m) = m \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Die Bezeichnung  $\varphi(m)$  für diese zahlentheoretische Funktion (vgl. § 9 u. 10) ist seit Gauß (*Disqu. arithm.* art. 38) allgemein üblich. Es war gerade die Untersuchung der Gruppe  $\mathfrak{G}_m$ , die Euler auf die Entdeckung der ersten allgemeinen gruppentheoretischen Tatsachen und Beweismethoden führte. So bewies er (Abh. 262, *Nov. Comm. Petrop.* **7** (1758/59; 1761), S. 49—82 = *Comm. arithm.* **1**, S. 260—273 = *Op. omn.* ser. 1, **2**, S. 493—518 und in der vorher genannten Arbeit) den Satz, daß für jede zu  $m$  teilerfremde Zahl  $a$  die Kongruenz

$$(3) \quad a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

gilt, mit denselben Schlüssen, die zeigen, daß jedes Element einer endlichen Gruppe der Ordnung  $h$  der Gleichung  $A^h = E$  genügt ( $E$  = Einheitselement).

Ist insbesondere  $m$  eine Primzahl  $p$ , so wird  $\varphi(m) = p - 1$ ; dann besagt also (3): Für jede durch  $p$  nicht teilbare ganze Zahl  $a$  ist

$$(4) \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p};$$

für jede beliebige ganze Zahl  $a$  ist daher  $a^p - a$  durch  $p$  teilbar. Dieser wichtige Satz heißt nach seinem Entdecker der *Fermatsche Satz*. P. de Fermat hat ihn ohne Beweis am 18. Okt. 1640 brieflich an Frenicle de Bessy mitgeteilt; veröffentlicht wurde dieser Brief aber erst in den *Varia opera Mathematica*, Tolosae 1679, S. 162. (Siehe jetzt *Œuvres de Fermat* **2**, S. 206.) Leibniz entdeckte und bewies den Satz am 12. September 1680, vermutlich unabhängig von Fermat, veröffentlichte jedoch nichts über seine Entdeckung. Vgl. Mahnke, *Bibl. Math.* (3) **13** (1912—1913), S. 29—61. Der erste veröffentlichte Beweis rührt von Euler her und beruht auf der Eigenschaft der Binomialkoeffizienten  $\binom{p}{k}$  ( $1 \leq k \leq p-1$ ), durch  $p$  teilbar zu sein (Abh. 54, *Comm. Petrop.* **8** (1736; 1741), S. 141—146 = *Comm. arithm.* **1**, S. 21—23 = *Op. omn.* ser. 1, **2**, S. 33—37). Aus dem binomischen Lehrsatz folgt  $(a+1)^p \equiv 1 + a^p \pmod{p}$ ; wenn daher  $a^p \equiv a \pmod{p}$  ist, so gilt auch  $(a+1)^p \equiv a+1 \pmod{p}$ .



Da  $1^p \equiv 1 \pmod{p}$  richtig ist, gilt nach dem Induktionsprinzip  $a^p \equiv a \pmod{p}$  allgemein. Hat der spätere Eulersche Beweis von (3) den Vorzug, auf allgemeinen gruppentheoretischen Prinzipien zu beruhen, so läßt sich dafür der soeben gegebene Beweis in anderer Richtung, nämlich auf Funktionenkongruenzen (siehe unten S. 1481) verallgemeinern. Über den Beweis von Lagrange siehe § 6, S. 1489, über die „Umkehrung“ des Fermatschen Satzes § 18, S. 1568.

Hat  $m$  die Primzahlzerlegung

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

so läßt sich die Gruppe  $\mathfrak{G}_m$  als direktes Produkt der Gruppen  $\mathfrak{G}_{p_1^{\alpha_1}}, \mathfrak{G}_{p_2^{\alpha_2}}, \dots, \mathfrak{G}_{p_k^{\alpha_k}}$  darstellen. Für jede ungerade Primzahl  $p$  ist die Gruppe  $\mathfrak{G}_{p^\alpha}$  ( $\alpha \geq 1$ ) zyklisch und hat die Ordnung  $p^{\alpha-1}(p-1)$ , für  $p=2$  sind die Gruppen  $\mathfrak{G}_2$  und  $\mathfrak{G}_4$  zyklisch und haben die Ordnungen 1 bzw. 2, für  $\alpha \geq 3$  ist die Abelsche Gruppe  $\mathfrak{G}_{2^\alpha}$  direktes Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2 mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung  $2^{\alpha-2}$  (Gauß, *Disqu. arithm.* art. 82—92). Insbesondere gibt es also für jede ungerade Primzahlpotenz  $p^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ) solche ganze Zahlen  $g$ , für welche  $p^{\alpha-1}(p-1)$  der kleinste positive Exponent  $e$  ist, derart daß  $g^e \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$  ausfällt. Diese Zahlen  $g$  heißen *primitive Wurzeln*  $\pmod{p^\alpha}$ . Ihre Existenz war im Falle  $\alpha = 1$  schon Lambert (*Nova Acta Erudit.* 1769, S. 127) bekannt und wurde erstmalig von Euler bewiesen (Abh. 449, *Nov. Comm. Petrop.* 18 (1773; 1774), S. 85—135 = *Comm. arithm.* 1, S. 516—537 = *Op. omn.* ser. 1, 3, S. 240—281). Von einer zu  $m$  teilerfremden Zahl  $a$ , für die  $a^e \equiv 1 \pmod{m}$  gilt, aber  $a^{e'} \not\equiv 1 \pmod{m}$ , wenn  $1 \leq e' < e$  ist, sagt man, sie gehört zum Exponenten  $e$ . Ist  $e$  ein beliebiger Teiler von  $\varphi(m)$ , so gehören zum Exponenten  $e$  genau  $\varphi(e)$  Restklassen  $\pmod{m}$ ; es gibt insbesondere für eine Primzahl  $p$  genau  $\varphi(p-1)$  inkongruente primitive Wurzeln  $\pmod{p}$ .

Ist  $g$  eine feste primitive Wurzel  $\pmod{p}$ , so läßt sich zu jeder zu  $p$  teilerfremden Zahl  $a$  eine Zahl  $\xi$  bestimmen, derart daß  $a \equiv g^\xi \pmod{p}$  gilt.  $\xi$  ist  $\pmod{p-1}$  eindeutig bestimmt. Durchläuft  $\xi$  ein vollständiges Restsystem  $\pmod{p-1}$ , so durchläuft  $a$  ein reduziertes Restsystem  $\pmod{p}$ ; dadurch sind die Gruppen  $\mathfrak{G}_p$  und  $\mathfrak{U}_{p-1}$  einstufig isomorph aufeinander abgebildet. Die Restklasse von  $\xi \pmod{p-1}$  heißt der *Index* von  $a$  in bezug auf die Basis  $g$ ; man schreibt



$$\xi \equiv \text{ind. } a \equiv \text{ind. } a \pmod{p-1}$$

(Gauß, *Disqu. arithm.* art. 57—59). Mit Indizes bei fester Basis  $g$  kann man rechnen wie mit Logarithmen, es ist

$$\text{ind. } (ab) \equiv \text{ind. } a + \text{ind. } b \pmod{p-1}$$

$$\text{ind. } a^n \equiv n \text{ ind. } a \pmod{p-1}.$$

Zwischen den Indizes ein und derselben zu  $p$  teilerfremden Restklasse  $a$  in bezug auf zwei Basen  $g$  und  $g'$  besteht die Beziehung

$$\text{ind. } a \equiv \text{ind. } g \cdot \text{ind. } a \pmod{p-1}.$$

Insbesondere gilt für jede primitive Wurzel  $g$  als Basis

$$\text{ind. } 1 \equiv 0 \pmod{p-1}$$

$$\text{ind. } g \equiv 1 \pmod{p-1}$$

und bei ungeradem  $p$

$$\text{ind. } (-1) \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p-1}.$$

Für die Moduln 4 und die ungeraden Primzahlpotenzen  $p^\alpha$  ( $\alpha = 2, 3, \dots$ ) läßt sich die Indexrechnung in genau der gleichen Weise begründen; für die Moduln  $2^\alpha$  ( $\alpha \geq 3$ ) lassen sich alle ungeraden Restklassen durch das System der Zahlen  $(-1)^\xi 5^\eta$  ( $\xi = \pm 1$ ;  $\eta = 0, 1, \dots, 2^{\alpha-2} - 1$ ) repräsentieren. Für beliebig zusammengesetzte Moduln kann man an Stelle der Indizes Indexsysteme anwenden (Dirichlet, *Berl. Abh.* 1837, S. 45 = *Werke* 1, S. 333).

Eine besonders bequeme Methode zur Berechnung der Indizes zu gegebenen Numeri entwickelte A. L. Crelle (*J. f. Math.* 9 (1832), S. 27—53). C. G. J. Jacobi baute sie aus und ließ danach eine Tafel berechnen, in der für alle Primzahlen und ungeraden Primzahlpotenzen  $< 1000$  die Indizes zu gegebenen Numeri und die Numeri zu gegebenen Indizes gegenübergestellt sind (*Canon arithmeticus*, Berlin (typis academicis) 1839; errata bei Cunningham, *Mess. of Math.* 46 (1916), S. 57—59 und S. 67—68). Von weiteren Tafeln primitiver Wurzeln und Indicum, die in großer Zahl berechnet worden sind, seien nur genannt: G. Wertheim, *Acta Math.* 17 (1893), S. 315—320, 20 (1896), S. 153—157, 22 (1899), S. 200 (gibt die kleinste primitive Wurzel für die Primzahlen  $< 5000$  und für einige

andere), derselbe, *Anfangsgründe*, S. 406—411 (kleinste primitive Wurzel für die Primzahlen  $< 6200$  und für einige andere); M. Kraitchik, *Recherches*, S. 131—145 (gibt eine primitive Wurzel für die Primzahlen  $\leq 27457$ ), S. 216—267 (Indizes der Primzahlen  $< 100$  für alle in Frage kommenden Moduln  $< 10000$ ).

Ein tief liegendes Problem ist die Abschätzung der *kleinsten* positiven primitiven Wurzel  $g(p)$  für eine gegebene Primzahl  $p$  als Modul. Mit Hilfe einer Abschätzung endlicher Charakterensummen (siehe § 14) gelang es Winogradoff (*Žurnal Fiziko-matematičeskoe obščestvo pri Perm* 1918—1919) zu zeigen

$$g(p) < 2^{\bar{\omega}(p-1)} \frac{p-1}{\varphi(p-1)} \sqrt[p]{p} \log p,$$

wo  $\bar{\omega}(n)$  die Anzahl der verschiedenen in  $n$  aufgehenden Primzahlen bezeichnet. Hieraus folgt sofort

$$g(p) = O\left(p^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right) \quad (\varepsilon > 0 \text{ beliebig}).$$

Vgl. auch Landau, *Vorles.* 2, S. 178—180.

Der Kongruenzbegriff läßt sich in folgender Weise auf *Funktionenkongruenzen* ausdehnen: Zwei ganzzahlige Polynome  $f(x, y, z, \dots)$  und  $g(x, y, z, \dots)$  in beliebig vielen Unbestimmten heißen nach dem Modul  $m$  kongruent, wenn die Koeffizienten der einzelnen Potenzprodukte  $x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots$  in  $f(x, y, z, \dots)$  den entsprechenden in  $g(x, y, z, \dots)$  nach dem Modul  $m$  kongruent sind. In die Sprache der Idealtheorie übersetzt, handelt es sich um Kongruenz nach dem aus  $m$  abgeleiteten Hauptideal  $(m)$  innerhalb des Ringes der ganzzahligen Polynome von  $x, y, z, \dots$ . Für Primzahlmoduln ergibt sich aus der Teilbarkeit der Polynomkoeffizienten

$$\frac{p!}{a! b! \dots d!}$$

$$(a + b + \dots + d = p \quad 0 \leq a < p, \quad 0 \leq b < p, \dots, \quad 0 \leq d < p)$$

durch  $p$  und aus (4) der verallgemeinerte *Fermatsche Satz*:

$$(5) \quad \{f(x, y, z, \dots)\}^p \equiv f(x^p, y^p, z^p, \dots) \pmod{p};$$

wiederholte Anwendung führt zu der Formel

$$(6) \quad \{f(x, y, z, \dots)\}^{p^n} \equiv f(x^{p^n}, y^{p^n}, z^{p^n}, \dots) \pmod{p}$$

für jedes ganze  $n \geq 0$ .

Genau wie in der historischen Entwicklung der Algebra die algebraischen Gleichungen mit Unbekannten im Mittelpunkt des Interesses standen und sich von da aus die meisten weiteren Probleme ergaben, spielten auch in der Zahlentheorie die Kongruenzen mit Unbekannten eine wichtige Rolle. Das Hauptproblem ist hier folgendes: Gegeben sind beliebig viele ganzzahlige Polynome  $f(x, y, z, \dots)$ ,  $g(x, y, z, \dots)$ , ... in beliebig vielen Unbestimmten  $x, y, z, \dots$  und ein Modul  $m$ . Kann man den Unbestimmten solche speziellen ganzzahligen Werte beilegen, daß die Zahlenkongruenzen

$$f(x, y, z, \dots) \equiv 0 \pmod{m}$$

$$g(x, y, z, \dots) \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\dots \dots \dots$$

erfüllt sind? Wenn  $x_0, y_0, z_0, \dots$  eine Lösung dieses Systems ist, so ist jedes Zahlensystem  $x_1, y_1, z_1, \dots$ , für welches

$$x_1 \equiv x_0, \quad y_1 \equiv y_0, \quad z_1 \equiv z_0, \quad \dots \pmod{m}$$

ist, gleichfalls eine Lösung. Solche Lösungen zählt man nicht als verschieden, fragt also nur nach Restklassen  $(\text{mod. } m)$ . Auch hier bewähren sich die allgemeinen Begriffe des vorigen Paragraphen. In ihrer Sprache heißt die Aufgabe: Es ist ein System algebraischer *Gleichungen* aufzulösen, deren Koeffizienten dem Ringe  $\mathfrak{R}_m$  der Restklassen der ganzen Zahlen  $(\text{mod. } m)$  angehören, und zwar wird nach Lösungen gefragt, die dem gleichen Ringe angehören. Genau wie in der Lehre von den algebraischen Gleichungen beginnt man mit den Kongruenzen mit *einer* Unbekannten und klassifiziert diese nach dem Grade des Polynoms  $f(x)$ , das  $\equiv 0 \pmod{m}$  werden soll.

Manchmal ist es nicht erforderlich, die Lösungen selbst zu kennen, sondern es genügt die Kenntnis ihrer Anzahl. In dieser Hinsicht hat G. Libri (*Mém. prés. p. div. savants à l'acad. d. sciences Paris*, **5**, 1838 (vorgelegt 1825), S. 30, 31 und *J. f. Math.* **9** (1832), S. 80) den folgenden Satz gegeben: Ist  $f(x, y, \dots, t)$  ein ganzzahliges Polynom und  $m$  eine natürliche Zahl, so ist die Anzahl der Systeme ganzer Zahlen,  $x, y, \dots, t$ , die den Ungleichungen

$$x_0 \leq x \leq x_1, \quad y_0 \leq y \leq y_1, \quad \dots, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

$$(x_0, \dots, t_1 \text{ ganz})$$

genügen und die Kongruenz

$$f(x, y, \dots, t) \equiv 0 \pmod{m}$$

erfüllen, gleich

$$(7) \quad \frac{1}{m} \sum_{l \pmod{m}} \left( \sum_{x=x_0}^{x_1} \sum_{y=y_0}^{y_1} \dots \sum_{t=t_0}^{t_1} e^{\frac{2\pi i l}{m} f(x, y, \dots, t)} \right). \quad 1)$$

Vgl. dazu unten § 14, S. 1529.

## § 5. Lineare Kongruenzen.

*Die lineare Kongruenz mit einer Unbekannten*

$$(1) \quad ax \equiv b \pmod{m}$$

ist dann und nur dann lösbar, wenn der größte gemeinsame Teiler  $d$  von  $a$  und  $m$  in  $b$  aufgeht. Ist diese Bedingung erfüllt, so besitzt sie genau  $d$  modulo  $m$  inkongruente Lösungen, und die Gesamtheit der Zahlen  $x$ , welche (1) befriedigen, bildet eine einzige Restklasse  $\left(\text{mod. } \frac{m}{d}\right)$ . (Gauß, *Disqu. arithm.* art. 29, 30.)

Die Lösungen von (1) (wie überhaupt aller Kongruenzen mit Unbekannten nach einem Zahlenmodul) können prinzipiell dadurch gefunden werden, daß man für  $x$  die sämtlichen Zahlen eines vollständigen Restsystems  $\pmod{m}$  durchprobiert. Der verallgemeinerte Fermatsche Satz (Formel (3) in § 4) gibt die Möglichkeit, die Lösungen von (1) *allgemein* (d. h. bei unbestimmt gelassenen  $a, b, m$ ) unmittelbar hinzuschreiben:

$$(2) \quad x \equiv \left(\frac{a}{d}\right)^{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)-1} \left(\frac{b}{d}\right) \pmod{\frac{m}{d}};$$

doch hat diese Formel nur theoretischen Wert, bei einigermaßen großen Moduln  $m$  ist sie zur praktischen Verwendung ungeeignet. Für die praktische Auflösung von (1), wenn für  $a, b, m$  bestimmte Zahlenwerte vorgegeben sind, ist der vorteilhafteste Weg die Anwendung von Kettenbrüchen. Die Kongruenz (1) ist gleichbedeutend mit der Gleichung

$$(3) \quad ax - my = b.$$

1) Das Zeichen  $\sum_{l \pmod{m}}$  bedeutet, daß  $l$  ein beliebiges vollständiges Restsystem  $\pmod{m}$  durchläuft.

Man entwickle nun den Quotienten  $\frac{a}{m}$  in einen regelmäßigen Kettenbruch (vgl. dies *Repertorium* Bd. I, 1, S. 449 ff.) und bezeichne mit  $p_n, q_n$  bzw.  $p_{n-1}, q_{n-1}$  das letzte bzw. vorletzte Paar von Näherungszähler und -nenner; dann ist  $a = dp_n, b = dq_n$ , und folglich gilt

$$aq_{n-1} - mp_{n-1} = d(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}) = \pm d,$$

die Gleichung (3) wird somit gelöst durch

$$(4) \quad x_0 = \pm \frac{b}{d} q_{n-1}, \quad y_0 = \pm \frac{b}{d} p_{n-1},$$

und aus dieser einen Lösung ergeben sich sämtliche in der Gestalt

$$(5) \quad x = x_0 + l \frac{m}{d}, \quad y = y_0 + l \frac{m}{d}$$

$$(l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Die Lösung von (1) heißt also

$$(6) \quad x \equiv x_0 \pmod{\frac{m}{d}}.$$

Die Bildung des Kettenbruches für  $\frac{a}{m}$  ist übrigens nur formal verschieden von der Anwendung des Euklidischen Algorithmus (siehe § 2) auf die Zahlen  $a$  und  $m$ ; letzterer liefert ja sofort eine Lösung der Gleichung  $ax - my = d$ , die nur unwesentlich spezieller ist als (3). Für die praktische Handhabung ist natürlich das Kettenbruchschema vorzuziehen. Die geschilderte Lösungsmethode war der Sache nach bereits den indischen Mathematikern Brahmagupta (7. Jahrh. p. Chr. n.) und Bhâskara Âcârya (12. Jahrh. p. Chr. n.) bekannt, in Europa wurde sie im 17. Jahrhundert von verschiedenen Mathematikern in verschiedener Form wieder entwickelt.

Wenn  $d = (a, m) = 1$  ist, so wird *definitionsgemäß* die Lösung von (1) dem Bruche  $\frac{b}{a}$  nach dem Modul  $m$  kongruent gesetzt. Mit Brüchen, deren Nenner zum Modul teilerfremd ist, kann man modulo  $m$  nach genau denselben Regeln rechnen, wie in der gewöhnlichen Bruchrechnung, d. h. es ist

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \equiv \frac{ad \pm bc}{bd} \pmod{m}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \equiv \frac{ac}{bd} \pmod{m}$$

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{ac}{bc} \pmod{m}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \equiv \frac{ad}{bc} \pmod{m},$$

wenn alle vorkommenden Nenner zu  $m$  teilerfremd sind. Hier-  
nach lassen sich nicht nur die ganzen, sondern überhaupt *alle*  
*rationalen Zahlen*, deren Nenner zu  $m$  teilerfremd ist, in  $m$  Rest-  
klassen  $(\text{mod. } m)$  verteilen. *Eine rationale Zahl, deren Nenner*  
*zu  $m$  teilerfremd ist, heißt modulo  $m$  ganz oder kürzer für  $m$*   
*ganz*. Vom Standpunkt der Gruppentheorie hat die Verteilung  
der modulo  $m$  ganzen Zahlen auf Restklassen  $(\text{mod. } m)$  folgende  
Bedeutung: Die Gesamtheit der modulo  $m$  ganzen Zahlen bildet  
bei Verknüpfung durch Addition eine Untergruppe  $\mathfrak{H}_m$  der  
Gruppe  $\mathfrak{A}$  der Addition in  $\mathbb{P}$ . Die durch  $m$  teilbaren rationalen  
Zahlen, d. h. die modulo  $m$  ganzen Zahlen mit durch  $m$  teil-  
barem Zähler, bilden wiederum eine Untergruppe  $\mathfrak{R}_m$  von  $\mathfrak{H}_m$ .  
Während der Index von  $\mathfrak{R}_m$  unter  $\mathfrak{A}$  im Falle  $m > 1$  unendlich  
ist, ist der Index von  $\mathfrak{R}_m$  unter  $\mathfrak{H}_m$  stets endlich und gleich  $m$ .  
Die genannten Restklassen sind die Nebengruppen von  $\mathfrak{H}_m$   
nach  $\mathfrak{R}_m$ .

Bei dieser Gelegenheit sei beiläufig auch der *multiplikative*  
Kongruenzbegriff erwähnt, den Hasse neuerdings (*Bericht Ia*, § 3)  
eingeführt hat. Nach diesem heißen zwei rationale Zahlen  $a$  und  $b$   
kongruent  $(\text{mod. } m)$ , wenn  $a = b (1 + c)$  mit  $(\text{mod. } m)$  ganzem  $c$   
gesetzt werden kann. Dieser Kongruenzbegriff ist von dem vorigen  
scharf zu unterscheiden.

Die Behandlung von gleichzeitigen Kongruenzbedingungen  
nach verschiedenen Moduln beruht auf dem Satze: *Sind  $m_1, m_2, \dots, m_k$*   
*paarweise teilerfremd, so gibt es ganze Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , welche*  
*die Kongruenzen*

$$(7) \quad \begin{array}{ll} x_1 \equiv 1 \pmod{m_1} & x_1 \equiv 0 \pmod{m_2 m_3 \cdots m_k} \\ x_2 \equiv 1 \pmod{m_2} & x_2 \equiv 0 \pmod{m_1 m_3 \cdots m_k} \\ \cdot & \cdot \\ x_k \equiv 1 \pmod{m_k} & x_k \equiv 0 \pmod{m_1 m_2 \cdots m_{k-1}} \end{array}$$

*erfüllen. Jede der Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ist nach dem Modul*  
 $m_1 m_2 \cdots m_k$  *eindeutig bestimmt. Setzt man nämlich*

$$M = m_1 m_2 \cdots m_k \quad \text{und} \quad M_i = \frac{M}{m_i},$$



so wird

$$x_i \equiv M_i y_i \pmod{M},$$

wo  $y_i$  aus

$$M_i y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$$

zu bestimmen ist. Gruppentheoretisch ausgedrückt lautet der Satz: Die Gruppe  $\mathfrak{U}_{m_1 m_2 \dots m_k}$  ist die direkte Summe der Gruppen  $\mathfrak{U}_{m_1}, \mathfrak{U}_{m_2}, \dots, \mathfrak{U}_{m_k}$ . Um hiernach das System

$$(8) \quad x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \dots, \quad x \equiv a_k \pmod{m_k},$$

bei dem die Moduln paarweise teilerfremd sind, aufzulösen, bestimme man  $x_1, x_2, \dots, x_k$  aus (7) und setze

$$(9) \quad x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k \pmod{m_1 m_2 \dots m_k}.$$

Aus diesen Sätzen folgt, daß jede Kongruenzbedingung nach einem Modul  $m$  völlig gleichbedeutend ist mit der Gesamtheit der Kongruenzbedingungen nach den verschiedenen in  $m$  aufgehenden höchsten Primzahlpotenzen als Moduln. Es bedeutet daher, wenigstens für den theoretischen Standpunkt, keine Einschränkung der Allgemeinheit, bei der Untersuchung von Kongruenzen mit Unbekannten die Moduln von vornherein als Primzahlpotenzen vorauszusetzen.

Bei vielen Aufgaben der angewandten und der experimentellen Zahlentheorie, namentlich bei den sogenannten *Ausschließungsmethoden*, treten Systeme folgender Art auf:

$$\begin{array}{llll} x \equiv a_{11} & \text{oder} & a_{12} & \text{oder} \dots \text{oder} & a_{1r_1} & \pmod{m_1} \\ x \equiv a_{21} & \text{oder} & a_{22} & \text{oder} \dots \text{oder} & a_{2r_2} & \pmod{m_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x \equiv a_{k1} & \text{oder} & a_{k2} & \text{oder} \dots \text{oder} & a_{kr_k} & \pmod{m_k}, \end{array}$$

wo die Moduln paarweise teilerfremd sind. Man gewinnt die Gesamtheit ihrer Lösungen, d. h. alle Restklassen nach dem Modul  $m_1 m_2 \dots m_k$ , welche für  $x$  in Frage kommen, am raschesten und sichersten durch graphische und mechanische Hilfsmittel, die den jeweiligen besonderen Bedürfnissen angepaßt sind. Vgl. z.B. Gauß, *Disqu. arithm.* art. 322, 331; Kraitchik, *Théorie* 1, S. 35—44; Lehmer, *Proc. Nat. Acad. Science* 11 (1925), S. 97—98.

*Systeme linearer Kongruenzen* mit  $n$  Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nach einem Primzahlmodul  $p$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \equiv b_i \pmod{p} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

unterliegen genau den gleichen Regeln wie Systeme linearer Gleichungen, weil die Restklassen nach einem Primzahlmodul einen *Körper* bilden. Man hat nur überall unter dem „Verschwinden“ von Determinanten usw. das Verschwinden (mod.  $p$ ) zu verstehen. Für Systeme linearer Kongruenzen nach *Primzahlpotenzmoduln* werden die Bedingungen für die Lösbarkeit komplizierter wegen der Existenz der Nullteiler im Restklassenring. Aus der zahlreichen Literatur über Systeme linearer Kongruenzen nach zusammengesetzten Moduln sei genannt: Smith, *Report* art. 9, derselbe, *Phil. Trans.* **151** (1862), S. 293—326 = *Coll. Math. Papers* **1**, S. 367—406 (insbes. art. 17 und 18); derselbe *London M. S. Proc.* **4** (1873), S. 241—249 = *Coll. Math. Papers* **2**, S. 71—80; Frobenius, *J. f. Math.* **86** (1879), S. 146—208 und **88** (1879), S. 96—116 (insbes. § 11 in **86**, S. 187—194 und Satz III auf S. 109 in **88**); Steinitz, *Math. Ver.* **5** (1896; 1901), S. 87; Bachmann, *Quadratische Formen* Abt. 1, S. 351 bis 370.

### § 6. Höhere Kongruenzen (Allgemeines).

Die Theorie der Kongruenzen höheren Grades mit einer Unbekannten nach einem Primzahlmodul

$$(1) \quad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{p}$$

ist im vorigen Jahrhundert vielfach und in sehr verschiedener Gestalt bearbeitet worden. Siehe vor allem Gauß, *Analysis residuorum*, cap. VIII (wahrscheinlich 1797 oder 1798) = *Werke* **2**, S. 212—240; Galois, *Bulletin de Férussac* **13** (1830) S. 428 bis 435, abgedruckt in *J. de Math.* **11** (1846), S. 398—407 und in *Œuvres math. d'Év. Galois* (Paris 1897), S. 15—23; Schönemann, *J. f. Math.* **31** (1846), S. 269—325; Dedekind, *J. f. Math.* **54** (1857) S. 1—26. Heute stellt sie sich am einfachsten dar vom Standpunkt der allgemeinen Körpertheorie (vgl. Steinitz, *J. f. Math.* **137** (1910), S. 167—309) auf Grund der Bemerkung, daß die Gesamtheit der Polynome in  $x$  mit Koeffizienten aus dem endlichen Körper  $\Gamma_p$  (s. S. 1477) einen Ring ohne Nullteiler bildet. Die Steinitzsche Theorie hellt auch klar auf, warum die formal so verschiedenen Behandlungsweisen mittels der „Galoisschen Imaginären“ und der „Kongruenzen nach einem Doppelmodul“ ihrem Inhalte nach identisch sind.

Die wichtigsten Begriffe und Sätze aus diesem Gebiete sind die folgenden, von denen die meisten *mutatis mutandis* sogar für die Polynome in  $x$  mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper  $K$  an Stelle des Körpers  $\Gamma_p$  gelten:

Eine Kongruenz  $n$ -ten Grades nach einem Primzahlmodul

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{p}$$

kann nicht mehr als  $n$  verschiedene, d. h. modulo  $p$  inkongruente Wurzeln haben; sind  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  voneinander verschiedene Wurzeln von (1), so ist  $f(x)$  modulo  $p$  durch  $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m)$  teilbar, d. h. es gibt ein ganzzahliges Polynom  $g(x)$  vom  $(n - m)$ -ten Grade, für das identisch in  $x$  gilt

$$f(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m)g(x) \pmod{p}.$$

Lagrange, *Histoire de l'acad. d. sciences et belles lettres Berlin* 24 (1768/70), S. 192—194, abgedruckt *Œuvres* 2, S. 667—669; Gauß, *Disqu. arithm.* art. 43; *Anal. resid.* art. 338.

Nach einem zusammengesetzten Modul kann dagegen eine Kongruenz sehr wohl mehr Wurzeln haben als ihr Grad beträgt. (Beispiel:  $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{24}$  hat die acht Lösungen  $x \equiv \pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 11 \pmod{24}$ .) Andererseits gibt es sowohl nach Primzahlmoduln wie nach zusammengesetzten Moduln Kongruenzen, die weniger Lösungen haben als ihr Grad beträgt. (Beispiel:  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$  besitzt keine Lösung.)

Hat die Kongruenz (1) genau  $n$  verschiedene Wurzeln und gilt identisch in  $x$

$$f(x) \equiv \varphi(x)\psi(x) \pmod{p},$$

so hat jede der Kongruenzen

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p}, \quad \psi(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

gleichfalls ebensoviele Wurzeln, wie ihr Grad angibt.

Hat die Kongruenz (1) die  $n$  verschiedenen Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , so sind die Zahlen  $-a_1, a_2, -a_3, \dots, (-1)^n a_n$  den elementarsymmetrischen Funktionen von  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \pmod{p}$  kongruent.

Folgende Anwendung der vorangehenden Sätze verdient Beachtung: Da nach dem Fermatschen Satze (vgl. § 4) die Kongruenz  $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  die Lösungen  $x \equiv 1, 2, \dots, p-1$  hat, ergibt sich die identische Kongruenz

$$(2) \quad x^{p-1} - 1 \equiv (x - 1)(x - 2) \dots (x - (p - 1)) \pmod{p}.$$

Aus ihr folgt insbesondere durch die Einsetzung  $x \equiv 0 \pmod{p}$  der sogenannte *Wilsonsche Satz*:

$$(3) \quad (p-1)! \equiv -1 \pmod{p},$$

der auch zahlreicher anderer Beweise fähig ist. Der Satz wurde ohne Beweis von Waring, *Meditationes algebraicae*, Cambridge (1770), S. 218 veröffentlicht, der als seinen Urheber Wilson nennt. Jedoch war er etwa 100 Jahre früher Leibniz bekannt, siehe Mahnke, *Bibl. Math.* (3), **13** (1912—1913), S. 42. Den ersten Beweis veröffentlichte Lagrange, *Nouv. mém. acad. royale d. sciences et belles-lettres d. Berlin* 1771 (1773), S. 125—137 = *Œuvres* **3**, S. 423—438, indem er in der Kongruenz (2)  $x = 0$  einsetzte. Da er (2) ohne Benutzung des Fermatschen Satzes gewonnen hatte, konnte er diesen aus (2) folgern, weil die rechte Seite von (2) modulo  $p$  verschwindet, sobald für  $x$  eine zu  $p$  teilerfremde Zahl eingesetzt wird. Der Wilsonsche Satz ist für Primzahlen charakteristisch, d. h. wenn für eine natürliche Zahl  $m > 1$  die Kongruenz  $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$  besteht, so ist  $m$  Primzahl. Ferner folgt aus (2): Jede ganzzahlige ganze homogene symmetrische Funktion von  $p-1$  Zahlen, die ein Repräsentantensystem der zu  $p$  teilerfremden Restklassen  $\pmod{p}$  bilden, ist  $\equiv 0 \pmod{p}$ , außer vielleicht, wenn ihr Grad durch  $p-1$  teilbar ist.

Im Folgenden bedeute Polynom eine ganze rationale Funktion von  $x$  mit ganzzahligen Koeffizienten. Zwei Polynome, die identisch in  $x$  kongruent  $\pmod{p}$  sind, gelten als nicht voneinander verschieden. Der Koeffizient der höchsten vorkommenden Potenz von  $x$  soll durch  $p$  nicht teilbar sein. Ein Polynom  $f(x)$  heißt  $\pmod{p}$  durch ein zweites  $g(x)$  teilbar, wenn ein Polynom  $h(x)$  existiert, derart daß identisch  $f(x) \equiv g(x)h(x) \pmod{p}$  gilt. Ein Polynom  $n$ -ten Grades, das keinen nicht konstanten Teiler von kleinerem Grade als  $n$  besitzt, heißt  $\pmod{p}$  irreduzibel oder auch eine Primfunktion  $\pmod{p}$ . Zwei Polynome, die außer Konstanten keine gemeinsamen Teiler besitzen, heißen teilerfremd. Eine Primfunktion ist zu jedem Polynom von kleinerem Grade teilerfremd. Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  teilerfremde Polynome von den Graden  $m$  bzw.  $n$ , so gibt es zwei Polynome  $f_1(x)$  und  $g_1(x)$ , deren Grade nicht größer als  $n-1$  bzw.  $m-1$  sind, derart daß

$$(4) \quad f(x)f_1(x) + g(x)g_1(x) \equiv 1 \pmod{p}$$

identisch in  $x$  gilt.  $f_1(x)$  und  $g_1(x)$  lassen sich aus  $f(x)$  und  $g(x)$  durch einen dem Euklidischen Algorithmus analogen Rechen-  
vorgang ermitteln. Ein Polynom, dessen höchster Koeffizient  
 $\equiv 1 \pmod{p}$  ist, heiße normiert. *Jedes normierte Polynom läßt  
sich auf eine und abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren  
auf nur eine Weise als Produkt normierter Primfunktionen dar-  
stellen.* Ein Polynom  $f(x)$  ist hiernach dann und nur dann  
 $\pmod{p}$  durch das Quadrat einer Primfunktion teilbar, wenn  
auch die Ableitung  $f'(x) \pmod{p}$  durch die Primfunktion teil-  
bar ist; daraus folgt, daß  $f(x)$  für diejenigen und nur die-  
jenigen Primzahlen als Moduln durch das Quadrat einer Prim-  
funktion teilbar ist, welche in der Diskriminante von  $f(x)$   
aufgehen.

Für jede Primzahl  $p$  und jeden Grad  $n$  gibt es Prim-  
funktionen; die Anzahl der verschiedenen normierten unter ihnen  
beträgt nach Gauß (*Anal. resid. art. 347*) und Dedekind (l. c.  
S. 21—23)

$$(5) \quad \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) p^{\frac{n}{d}}.$$

$\mu(d)$  hat die auf S. 1519 erklärte Bedeutung. Die Funktion  $x^{p^n} - x$   
ist  $\pmod{p}$  dem Produkte sämtlicher voneinander verschiedener  
normierter Primfunktionen  $\pmod{p}$  kongruent, deren Grad ein  
Teiler von  $n$  ist. A. Serret (*Mém. Ac. Sc. de l'Institut de France*  
**35** (1866), S. 617—688; *Cours d'algbre supérieure*, d. 4, **2**  
(1879), S. 122—189) gab eine einfache Methode, um für jede  
vorgelegte Primzahl  $p$  und jeden Grad  $n$  Primfunktionen all-  
gemein anzugeben.

Lautet die Zerlegung von  $f(x)$  in Primfunktionen

$$(6) \quad f(x) \equiv \varphi_1(x) \varphi_2(x) \cdots \varphi_k(x) \pmod{p},$$

so ist die Kongruenz  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$  dann und nur dann  
lösbar, wenn unter den Polynomen  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$  solche  
vom ersten Grade vorkommen. Da diese dann Teiler von  $x^p - x$   
sind, so besitzt  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$  dann und nur dann L-  
sungen, wenn die Resultante von  $x^p - x$  und  $f(x)$  durch  $p$  teil-  
bar ist. Hieraus folgt leicht der Satz: Die Kongruenz

$$(7) \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \equiv 0 \pmod{p}$$

besitzt dann und nur dann eine zu  $p$  teilerfremde Lösung  $x$ ,  
wenn die zyklische Determinante



$$D = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & . & . & . & . & A_{p-3} & A_{p-2} \\ A_1 & A_2 & . & . & . & . & A_{p-2} & A_0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ A_{p-2} & A_0 & . & . & . & . & A_{p-4} & A_{p-3} \end{vmatrix}$$

durch  $p$  teilbar ist, wobei

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 + a_{p-1} + a_{2(p-1)} + \dots \\ A_1 &= a_1 + a_{1+(p-1)} + a_{1+2(p-1)} + \dots \\ . & . . . . . \\ A_{p-2} &= a_{p-2} + a_{p-2+(p-1)} + a_{p-2+2(p-1)} + \dots \end{aligned}$$

gesetzt ist. Hat die Determinante  $D \pmod{p}$  den Rang  $p - k - 1$ , so besitzt die Kongruenz (7) genau  $k$  durch  $p$  nicht teilbare Lösungen. (J. König und G. Raußnitz, *Math. und Naturwissenschaftl. Berichte aus Ungarn*, **1** (1882—83), S. 266—275.) — Schon Gauß hat die Lösung einer Kongruenz (7) als Spezialfall der allgemeineren Aufgabe angesehen, ihre Primfunktionenzerlegung (6) aufzufinden. (*Anal. resid. art.* 338.)

Ist  $\varphi(x)$  eine (normierte) Primfunktion vom Grade  $n > 1$ , so behandelt man nach Galois (l. c.) die Kongruenz  $\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p}$ , indem man eine imaginäre Lösung  $i$  einführt (*Galoissche Imaginäre*). Jede ganze rationale Funktion von  $i$  läßt sich dann auf die Gestalt

$$(8) \quad c_1 i^{n-1} + c_2 i^{n-2} + \dots + c_n \pmod{p}$$

bringen, wo  $c_1, c_2, \dots, c_n$  Zahlen aus einem vollen Restsystem  $\pmod{p}$  sind. Die  $p^n$  so erklärten „imaginären Zahlen“ bilden nicht nur einen Ring, sondern einen *endlichen Körper*. In diesem Körper zerfällt  $\varphi(x)$  in  $n$  Linearfaktoren:

$$(9) \quad \varphi(x) \equiv (x - i)(x - i^p)(x - i^{p^2}) \dots (x - i^{p^{n-1}}) \pmod{p},$$

so daß  $\varphi(x) \equiv 0$  außer  $i$  noch die Wurzeln  $i^p, i^{p^2}, \dots, i^{p^{n-1}}$  hat.

Gauß und Dedekind (l. c.) erreichen die Zurückführung auf die Theorie der endlichen Körper, indem sie Kongruenzen nach einem *Doppelmodul*  $p, \varphi(x)$  betrachten. Zwei Funktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  heißen kongruent nach dem Doppelmodul  $p, \varphi(x)$ , in Zeichen

$$f_1(x) \equiv f_2(x) \pmod{p, \varphi(x)},$$



wenn ihre Differenz modulo  $p$  durch  $\varphi(x)$  teilbar ist. Die  $p^n$  Restklassen sämtlicher Polynome (mod.  $p, \varphi(x)$ ) bilden dann einen endlichen Körper, der mit dem aus den „Zahlen“ (8) gebildeten isomorph ist. (Vgl. dies *Repertorium* Teil I, 1, S. 177—179.) Übrigens entstehen auf die angegebene Weise *alle* Typen endlicher Körper, wenn  $p$  alle Primzahlen und  $\varphi(x)$  alle Primfunktionen (mod.  $p$ ) durchläuft.

Für jeden endlichen Körper aus  $p^n$  Elementen ist die Abelsche Gruppe, die bei Verknüpfung seiner Elemente durch Addition entsteht, die direkte Summe von  $n$  zyklischen Gruppen der Ordnung  $p$ . Hensel bewies darüber hinaus, daß es für die Gruppe der Addition eine Basis der speziellen Form

$$w, \quad w^p, \quad w^{p^2}, \quad \dots, \quad w^{p^{n-1}}$$

gibt, wo  $w$  ein passendes Körperelement bedeutet (*J. f. Math.* **103** (1888), S. 230—237). Die  $p^n - 1$  von Null verschiedenen Elemente bilden bei Verknüpfung durch Multiplikation eine zyklische Gruppe. Es gibt im Körper  $\varphi(p^n - 1)$  *primitive* Elemente  $r$  mit der Eigenschaft, daß die Potenzen  $1, r, r^2, \dots, r^{p^n-1}$  in ihrer Gesamtheit mit den von Null verschiedenen Körperelementen übereinstimmen. Jedes Element  $a$  des Körpers genügt der Gleichung

$$(10) \quad a^{p^n} - a = 0.$$

Ist  $m$  ein Teiler von  $n$ , so besitzt der Körper genau einen Teilkörper, der aus  $p^m$  Elementen besteht, nämlich aus denjenigen Elementen  $a$ , welche der Gleichung  $a^{p^m} - a = 0$  genügen. Außer den so gekennzeichneten Teilkörpern besitzt der betrachtete Körper keine weiteren. Der Körper von  $p^n$  Elementen gestattet  $n$  *isomorphe Abbildungen auf sich selbst*, auch *Automorphismen* oder *Automorphismen* genannt, sie entstehen, indem jedes Element  $a$  durch  $a^{p^\nu}$  ersetzt wird, wo  $\nu$  einen der Werte  $0, 1, 2, \dots, n - 1$  hat; jedem dieser Werte von  $\nu$  entspricht ein Automorphismus. (Hierin liegt der Beweis für (9) oben.)

Betrachtet man die ganzzahligen Polynome nach einem *Primzahlpotenzmodul*  $p^\alpha$  ( $\alpha > 1$ ), so läßt sich zwar der Begriff der *unzerlegbaren Funktion* ohne weiteres übertragen; der Satz von der *eindeutigen Zerlegbarkeit* in unzerlegbare Funktionen verliert aber seine Gültigkeit. Der Grund hierfür ist das Vorhandensein von Nullteilern im Ringe der Restklassen der ganzen Zahlen (mod.  $p^\alpha$ ). Dieser Übelstand wird vermieden, wenn man nach dem Vorgang von Hensel (*J. f. Math.* **127** (1904), S. 51

bis 84 und *Algebr. Zahlen* 1) zu dem Körper  $K_p$  der  $p$ -adischen Zahlen übergeht. Eine Gleichung zwischen  $p$ -adischen Zahlen vertritt gewissermaßen ein System von Kongruenzen nach sämtlichen Moduln  $p^\alpha$  für  $\alpha = 1, 2, \dots$ . Doch kann hier nicht näher auf den Begriff der  $p$ -adischen Zahl eingegangen werden. Für Polynome einer Variablen  $x$  mit Koeffizienten aus  $K_p$  (wie überhaupt allgemein für Polynome mit Koeffizienten aus einem Körper) gilt der Fundamentalsatz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in irreduzible Polynome (Hensel, *J. f. Math.* **127**, S. 77 und *Algebr. Zahlen* S. 68). Weiter stellt Hensel (*Algebr. Zahlen* S. 71) einen Satz auf, der aus einer bestehenden Kongruenz

$$f(x) \equiv g_0(x)h_0(x) \pmod{p^{r+1}},$$

wo der Exponent  $r+1$  größer als der Exponent  $2\varrho$  der höchsten in dem Quadrate der Resultante von  $g_0(x)$  und  $h_0(x)$  aufgehenden Potenz von  $p$  vorausgesetzt wird, eine neue

$$f(x) \equiv g(x)h(x) \pmod{p^s}$$

zu bilden gestattet, bei der  $s$  irgendeine vorgegebene Zahl größer als  $r+1$  ist, und zwar in der Weise, daß

$$g(x) \equiv g_0(x) \quad \text{und} \quad h(x) \equiv h_0(x) \pmod{p^{r-\varrho}}$$

gilt. In Verbindung mit dem vorangehenden Satze bietet dieser Satz einen gewissen Ersatz der Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Funktionen  $\pmod{p^\alpha}$ , indem, wenn  $\alpha$  genügend groß ist, die etwa vorhandenen verschiedenen Zerlegungen  $\pmod{p^\alpha}$  sich nach einem passenden kleineren Modul  $p^{\alpha-\beta}$  betrachtet als übereinstimmend herausstellen; dabei hängt  $\beta$  nur von der zerlegten Funktion, nicht von  $\alpha$  ab. Vgl. auch Ore, *Math. Ann.* **96** (1926), S. 315—323. Als Spezialfall sei besonders hervorgehoben:

Ist

$$f(x) \equiv g(x)h(x) \pmod{p},$$

und sind  $g(x)$  und  $h(x) \pmod{p}$  teilerfremd, so lassen sich für jede Potenz  $p^\alpha$  ( $\alpha > 1$ ) zwei  $\pmod{p^\alpha}$  eindeutig bestimmte Polynome  $G_\alpha(x)$ ,  $H_\alpha(x)$  von denselben Graden wie  $g(x)$  bzw.  $h(x)$  finden, derart daß

$$f(x) \equiv G_\alpha(x)H_\alpha(x) \pmod{p^\alpha}$$

und gleichzeitig

$$G_\alpha(x) \equiv g(x) \quad \text{und} \quad H_\alpha(x) \equiv h(x) \pmod{p}$$

gilt (Gauß, *Anal. resid. art.* 373, 374; Schönemann, *J. f. Math.* **32** (1846), S. 93—105).

Ist dagegen  $f(x) \pmod{p}$  durch das Quadrat einer Primfunktion  $\varphi(x)$  teilbar, so braucht es keine Funktion  $\Phi(x)$  zu geben, die  $\pmod{p}$  mit  $\varphi(x)$  kongruent ist und durch die  $f(x) \pmod{p^2}$  teilbar ist. So gilt z. B. der wichtige *Irreduzibilitätsatz* von Schönemann (l. c.): Es sei

$$f(x) = \{\varphi(x)\}^n + ph(x) \quad (n > 1),$$

wo  $\varphi(x) \pmod{p}$  irreduzibel ist und  $h(x)$  kleineren Grad als  $f(x)$  hat.  $f(x)$  ist  $\pmod{p^2}$  dann und nur dann reduzibel, wenn  $h(x) \equiv 0 \pmod{p, \varphi(x)}$  gilt. Dieser Satz gestattet zahlreiche Verallgemeinerungen. Siehe Ore, *Videnskapsselskapets Skrifter. I. Mat.-Naturv. Klasse* 1923, No. 1.

Soll die Kongruenz  $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$  lösbar sein, so muß vor allem  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$  lösbar sein. Hensel (*Algebr. Zahlen* S. 71—74) gibt einige Fälle an, in denen der Rückschluß gestattet ist. Z. B. l. c. S. 71: Wenn die ganze Zahl  $x_1$  die Kongruenz  $f(x_1) \equiv 0 \pmod{p}$  erfüllt und wenn die höchste in  $(f'(x_1))^2$  aufgehende Potenz von  $p$  einen kleineren Exponenten hat als die höchste in  $f(x_1)$  aufgehende Potenz von  $p$ , so läßt sich für jede Potenz  $p^\alpha$  ( $\alpha > 1$ ) die Kongruenz  $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$  durch eine Zahl  $x$  befriedigen, die  $\pmod{p}$  mit  $x_1$  kongruent ist. In einem schärferen Satz (l. c. S. 73, 74) entwickelt Hensel Bedingungen, unter denen aus einer Lösung von  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$  mittels der *Newtonschen Näherungsmethode* eine solche von  $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$  ( $\alpha > 1$ ) hergeleitet werden kann. Einen noch schärferen Satz gibt Ore, *Acta Math.* **44** (1923), S. 255.

## § 7. Spezielle höhere Kongruenzen.

Die binomische Kongruenz

$$(1) \quad x^n \equiv a \pmod{p},$$

wo  $p$  eine Primzahl bedeutet und  $(a, p) = 1$  vorausgesetzt wird — der andere Fall ist trivial —, ist sehr leicht mit Hilfe der Indizes zu behandeln. (Gauß, *Disqu. arithm.* art. 60.) Sie ist nämlich gleichbedeutend mit der linearen Kongruenz für die Unbekannte  $\text{ind. } x$

$$(2) \quad n \cdot \text{ind. } x \equiv \text{ind. } a \pmod{p-1},$$

und diese ist (vgl. § 5) dann und nur dann lösbar, wenn ind.  $a$  durch den größten gemeinsamen Teiler  $d$  von  $n$  und  $p - 1$  teilbar ist. Falls diese Bedingung erfüllt ist, besitzt (2) genau  $d$  modulo  $p - 1$  inkongruente Lösungen. Durch Übergang von den Indizes zu den Numeri folgt hieraus der Satz: *Die Kongruenz (1) ist im Falle  $(a, p) = 1$  dann und nur dann lösbar, wenn  $a$  die Bedingung*

$$(3) \quad a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1 \pmod{p}$$

erfüllt, wo  $d = (p - 1, n)$  gesetzt ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so besitzt (1) genau  $d$  nach dem Modul  $p$  inkongruente Lösungen. Die Kongruenz (3) wird häufig das *Eulersche Kriterium* genannt, siehe Euler, Abh. 134, Theorema 13 und Scholion art. 63, *Nov. Comm. Petrop.* 1 (1748/49; 1750), S. 42 bis 44 = *Comm. arithm.* 1, S. 59—60 = *Op. omn.* ser. 1, 2, S. 81—82; Abh. 262, insbes. Theoremata 17 u. 19, *Nov. Comm. Petrop.* 7 (1758/59; 1761), S. 49—62 = *Comm. arithm.* 1, S. 260—273 = *Op. omn.* ser. 1, 2, S. 493—518. Jede Lösung der Kongruenz (1) ist gleichzeitig Lösung der Kongruenz

$$(4) \quad x^d \equiv a^r \pmod{p},$$

wo  $r$  aus  $rn + s(p - 1) = d$  bestimmt ist, und umgekehrt ist jede Lösung von (4) auch Lösung von (1). Auch ohne Benutzung der Indizes erkennt man die Notwendigkeit der Bedingung (3) für die Lösbarkeit von (1), indem man beide Seiten von (1) in die  $\frac{p-1}{d}$ -te Potenz erhebt und den Fermatschen Satz anwendet.

Wenn eine Tafel der Indizes und Numeri für die Primzahl  $p$  zur Verfügung steht, ist der Weg über (2) auch der bequemste zur *praktischen* Auflösung der Kongruenz (1); anderenfalls hat man mehr oder weniger auf Probieren beruhende Methoden anzuwenden. Anweisungen für eine vorteilhafte Anlage der Rechnung gibt Gauß, *Disqu. arithm.* art. 61—68.

Diejenigen Restklassen  $a \pmod{p}$ , für welche (1) lösbar ist bzw. ihre Repräsentanten, heißen  $n$ -te Potenzreste modulo  $p$ . Die zu  $p$  teilerfremden  $n$ -ten Potenzreste bilden in der Gruppe  $\mathbb{G}_p$  (vgl. S. 1477) die Untergruppe derjenigen Elemente, die  $n$ -te Potenzen oder, was auf dasselbe hinauskommt,  $d$ -te Potenzen von Elementen aus  $\mathbb{G}_p$  sind. Da  $\mathbb{G}_p$  zyklisch von der Ordnung  $p - 1$  ist, ist die Untergruppe identisch mit der Untergruppe

derjenigen Elemente, deren  $\frac{p-1}{d}$ -te Potenz das Einheitsselement ist. Dies ist die gruppentheoretische Fassung des Eulerschen Kriteriums (3). Zugleich erhellt: Die  $n$ -ten Potenznichtreste mod.  $p$  verteilen sich entsprechend den Nebengruppen in  $\frac{p-1}{d} - 1$  Scharen zu je  $d$  Restklassen, derart, daß der Quotient je zweier Restklassen einer Schar ein  $n$ -ter Potenzrest ist. Hat man  $n$ -te Potenzreste nach einem zusammengesetzten Modul zu betrachten, so empfiehlt es sich hier erst recht, die allgemeinere Fragestellung nach der Struktur der Untergruppe derjenigen Elemente einer gegebenen Abelschen Gruppe  $\mathfrak{G}$ , die  $n$ -te Potenzen von Elementen aus  $\mathfrak{G}$  sind, an die Stelle der speziellen zahlentheoretischen Frage zu setzen.

Die beiden Hauptfragen in der Theorie der  $n$ -ten Potenzreste lauten:

1. Welche Zahlen sind  $n$ -te Potenzreste nach einer gegebenen Primzahl als Modul?

2. Für welche Primzahlen  $p$  als Modul ist eine gegebene Zahl  $a$   $n$ -ter Potenzrest?

Die erste Frage ist durch das Kriterium (3) erledigt, die zweite führt im Falle  $n = 2$  (vgl. § 8) zu dem *Reziprozitätsgesetze der quadratischen Reste*. Der Versuch, entsprechende Reziprozitätsbeziehungen auch für  $n > 2$  aufzufinden, führte Gauß (siehe die auf kubische und biquadratische Reste bezüglichen Abhandlungen, Anzeigen und Stücke aus dem Nachlaß in Bd. 2, 8, 10, 1 der Werke von Gauß) dazu, den Körper der rationalen Zahlen zu verlassen und der Untersuchung der  $n$ -ten Potenzreste von Anfang an den Körper der  $n$ -ten Einheitswurzeln zugrunde zu legen. Der weitere Verfolg dieser Betrachtungen führt in die schwierigsten Fragen der Theorie der algebraischen Zahlkörper, daher kann hier darüber nicht berichtet werden. Vgl. darüber Hilbert, *Bericht*, Kap. 25, 33, sowie den Teil 2 des im L. V. genannten Berichtes von Hasse.

Mit der Verteilung der  $n$ -ten Potenzreste und -Nichtreste und mit der Abschätzung des kleinsten positiven  $n$ -ten Potenznichtrestes einer gegebenen Primzahl  $p$  beschäftigt sich Winogradoff in einer Reihe von Arbeiten (z. B. *Žurnal fiziko-matematičeskoe obščestvo pri Perm* 1918—1919; *Bulletin de l'Acad. d. sciences de Russie* (6) 19 (1925), S. 785—795 und 20 (1926), S. 47—58; die beiden letzten Arbeiten sind fast (aber nicht ganz)



wörtlich ins Englische übertragen *Trans. Am. M. S.* **29** (1927), S. 209—226). Er erhält u. a. das Ergebnis: *Ist  $p$  eine ungerade Primzahl und  $n \mid p - 1$ , so ist der kleinste positive  $n$ -te Potenznichtrest von  $p$  kleiner als*

$$p^{\frac{1}{2^k}} (\log p)^2,$$

wo  $k = e^{1 - \frac{1}{n}}$  gesetzt ist. Über Sequenzen von Potenzresten bzw. -Nichtresten vgl. A. Brauer, *Berl. Sitzungsber.* 1928, S. 9—16.

Der wichtigste Spezialfall der binomischen Kongruenz ist die *Kreisteilungskongruenz*

$$(5) \quad x^n \equiv 1 \pmod{m}.$$

Gauß hat noch vor der algebraischen Theorie der Kreisteilungsgleichungen die entsprechende Theorie für die Kongruenz (5) in allen Einzelheiten entwickelt, aber nicht veröffentlicht (*Anal. resid. cap. 6 = Werke 2*, S. 199—211). Die heutige Auffassung, die in den Kongruenzen nach einem Primzahlmodul  $p$  nichts anderes als algebraische Gleichungen über dem Körper der Restklassen  $(\text{mod. } p)$  als Grundkörper erblickt, gestattet ohne weiteres die Anwendung der *Galoisschen Theorie* auf die Kongruenzen nach einem Primzahlmodul. Daher sind die in älteren Arbeiten mühsam entwickelten Auflösungen spezieller Kongruenzen durch „Wurzelzeichen“, wie z. B. die Gaußsche Theorie der Kongruenz (5) oder die mehrfach vorgenommene Übertragung der Cardanischen Formel auf Kongruenzen, für uns meist völlig trivial.

## § 8. Quadratische Reste.

Der einfachste und für die Entwicklung der Zahlentheorie historisch bedeutendste Spezialfall der Potenzreste sind die *quadratischen* Reste. Es handelt sich also um die Kongruenz

$$(1) \quad x^2 \equiv a \pmod{p},$$

und wieder sind die Hauptfragen zu beantworten:

1. *Welche Zahlen sind quadratische Reste nach einem gegebenen Primzahlmodul?*

2. *Für welche Primzahlen  $p$  als Modul ist eine gegebene Zahl  $a$  quadratischer Rest?*

Der Kürze halber sagt man statt quadratischer Rest und quadratischer Nichtrest meist nur Rest und Nichtrest und fügt



— nicht ganz logisch — den Modul mit „von“ bei; die Aussage „ $a$  ist Rest von  $p$ “ bedeutet also: „es gibt ein  $x$ , derart daß (1) gilt“. Als Antwort auf die erste Frage ergibt sich im Falle  $p > 2$ <sup>1)</sup> aus dem Eulerschen Kriterium (s. § 7): *Jedes durch  $p$  teilbare  $a$  ist Rest von  $p$ , ein zu  $p$  teilerfremdes  $a$  ist Rest oder Nichtrest von  $p$ , je nachdem*

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad \text{oder} \quad a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

*gilt.*

Unter den zu  $p$  teilerfremden Restklassen  $(\text{mod. } p)$  gibt es  $\frac{p-1}{2}$  quadratische Reste und ebensoviele Nichtreste. Für diese gelten die Rechenregeln:

$$\text{Rest mal Rest} = \text{Rest}$$

$$\text{Nichtrest mal Nichtrest} = \text{Rest}$$

$$\text{Nichtrest mal Rest} = \text{Nichtrest,}$$

die besagen, daß die zu  $p$  teilerfremden quadratischen Reste  $(\text{mod. } p)$  eine Untergruppe vom Index 2 der Gruppe  $\mathfrak{G}_p$  bilden. Ist  $a$  zu  $p$  teilerfremder Rest  $(\text{mod. } p)$ , so hat die Kongruenz (1) zwei Lösungen, ist die eine  $\equiv x_0 \pmod{p}$ , so ist die andere  $\equiv -x_0 \pmod{p}$ . Man erhält ein praktisch brauchbares Repräsentantensystem sämtlicher quadratischer Reste, indem man die Zahlen  $0^2, 1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$  reduziert, d. h. ihre kleinsten nicht negativen Reste  $(\text{mod. } p)$  bildet.

Zur Bezeichnung des quadratischen Restcharakters einer zu  $p$  teilerfremden Zahl  $a$  hat Legendre (*Essai*, 1. Aufl., S. 186) ein Symbol eingeführt:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = +1, \quad \text{wenn } a \text{ quadratischer Rest} \pmod{p}$$

$$\left(\frac{a}{p}\right) = -1, \quad \text{wenn } a \text{ quadratischer Nichtrest} \pmod{p}.$$

Für dieses Symbol gelten die folgenden Formeln:

---

1) Für  $p = 2$  ist jede Zahl quadratischer Rest. In diesem Paragraphen sollen von nun an  $p$  und  $q$  stets *ungerade* Primzahlen bedeuten.

$$(2) \quad \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

$$(3) \quad \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right), \quad \text{wenn } a \equiv b \pmod{p}$$

$$(4) \quad \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$$

$$(5) \quad \left(\frac{ab^2}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right).$$

(Hierin:  $p$  ungerade Primzahl,  $(a, p) = 1$ ,  $(b, p) = 1$ .)

Die Untersuchung der zweiten Frage hat zur Entdeckung des berühmtesten Satzes der gesamten Zahlentheorie geführt, des *Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste*. Bei den Zahlentheoretikern des 17. und 18. Jahrhunderts ergab sich die Fragestellung aus dem Studium der Diophantischen Gleichungen zweiten Grades. Man fand bald, daß Ausdrücke der Form  $t^2 \pm au^2$ , in denen  $a$  eine feste positive ganze Zahl bedeutet, während die Unbestimmten  $t, u$  die Gesamtheit aller ganzen Zahlen durchlaufen sollen, nicht vermöge passender Wahl von  $t$  und  $u$  durch jede Primzahl teilbar gemacht werden können; so ergab sich die Scheidung sämtlicher Primzahlen in *Teiler und Nichtteiler der Form  $t^2 \pm au^2$* . Auch beobachtete man bald, daß die Teiler einer solchen Form, abgesehen von den endlich vielen in  $2a$  aufgehenden Primzahlen, übereinstimmen mit der Gesamtheit der Primzahlen, welche in gewissen arithmetischen Reihen erster Ordnung mit der Differenz  $4a$  liegen. Fermat und Euler vermochten für einige besondere Werte von  $a$  ihre Resultate auch streng zu beweisen. Endlich gelangte Euler auf Grund von außerordentlich reichhaltigem empirischen Material zur vollständigen Erkenntnis der herrschenden Gesetze, zunächst in versteckter Form in Abh. 164, *Comm. Petrop.* 14 (1744/46; 1751), S. 174—175 = *Comm. arithm.* 1, S. 46—47 = *Op. omn.* ser. 1, 2, S. 216—217; später mit aller Schärfe und Klarheit in Abh. 552, *Opuscula analytica* 1 (1772; 1783), S. 82—84 = *Comm. arithm.* 1, S. 484—486 = *Op. omn.* ser. 1, 3, S. 511 bis 512; vgl. hierzu Kronecker, *Berl. Monatsber.* 1875, S. 267 bis 274 = *Werke* 2, S. 1—10. Freilich vermochte Euler sie nicht zu beweisen, aber die große Zahl seiner diese Frage betreffenden Arbeiten bezeugt, welche Bedeutung er ihnen beimaß. Unter Benutzung der „Legendreschen Symbole“ gibt man den Sätzen die Gestalt in Formeln:

$$(6) \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

$$(7) \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

$$(8) \quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

oder

$$(8') \quad \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)$$

( $p, q$  verschiedene ungerade Primzahlen).

Die Formel (8') findet sich zuerst in Legendres *Essai* 1. Aufl., S. 214.<sup>1)</sup> Dort tritt auch zum ersten Male der Name *Reziprozitätsgesetz* für die Beziehung (8) auf, während (6) und (7) meistens als *Ergänzungssätze* bezeichnet werden. In Worte gefaßt lautet der Inhalt der Formeln (6) bis (8):

— 1 ist Rest aller Primzahlen der Form  $4n + 1$  und Nichtrest aller Primzahlen der Form  $4n + 3$ .

2 ist Rest aller Primzahlen der Formen  $8n + 1$  und  $8n + 7$  und Nichtrest aller Primzahlen der Formen  $8n + 3$  und  $8n + 5$ .

Wenn von den beiden ungeraden Primzahlen  $p, q$  mindestens eine die Form  $4n + 1$  hat, so ist entweder gleichzeitig  $p$  Rest von  $q$  und  $q$  Rest von  $p$  oder gleichzeitig  $p$  Nichtrest von  $q$  und  $q$  Nichtrest von  $p$ ; wenn aber beide Primzahlen  $p, q$  die Form  $4n + 3$  haben, so ist entweder gleichzeitig  $p$  Rest von  $q$  und  $q$  Nichtrest von  $p$ , oder gleichzeitig  $p$  Nichtrest von  $q$  und  $q$  Rest von  $p$ .

Für die Anwendungen ist es oft vorteilhaft, (8') vermöge (6) und (4) in die Gestalt

$$(9) \quad \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}{q}\right)$$

zu setzen. Dies ergibt den Wortlaut von Gauß (*Disqu. arithm.* art. 131):

Wenn  $p$  eine Primzahl der Form  $4n + 1$  ist, so ist  $+p$ , wenn  $p$  von der Form  $4n + 3$  ist, so ist  $-p$  Rest bzw. Nichtrest von jeder Primzahl, die Rest bzw. Nichtrest von  $p$  ist.

1) In der vorangehenden Abhandlung *Recherches d'analyse indéterminée* (*Hist. de l'academie royale des sciences, année 1785* (1788), S. 465—559) hatte er bei der Formulierung des Satzes, den er unabhängig von Euler wiedergefunden hatte, noch acht Fälle unterschieden.

Da auf Grund der Formeln (4), (5) jedes Symbol  $\left(\frac{a}{p}\right)$  auf ein Produkt von Symbolen des Typus  $\left(\frac{-1}{p}\right)$ ,  $\left(\frac{2}{p}\right)$ ,  $\left(\frac{q}{p}\right)$  zurückführbar ist, enthalten diese Sätze die volle Beantwortung der Frage 2. Da die rechte Seite von (9) nur von der Restklasse (mod.  $4q$ ) abhängt, der  $p$  angehört, ergibt sich, daß die Primzahlen, von denen eine gegebene Primzahl  $q$  Rest ist, sämtliche in gewissen Restklassen (mod.  $4q$ ) gelegen sind.

Den ersten vollständigen Beweis des Reziprozitätsgesetzes verdankt man Gauß, *Disqu. arithm.* art. 125—145. Gauß selber hat noch fünf andere Beweise veröffentlicht, außerdem fand sich ein weiterer in seinem Nachlaß. Vgl. hierüber: Bachmann, *Über Gauß' zahlentheoretische Arbeiten*, insbes. art. 20 (in Gauß' *Werken* 10<sub>2</sub>, Abh. I). Seitdem haben zahlreiche andere Mathematiker das Reziprozitätsgesetz nach allen Richtungen hin durchforscht und immer wieder neue Beweise bzw. Varianten alter Beweise ersonnen; auch ist die gegenseitige Beziehung der verschiedenen Beweisprinzipien vielfach untersucht worden. Da über den Satz und seine Geschichte eine sehr ausgedehnte Spezialliteratur existiert (z. B. Osw. Baumgart, *Ztschr. Math. Phys., Histor.-Literar. Abt.* 30 (1885), S. 169—236 und 241—277; Bachmann, *Niedere Zahlentheorie* 1; Bachmann, *Grundlehren der neueren Zahlentheorie*, 2. Aufl., S. 47—48), sollen hier nur ganz kurz die Grundgedanken der wichtigsten Beweise skizziert werden.

Der erste Gaußsche Beweis (*Disqu. arithm.* art. 135—144) beruht auf einem Induktionsschluß. Zwischen den Primzahlen 3 und 5 gilt die Reziprozitätsbeziehung, wie unmittelbar zu bestätigen ist. Es wird nun vorausgesetzt, die Reziprozitätsbeziehung sei schon bewiesen für je zwei Primzahlen, die kleiner als die Primzahl  $q$  sind, und daraus geschlossen, daß sie auch zwischen jeder Primzahl  $p$ , welche kleiner als  $q$  ist, und  $q$  selber gilt. Der Nerv bei diesem Schluß ist die Bemerkung, daß sich die unter der Voraussetzung  $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$  oder  $\left(\frac{-p}{q}\right) = 1$  möglichen Gleichungen

$$(10) \quad x^2 = p + yq \quad \text{bzw.} \quad x^2 = -p + yq$$

in der doppelten Weise lesen lassen: „ $p$  bzw.  $-p$  ist quadratischer Rest von  $q$  und von  $y$ “ und „ $yq$  ist quadratischer Rest von  $p$ “. Man kann es nun so einrichten, daß  $y$  ungerade ist und daß sämtliche in  $y$  aufgehenden Primzahlen kleiner als  $q$  sind. Auf

Grund der Induktionsannahme kann dann, falls  $(y, p) = 1$  ist, aus der in (10) enthaltenen Voraussetzung „ $\pm p$  ist quadratischer Rest von  $y$ “ auf den Restcharakter  $\left(\frac{y}{p}\right)$  geschlossen werden; damit ist dann, da  $\left(\frac{yq}{p}\right) = 1$  ist, nach (4) auch  $\left(\frac{q}{p}\right)$  bestimmt. — Bei der Durchführung der Induktion unterschied Gauß acht Fälle. Dirichlet gelang es später mit der ihm eigenen Eleganz, durch Verwendung des Jacobischen Symboles (siehe S. 1505) die Zahl der unterschiedenen Fälle auf zwei herabzudrücken (*J. f. Math.* 47 (1857), S. 139–150 = *Werke* 2, S. 123–138). Die Hauptschwierigkeit des ganzen Beweises besteht darin, auch in dem Falle, wo  $q \equiv 1 \pmod{4}$  und  $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$  vorausgesetzt wird, so daß der Ansatz (10) für keines der beiden Vorzeichen möglich ist, einen Ersatz für (10) zu finden. Gauß überwand sie durch Einfügung des Hilfsatzes: „Jede Primzahl  $p$  der Form  $4n + 1$  ist Nichtrest von mindestens einer Primzahl  $q$ , die kleiner ist als sie selbst.“ Im Falle  $p \equiv 5 \pmod{8}$  ist diese Tatsache sehr leicht zu beweisen; im Falle  $p \equiv 1 \pmod{8}$  gelang ihr Beweis Gauß nur durch einen äußerst scharfsinnigen, aber mehr auf rechnerischem Geschick als auf begrifflicher Analyse beruhenden Kunstgriff. Übrigens zeigt Gauß in diesem Falle sogar die Erfüllbarkeit der Forderung „ $p$  Nichtrest von  $q$  für ein  $q$ , das  $< 2\sqrt{p} + 1$ “.

Der zweite Gaußsche Beweis (*Disqu. arithm.* art. 262) beruht auf der Abzählung der *classes ancipites* (auch ambige oder zweiseitige Klassen genannt) unter den Klassen ursprünglicher binärer quadratischer Formen von gegebener Diskriminante (vgl. § 17, S. 1561) oder, in moderne Sprache übersetzt, unter den Idealklassen eines quadratischen Zahlkörpers. Siehe etwa die besonders klare Darstellung bei Hecke, *Algebr. Zahlen*, § 46.

Am bekanntesten sind vielleicht die Beweise, welche auf dem sog. *Gaußschen Lemma* beruhen. Dieses lautet:  $p$  sei eine ungerade Primzahl und  $a$  eine beliebige zu  $p$  teilerfremde ganze Zahl.  $\mu$  bezeichne die Anzahl derjenigen unter den absolut kleinsten Resten  $\pmod{p}$  der Zahlen

$$1 \cdot a, \quad 2 \cdot a, \quad 3 \cdot a, \quad \dots, \quad \frac{p-1}{2} \cdot a,$$

welche negativ ausfallen. Dann gilt

$$(11) \quad \left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\mu.$$



Für  $a = -1$  und  $a = 2$  läßt sich  $\mu$  unmittelbar abzählen, und man erhält (6) bzw. (7). Ist aber  $a = q$  eine ungerade von  $p$  verschiedene Primzahl, so erhält man durch Vertauschung von  $q$  und  $p$  aus (11) eine Gleichung der Form

$$(12) \quad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^\lambda,$$

wo  $\lambda$  eine entsprechende Anzahlbedeutung hat. Zum Beweise von (8) genügt es,

$$(13) \quad \lambda + \mu + \frac{(p-1)(q-1)}{4} \equiv 0 \pmod{2}$$

zu bestätigen. In der Art, wie dies geschieht — meist unter Verwendung der Funktion  $[x]$  (siehe § 15) und unter Aufwand von viel Algorithmus und Rechnung —, unterscheiden sich die zahlreichen auf dieser Grundlage aufgebauten Beweise. Die kürzeste und durchsichtigste Herleitung von (13) gibt Frobenius, *Berl. Sitzungsber.* 1914, S. 335–349 und S. 484–488, der daselbst auch die früheren Beweise mit vorzüglicher Klarheit analysiert. Er deutet, wie es vor ihm schon Eisenstein (*J. f. Math.* 28 (1844), S. 246–248) in etwas weniger geschickter Weise getan hatte, die Zahlen  $\lambda$  und  $\mu$  als Anzahlen von Gitterpunkten in einfachen, geradlinig begrenzten geometrischen Figuren und setzt so (13) unmittelbar in Evidenz, indem er die Symmetrien dieser Figuren ausnutzt.<sup>1)</sup>

Ein weiteres Beweisprinzip ist die Heranziehung der *Kreisteilungsgleichungen*. Sie kann entweder in mehr formaler Weise geschehen, indem das Legendresche Symbol durch Gaußsche Summen (siehe § 14) oder durch andere in übersichtlicher Weise aus Einheitswurzeln zusammengesetzte Ausdrücke dargestellt wird und die Formel (8) sodann rechnerisch bestätigt wird. So verfährt z. B. der *vierte* Gaußsche Beweis (*Werke* 2, S. 42–45, S. 155–158; siehe auch unten S. 1535, Anm. 1); auch dem *sechsten* Gaußschen Beweise (*Werke* 2, S. 55–59, S. 162–169) liegt das gleiche Prinzip zugrunde.<sup>2)</sup> Eine Reihe weiterer solcher Be-

1) Unter den von Gauß veröffentlichten Beweisen benutzen der *dritte* und der *fünfte* das Lemma als Grundlage. Siehe *Werke* 2, S. 1–8, S. 49–64, S. 114–154, S. 159–164.

2) Eine besondere, uns ganz modern anmutende Feinheit des sechsten Beweises ist es, daß Gauß die explizite Einführung der Einheitswurzeln durch das Rechnen mit Polynomen nach dem Modul  $1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$  ersetzt, um nicht ohne ausreichende Begründung im Kreisteilungskörper mit Kongruenzen nach Zahlenmoduln rechnen müssen. Schon darin liegt, da die konjugierten Körper auf



weise, die zum Teil das Gaußsche Lemma mit benutzen, um aus Einheitswurzeln zusammengesetzte Ausdrücke für das Legendresche Symbol aufzustellen, findet man zusammengestellt bei Bachmann, *Kreistheilung*, S. 111–122. Oder aber die Kreisteilungslehre wird in mehr begrifflicher Weise verwandt, indem man, modern zu reden, einen *quadratischen Zahlkörper als Unterkörper eines Kreiskörpers* betrachtet und sodann von dem Zerlegungsgesetz der rationalen Primzahlen in Primideale des Kreiskörpers auf das Zerlegungsgesetz innerhalb des quadratischen Körpers zurückschließt. Zu diesen Beweisen sind ihrem Gedankeninhalte nach auch diejenigen zu rechnen, die von der Theorie der *höheren Kongruenzen* Gebrauch machen, wenn sie auch öfters äußerlich sehr verschieden aussehen, wie z. B. der in *Anal. resid.* art. 365, 366 enthaltene Beweis von Gauß<sup>1)</sup>, ferner namentlich ein Beweis von V. A. Lebesgue<sup>2)</sup>, *C. R.* 51 (1860), S. 9–13 (wiedergegeben bei Bachmann l. c., S. 243–244).

Bedient man sich der Sprache der algebraischen Zahlkörper, so läßt sich der Inhalt der Formel (9), ohne bis zu den Kreisteilungskörpern hinaufzusteigen, in folgender Weise wiedergeben: *Die Primzahl  $q$  zerfällt in dem quadratischen Körper*

$P\left(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\right)$  *in zwei Primideale ersten Grades oder bleibt unzerlegt, je nachdem ob  $p$  im quadratischen Körper  $P(\sqrt{q})$  zerfällt oder unzerlegt bleibt.*

Zu erwähnen ist noch die Deutung, die Zolotareff (*Nouv. Ann.* (2) 11 (1872), S. 354–362) dem Legendreschen Symbol gegeben hat (vgl. auch die oben genannte Arbeit von Frobenius, S. 335–337): *Es ist  $\left(\frac{q}{p}\right) = +1$  oder  $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ , je nachdem die Restklassen*

$$1 \cdot q, 2 \cdot q, \dots, (p-1) \cdot q \pmod{p}$$

*eine gerade oder eine ungerade Permutation der Restklassen*

$$1, \quad 2, \quad \dots, \quad p-1 \pmod{p}$$

diese Weise nicht voneinander geschieden werden, daß der sechste Beweis von der Vorzeichenbestimmung der Gaußschen Summen keinen Gebrauch macht, während bei dem vierten Beweis gerade die vollzogene Vorzeichenbestimmung der Gaußschen Summen ausgenutzt wurde.

1) Gauß spricht irrthümlich von *zwei* Beweisen; erst beide art. zusammen ergeben eine „demonstratio completa“.

2) Lebesgue schließt seinen Aufsatz mit der Bemerkung: „La démonstration précédente s'est depuis longtemps présentée à M. Liouville, qui ne l'a point publiée.“

bilden. Ferner seien noch ein Beweis von Eisenstein (*J. f. Math.* **29** (1845), S. 177—184) und ein an ihn anschließender von E. Fischer (*Monatsh. f. Math.* **11** (1900), S. 176—182) genannt, die auf *algebraischen Prinzipien* (Bildung von Resultanten) beruhen.

Die große Bedeutung des Reziprozitätsgesetzes liegt auf der einen Seite in der Rolle, die es in der Geschichte der Zahlentheorie als antreibendes Moment gespielt hat. Die Schwierigkeiten, die das ästhetisch so ungemein bestrickende Resultat anfänglich dem Beweise entgegensetzte, sodann die zahlreichen und voneinander so verschiedenartigen Prinzipien, die sich im Laufe der Entwicklung als mögliche Beweisgrundlage darboten, endlich das Streben, entsprechende höhere Reziprozitätsgesetze aufzufinden, gaben der Zahlentheorie immer wieder neue Impulse. Auf der anderen Seite ist das Theorem auch sachlich von der größten Wichtigkeit: nicht nur beantwortet es die oben aufgeworfene Frage 2. auf das Befriedigendste, sondern bei zahlreichen Schlüssen der höheren Arithmetik wird es ein dauernd gebrauchtes und unentbehrliches Hilfsmittel. Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, daß im Reziprozitätsgesetz die *arithmetisch-gruppentheoretischen Struktureigenschaften* des Systems der ganzen Zahlen mit den *Größen- oder Anordnungs-eigenschaften* in eigentümlicher Weise verbunden erscheinen und daß es auf keine Weise möglich ist, einen Beweis zu führen, der auf die letzteren Eigenschaften keinen Bezug nimmt. Vgl. in dieser Richtung Hasse, *Über die Einzigkeit der beiden Fundamentalsätze der elementaren Zahlentheorie* (*J. f. Math.* **155** (1926), S. 199—220).

Jacobi hat dem Legendreschen Zeichen eine erweiterte Bedeutung gegeben, indem er es auch für zusammengesetzte ungerade Nenner definiert (*Bericht über die Verhandl. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. Berlin* 1837, S. 134—135 = *J. f. Math.* **30** (1846), S. 172—173 = *Ges. Werke* **6**, S. 262). Dieses erweiterte „*Legendre-Jacobische Symbol*“  $\left(\frac{a}{P}\right)$  ist nicht mehr bestimmt durch die Eigenschaft der Zahl  $a$ , quadratischer Rest oder Nichtrest von  $P$  zu sein, sondern dient nur dazu, gewissen formalen Rechnungen größere Kürze und Übersichtlichkeit zu erteilen. Die Definition heißt:

Ist  $P = \pm p \cdot p' \cdot p'' \cdots$ , wo  $p, p', p'', \dots$  gleiche oder verschiedene ungerade Primzahlen sind, und ist  $a$  eine beliebige zu  $P$  teilerfremde ganze Zahl, so sei

$$\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{a}{p'}\right) \left(\frac{a}{p''}\right) \cdots,$$

wo die Symbole rechts gewöhnliche Legendresche Symbole sind.  
Ferner sei  $\left(\frac{a}{1}\right) = 1$  und  $\left(\frac{a}{-1}\right) = 1$  für beliebiges  $a \neq 0$ .

Dieses Symbol hat die Eigenschaften

$$(14) \quad \left(\frac{a}{P}\right) \left(\frac{a}{Q}\right) = \left(\frac{a}{PQ}\right)$$

( $P$  und  $Q$  ungerade,  $(a, PQ) = 1$ )

$$(15) \quad \left(\frac{a}{P}\right) \left(\frac{b}{P}\right) = \left(\frac{ab}{P}\right)$$

( $P$  ungerade,  $(ab, P) = 1$ )

$$(16) \quad \left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{b}{P}\right), \quad \text{wenn } a \equiv b \pmod{P}$$

( $P$  ungerade,  $(a, P) = 1$ )

$$(17) \quad \left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}}$$

( $P$  ungerade und positiv)

$$(18) \quad \left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}$$

( $P$  ungerade)

$$(19) \quad \left(\frac{P}{Q}\right) \left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2} \cdot \frac{P-1}{2}}$$

( $P$  und  $Q$  ungerade,  $(P, Q) = 1$ ,  $P$  und  $Q$  nicht beide negativ).

In Klammern sind die Voraussetzungen, unter denen die einzelnen Formeln gelten, beigefügt. Will man in (17) und (19) sich von den Vorzeichenbeschränkungen für  $P$  und  $Q$  befreien, so kann man nach Kronecker schreiben

$$(17') \quad \left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2} + \frac{\text{sign. } P-1}{2}} = (-1)^{\frac{|P|-1}{2}}$$

( $P$  ungerade)

$$(19') \quad \left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2} \cdot \frac{Q-1}{2} + \frac{\text{sign. } P-1}{2} \cdot \frac{\text{sign. } Q-1}{2}} \left(\frac{Q}{P}\right)$$

( $P$  und  $Q$  ungerade,  $(P, Q) = 1$ ),

wo üblicherweise  $\text{sign. } a = +1, 0, -1$  ist, je nachdem ob  $a > 0$ ,  $a = 0$ ,  $a < 0$  ist. Schließlich hat Dedekind (*Dirichlet-Dedekind*, 1. Aufl., § 116, S. 331) die Bedeutung des Zeichens  $\left(\frac{a}{P}\right)$  noch dahin erweitert, daß es den Wert Null hat, wenn  $a$  und  $P$  einen gemeinsamen Teiler haben. Auch bei dieser Erweiterung bleiben die Formeln (14), (15), (16), (19') bestehen. Das Gaußsche Lemma läßt sich sinngemäß auf das Jacobische Symbol  $\left(\frac{a}{P}\right)$  übertragen, wenn  $P > 0$  und ungerade und  $a$  zu  $P$  teilerfremd ist. Infolgedessen liefern viele der auf das Gaußsche Lemma gestützten Beweise des Reziprozitätsgesetzes unmittelbar die allgemeineren Formeln (17) bis (19).

Durch Dedekind (*Dirichlet-Dedekind*, 2. Aufl., § 168, S. 487), Kronecker (*Berl. Sitzungsber.* 1885, S. 768–772) und Weber (*Gött. Nachr.* 1893, S. 47–51 und *Lehrbuch der Algebra* 3, Braunschw. (Vieweg) 1908, § 85, S. 322–328) ist das Symbol unter einer einschränkenden Annahme über den Zähler auch für gerade Nenner definiert worden.<sup>1)</sup> In der Theorie der binären quadratischen Formen und der mit ihr nahe verwandten der quadratischen Zahlkörper spielen solche ganze Zahlen eine besondere Rolle, die sich in der Gestalt  $b^2 - 4ac$  darstellen lassen, d. h. alle ganzen Zahlen, welche  $\equiv 0$  oder  $\equiv 1 \pmod{4}$  sind. Kronecker bezeichnet diese Zahlformen als *Diskriminantenformen der Zahlen*, während Weber die von Null verschiedenen ganzen Zahlen, die  $\equiv 0$  oder  $\equiv 1 \pmod{4}$  sind, kürzer *Diskriminanten* nennt. *Fundamentaldiskriminanten* (Kronecker) oder *Stammdiskriminanten* (Klein, Weber) sind solche Diskriminanten, die außer 1 keinen quadratischen Teiler enthalten, nach dessen Absonderung eine Diskriminante übrig bleibt. Eine Fundamentaldiskriminante ist

$$\equiv 1 \pmod{4} \quad \text{oder} \quad \equiv 8 \quad \text{oder} \quad 12 \pmod{16}.$$

Das Produkt zweier und folglich beliebig vieler Diskriminanten ist wieder eine Diskriminante. Eine Fundamentaldiskriminante, die nur durch eine Primzahl teilbar ist, heißt *Primdiskriminante* (Weber). Die sämtlichen Primdiskriminanten sind  $-4, +8, -8, (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$  ( $p$  ungerade Primzahl). Jede

1) Obwohl diese Erweiterung mit der Theorie der quadratischen Reste selbst nichts mehr zu tun hat, scheint hier der passendste Ort, über sie zu berichten.

Fundamentaldiskriminante außer 1 läßt sich auf eine und abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren nur auf eine Weise als Produkt verschiedener Primdiskriminanten darstellen. Das sogenannte Kroneckersche Symbol wird jetzt in folgender Weise definiert<sup>1)</sup>:

$D$  sei eine Diskriminante und  $n$  eine beliebige ganze Zahl. Für  $n = 0$  wird gesetzt

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{D}{0}\right) = 0,$$

für

$$n = \pm 2^\alpha \cdot p \cdot p' \cdot p'' \cdots,$$

wo  $p, p', p'', \dots$  gleiche oder verschiedene ungerade Primzahlen bezeichnen, wird gesetzt

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{D}{\pm 1}\right) \left(\frac{D}{2}\right)^\alpha \left(\frac{D}{p}\right) \left(\frac{D}{p'}\right) \left(\frac{D}{p''}\right) \cdots;$$

dabei sind die Zeichen auf der rechten Seite folgendermaßen erklärt:

$$\left(\frac{D}{1}\right) = 1$$

$$\left(\frac{D}{-1}\right) = \text{sign. } D = (-1)^{\frac{\text{sign. } D - 1}{2}}$$

$$\left(\frac{D}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } D \equiv 0 \pmod{4} \\ \text{dem Jacobischen Symbol } \left(\frac{2}{D}\right), & \text{d. h. } = (-1)^{\frac{D^2 - 1}{8}}, \\ & \text{wenn } D \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

und für jede ungerade Primzahl  $p$

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } D \equiv 0 \pmod{p} \\ \text{dem Legendreschen Symbol } \left(\frac{D}{p}\right), & \text{wenn } D \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

1) Dedekind und Weber schreiben  $(D, n)$  an Stelle von  $\left(\frac{D}{n}\right)$ .

Die Definitionen der drei Autoren stimmen nicht völlig überein; der Text hier hält sich an Webers Definition. Insbesondere ist zu beachten, daß bei dieser Definitionsweise für ungerades zu  $D$  teilerfremdes  $n$  das Kroneckersche Symbol mit dem Jacobischen übereinstimmt, wenn  $n > 0$  oder  $n < 0$  und  $D > 0$  ist, aber für  $n < 0$ ,  $D < 0$  den entgegengesetzten Wert des Jacobischen Symbolen hat.

Die wichtigsten Eigenschaften des Symbols sind in den folgenden Formeln enthalten:

$$(20) \quad \left(\frac{D}{n_1 n_2}\right) = \left(\frac{D}{n_1}\right) \left(\frac{D}{n_2}\right)$$

$$(21) \quad \left(\frac{m^2 D}{n}\right) = \left(\frac{D}{n}\right), \quad \text{wenn } (m, n) = 1$$

$$(22) \quad \left(\frac{D_1 D_2}{n}\right) = \left(\frac{D_1}{n}\right) \left(\frac{D_2}{n}\right)$$

$$(23) \quad \left(\frac{D_1}{D_2}\right) = \begin{cases} \left(\frac{D_2}{D_1}\right), & \text{wenn eine der beiden Diskrimi-} \\ & \text{nanten } D_1, D_2 \text{ positiv ist} \\ -\left(\frac{D_2}{D_1}\right), & \text{wenn beide Diskriminanten } D_1 \\ & \text{und } D_2 \text{ negativ sind} \end{cases}$$

$$(24) \quad \left(\frac{D}{m^2 n}\right) = \left(\frac{D}{n}\right), \quad \text{wenn } (m, D) = 1$$

$$(25) \quad \left(\frac{D}{n_1}\right) = \left(\frac{D}{n_2}\right), \quad \text{wenn } n_1 \equiv n_2 \pmod{D}.$$

Falls  $D_1 \equiv D_2 \pmod{4m}$  ist, so gilt

$$(26) \quad \left(\frac{D_1}{m}\right) = \begin{cases} \left(\frac{D_2}{m}\right), & \text{wenn eine der beiden Diskrimi-} \\ & \text{nanten } D_1, D_2 \text{ positiv ist} \\ -\left(\frac{D_2}{m}\right), & \text{wenn beide Diskriminanten } D_1 \\ & \text{und } D_2 \text{ negativ sind.} \end{cases}$$

Die Formeln (20) und (25) in Verbindung mit  $\left(\frac{D}{1}\right) = 1$  sagen aus, daß  $\left(\frac{D}{n}\right)$  als Funktion von  $n$  ein Charakter  $\pmod{D}$  ist. (Vgl. § 14.) Wenn ferner  $D$  keine Quadratzahl ist, so gibt es eine ganze Zahl  $m$ , für die  $\left(\frac{D}{m}\right) = -1$  wird; in diesem Falle ist  $\left(\frac{D}{n}\right)$  vom *Hauptcharakter*  $\pmod{D}$  verschieden, daher gilt

$$(27) \quad \sum_{n \pmod{D}} \left(\frac{D}{n}\right) = 0.$$

Das Reziprozitätsgesetz liefert ein vorzügliches Hilfsmittel, die Legendreschen bzw. Jacobischen Symbole auszuwerten. Ist  $\left(\frac{P}{Q}\right)$  vorgelegt, wo  $PQ$  ungerade,  $(P, Q) = 1$ ,  $Q > 0$  sei, so setze man

$$P = 2aQ + \varepsilon P_1 \quad \text{mit } \varepsilon = \pm 1, \quad 0 < P_1 < Q,$$



dann wird nach (16), (15), (17), (19)

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{\varepsilon P_1}{Q}\right) = \varepsilon^{\frac{Q-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{P_1-1}{2}} \cdot \frac{Q-1}{2} \left(\frac{Q}{P_1}\right),$$

und der Wert des Symbols  $\left(\frac{P}{Q}\right)$  ist hiermit auf den des Symbols  $\left(\frac{Q}{P_1}\right)$  zurückgeführt, das kleineren Nenner hat als das vorige. Indem man in dieser Weise fortfährt, gelangt man nach endlich vielen Schritten zu einem Symbol mit dem Nenner 1, dessen Wert bekannt, nämlich 1, ist. Dieser Algorithmus, der mit dem Euklidischen Algorithmus bzw. der Kettenbruchentwicklung des Bruches  $\frac{P}{2Q}$  Ähnlichkeit hat, läßt sich im Einzelnen in mannigfacher Weise variieren. In der Tat sind zur Auswertung des Jacobischen Symbols zahlreiche Regeln angegeben worden, die z. T. direkt auf dem Gaußschen Lemma an Stelle des Reziprozitätsgesetzes fußen und vielfach unmittelbar von einer Kettenbruchentwicklung ihren Ausgang nehmen. Vgl. z. B. das Referat hierüber bei Bachmann, *Niedere Zahlentheorie* 1, S. 290—300.

Über *quadratische Reste nach zusammengesetzten Moduln* gelten die folgenden Sätze: Eine Zahl  $a$  ist dann und nur dann quadratischer Rest (mod.  $m$ ), wenn sie quadratischer Rest nach jeder in  $m$  aufgehenden Primzahlpotenz ist. Ist  $p^\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ) eine ungerade Primzahlpotenz und  $a = p^\lambda b$ , wo  $(p, b) = 1$ , so ist  $a$  dann und nur dann quadratischer Rest (mod.  $p^\alpha$ ), wenn

$$\text{entweder } 0 \leq \lambda < \alpha, \quad \lambda \text{ gerade,} \quad \left(\frac{b}{p}\right) = +1$$

$$\text{oder} \quad \lambda \geq \alpha, \quad b \text{ beliebig}$$

ist. Nach dem Modul  $2^\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ) ist die Zahl  $a = 2^\lambda b$ , wo  $b$  ungerade, dann und nur dann quadratischer Rest, wenn

$$\text{entweder } 0 \leq \lambda \leq \alpha - 3, \quad \lambda \text{ gerade,} \quad b \equiv 1 \pmod{8}$$

$$\text{oder} \quad \lambda = \alpha - 2, \quad \lambda \text{ gerade,} \quad b \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\text{oder} \quad \lambda = \alpha - 1, \quad \lambda \text{ gerade,} \quad b \text{ beliebig}$$

$$\text{oder} \quad \lambda \geq \alpha, \quad \text{—} \quad b \text{ beliebig}$$

ist. Die Anzahl der quadratischen Reste in einem reduzierten Restsystem (mod.  $m$ ) beträgt

$$\frac{1}{2^k} \varphi(m), \quad \text{wenn } m \not\equiv 0 \pmod{4}$$

$$\frac{1}{2^{k+1}} \varphi(m), \quad \text{wenn } m \equiv 4 \pmod{8},$$

$$\frac{1}{2^{k+2}} \varphi(m), \quad \text{wenn } m \equiv 0 \pmod{8},$$

wobei  $k$  die Anzahl der voneinander verschiedenen ungeraden in  $m$  aufgehenden Primzahlen bezeichnet.

Völlig anderer Natur sind die Fragen, die sich an die *Verteilung* der Reste und Nichtreste in der Reihe der natürlichen Zahlen knüpfen. Es sei  $p$  eine ungerade Primzahl, und die Zeichen  $(RR)$ ,  $(RN)$ ,  $(NR)$ ,  $(NN)$  mögen angeben, wie oft innerhalb des aus den Zahlen  $1, 2, \dots, p-1$  gebildeten Repräsentantensystems ein Rest auf einen Rest, ein Nichtrest auf einen Rest, usw. folgt. Dann ist

$$(RR) = \frac{1}{4} \left( p - 4 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \right)$$

$$(NR) = (NN) = \frac{1}{4} \left( p - 2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \right)$$

$$(RN) = \frac{1}{4} \left( p - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \right).$$

Insbesondere sind für  $p > 5$  alle diese Anzahlen positiv. Der Beweis geschieht entweder durch elementare Schlüsse nach dem Vorbild der Gaußschen Lösung der entsprechenden Aufgabe für biquadratische Reste (vgl. *Werke* 2, S. 78ff. und etwa Wertheim, *Anfangsgründe*, S. 385—387), oder durch Abzählung der Anzahl der Lösungen von

$$ax^2 + by^2 \equiv 1 \pmod{p}, \quad 1 \leq x \leq p-1, \quad 1 \leq y \leq p-1$$

mit Hilfe des Satzes von Libri (siehe S. 1483) und der Werte der Gaußschen Summen (siehe § 14). Über Sequenzen von mehr als zwei Resten bzw. Nichtresten ist bekannt: Für jedes  $l$  und alle hinreichend großen Primzahlen  $p$  gibt es eine Sequenz von  $l$  Resten und eine solche von  $l$  Nichtresten. Vgl. A. Brauer, *Berl. Sitzungsber.* 1928, S. 9—16.

Über die Lage des kleinsten positiven Nichtrestes  $q$  einer ungeraden Primzahl  $p$  weiß man:  $q$  ist stets Primzahl,  $q$  erfüllt die Ungleichung  $q < 2\sqrt{p} + 1$  (Nagell, *Kristiania Vidensk-*

*kapsselskapets Skrifter. I. Mat. Nat. Kl.* 1924, No. 13). Wesentlich schärfer ist die Abschätzung von Winogradoff, siehe oben S. 1497.

Aus den mit transzendenten Methoden durchgeführten Bestimmungen der *Klassenzahlen* binärer quadratischer Formen gegebener Diskriminante bzw. der entsprechenden *Anzahlen von Idealklassen* in quadratischen Körpern oder Ordnungen folgen Resultate über den *Überschuß der Anzahl der quadratischen Reste über die Anzahl der Nichtreste einer ungeraden Primzahl  $p$  in einem Teilintervall des Intervalls  $1 \leq x \leq p-1$* . Siehe Gauß, *Werke* 2, S. 286—291, Dirichlet, *J. f. Math.* 18 (1838) = *Werke* 1, S. 365, 367 ff. und sonst mehrfach. Diese Untersuchungen zeigen unter anderem, daß für  $p \equiv 3 \pmod{4}$  unterhalb  $\frac{p}{2}$  und für  $p \equiv 1 \pmod{4}$  unterhalb  $\frac{p}{4}$  mehr quadratische Reste als Nichtreste liegen. Es ist bisher nicht gelungen, diese einfachen Sätze ohne transzendente Hilfsmittel zu beweisen.<sup>1)</sup>

Eine *Tafel* der arithmetischen Progressionen, in denen die Primzahlen liegen, für welche die ganzen Zahlen  $n$  zwischen  $-200$  und  $+200$  quadratische Reste bzw. Nichtreste sind, berechnet Legendre (*Essai*). Kraitchik (*Théorie* 1, S. 164—186, *Recherches*, S. 205—215) dehnte sie bis zu  $n = \pm 250$  aus. Gauß hat eine besonders zur Anwendung graphischer Methoden (vgl. z. B. *Disqu. arithm.* art. 331) geeignete *Tafel* des Restcharakters der Primzahlen unter 1000 in Bezug auf die Primzahlen bis zu 503 als Moduln hergestellt (*Werke* 2, S. 399—409).

Mit Hilfe der Theorie der quadratischen Reste beherrscht man die *quadratischen Kongruenzen* völlig, da sich die allgemeine Kongruenz  $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{m}$  durch elementare Operationen auf eine Reihe von Kongruenzen der Form  $y^2 \equiv d \pmod{p}$ ,  $p$  Primzahl, zurückführen läßt. Für die Auflösung der Kongruenz  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  besitzt man in einigen Fällen geschlossene Formeln:

---

1) Während der Drucklegung geht mir die aufregende Nachricht zu, daß kürzlich B. Wenkoff für alle negativen Fundamentaldiskriminanten  $-\Delta$ , für die  $\Delta$  als Summe dreier Quadratzahlen darstellbar, also nicht  $\equiv 7 \pmod{8}$  ist, einen rein arithmetischen Beweis der Dirichletschen Klassenanzahlformeln gefunden hat, wodurch auch die im Text genannten Sätze mitbewiesen werden, außer für  $p \equiv 7 \pmod{8}$ . Wenkoffs Abhandlung hierüber soll in den Schriften der Leningrader Akademie erscheinen.

$$1) \quad p \equiv 1 \pmod{4} \quad x^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

$$\text{Lösung:} \quad x \equiv \pm \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p};$$

$$2) \quad p \equiv 3 \pmod{4}, \quad \left(\frac{a}{p}\right) = 1, \quad x^2 \equiv a \pmod{p}$$

$$\text{Lösung:} \quad x \equiv \pm a^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p};$$

$$3) \quad p \equiv 5 \pmod{8}, \quad \left(\frac{a}{p}\right) = 1, \quad x^2 \equiv a \pmod{p}$$

Lösung:

$$x \equiv \pm a^{\frac{p+3}{8}} \pmod{p}, \quad \text{wenn } a^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$x \equiv \pm \left(\frac{p-1}{2}\right)! a^{\frac{p+3}{8}} \pmod{p}, \quad \text{wenn } a^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Weitere Lösungen durch geschlossene aber umständlicher zusammengesetzte Ausdrücke gaben Stankewitsch (*Moscow. Math. Soc.* **10** (1882/83), I, S. 112) und Cipolla (*Rendic. Accad. Sc. Fis. e Math. Napoli* (3) **9** (1903), S. 154—163, (3) **10** (1904), S. 144—150, (3) **11** (1905), S. 13—19, S. 304—309).

In der Praxis ist es jedoch vorzuziehen, die Lösungen durch Probieren aufzufinden. Man setzt

$$x^2 = a + yp$$

und sucht zuerst  $y$  anstatt  $x$  zu bestimmen. Da für  $0 < x < \frac{p}{2}$  sich ergibt  $-\frac{a}{p} < y < \frac{p}{4} - \frac{a}{p}$ , braucht man nur die diesen Ungleichungen genügenden ganzzahligen Werte für  $y$  in Betracht zu ziehen. Zur Abkürzung der Versuche dient eine von Gauß (*Disqu. arithm.* art. 319—322) ausgebildete Ausschließungsmethode. Sie besteht darin, durch die Bedingung, daß  $a + yp$  quadratischer Rest nach jedem beliebigen Modul sein muß, für  $y$  eine große Anzahl arithmetischer Progressionen, denen es nicht angehören kann, von vornherein auszuschließen.

### § 9. Zahlentheoretische Funktionen. (Allgemeines über die Probleme und Methoden.)

Eine *zahlentheoretische Funktion* ist eine Funktion einer Variablen, deren Werte für alle natürlichen Zahlen als Argument definiert sind. Beispiele: Die Anzahl der Teiler von  $n$  oder die Anzahl der Lösungen der Diophantischen Gleichung  $x^2 + y^2 = n$  als Funktion von  $n$ . Gerade die *Anzahl*funktionen bieten in der Zahlentheorie besonderes Interesse dar.

Die interessantesten durch die Zahlentheorie gelieferten zahlentheoretischen Funktionen zeigen häufig einen sehr sprunghaften und unregelmäßigen Gang; trotzdem läßt sich oft im *Mittel* eine auffallende Regelmäßigkeit feststellen, d. h. betrachtet man an Stelle der zahlentheoretischen Funktion  $f(n)$  die Funktion

$$(1) \quad g(n) = \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n},$$

so verhält sich diese in vielen Fällen bei wachsendem  $n$  asymptotisch wie eine elementare Funktion der Analysis. Solche Mittelwerte wurden gelegentlich schon von Gauß (*Disqu. arithm.* art. 301, 302; *Nachlaß, Werke* 10, 1, S. 13 ff.), systematisch aber erst seit Dirichlet (*Ber. üb. d. Verhandl. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss.* 1838, S. 13—15 = *Werke* 1, S. 351—356; *J. f. Math.* 18 (1838), S. 271—274 = *Werke* 1, S. 372—374; *Berl. Abh.* 1849, S. 69—83 = *Werke* 2, S. 49—66. Siehe auch die folgenreiche Mitteilung an Kronecker, *Werke* 2, S. 407) untersucht. In Anknüpfung an Gauß sind außer den Mittelwertbildungen (1) auch Mittelwertbildungen der Gestalt

$$(2) \quad \frac{f(n-k) + f(n-k+1) + \dots + f(n+k)}{2k+1}$$

betrachtet worden, wobei  $n$  und  $k$  beide die natürlichen Zahlen durchlaufend wachsen, doch so, daß  $k$  von  $n$  abhängt und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = 0$  ist. Das asymptotische Verhalten hängt natürlich von der Art der zwischen  $k$  und  $n$  bestehenden Beziehung ab.

Das Ergebnis der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens einer zahlentheoretischen Funktion  $g(n)$  pflegt man in der Form

$$g(n) = h(n) + r(n)$$

zu schreiben, wo  $h(n)$  eine elementare (analytische) Funktion ist, während der Rest  $r(n)$  eine Funktion von  $n$  ist, deren Betrag bei wachsendem  $n$  von geringerer Größenordnung bleibt als

$|h(n)|$ . Während das ursprüngliche Interesse sich auf die Bestimmung von  $h(n)$  richtet, hat sich in neuerer Zeit der Schwerpunkt der Untersuchung meist auf die möglichst scharfe Abschätzung des Fehlergliedes  $r(n)$  verschoben, die zahlentheoretisch zwar von geringerer Bedeutung ist, ihrer großen Schwierigkeit wegen aber dazu herausfordert, die Kräfte der verschiedensten Methoden der Analysis an ihr zu erproben.

Eine zweite Untersuchungsrichtung beschäftigt sich mit den rein arithmetischen Eigenschaften der zahlentheoretischen Funktionen, wie z. B. der Bestimmung ihrer Werte aus der vorgegebenen Primfaktorenzerlegung des Arguments oder mit der Aufstellung und Diskussion merkwürdiger Identitäten zwischen den Werten verschiedener zahlentheoretischer Funktionen für verschiedene nach irgendeinem Gesetz gewählte Argumente.

Für beide Untersuchungsrichtungen hat sich die Heranziehung der *Analysis* als das kräftigste Werkzeug bewährt. Typisch dafür sind drei Ansätze:

Erstens bildet man die *Dirichletsche Reihe*

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

und untersucht die (im Falle der Konvergenz für irgendein  $s$ ) durch sie definierte analytische Funktion der komplexen Variablen  $s$ .

Zweitens bildet man die *Potenzreihe*

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

und untersucht die (im Falle der Konvergenz für ein  $x \neq 0$ ) durch sie definierte analytische Funktion der komplexen Variablen  $x$ .

Drittens bildet man die *Lambertsche Reihe*

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)x^n}{1-x^n}$$

und vergleicht sie (im Falle der Konvergenz für ein  $x \neq 0$ ) mit der Potenzreihe der gleichen Funktion.

Die Fruchtbarkeit des Ansatzes (3) für die multiplikative Zahlentheorie beruht auf folgender Tatsache: Multipliziert man die beiden Reihen



$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

formal aus und erklärt

$$(6) \quad H(s) = F(s) G(s),$$

so gilt in formalem Sinne

$$H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

mit

$$(7) \quad h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

*Die eine funktionentheoretische Identität (6) ist äquivalent mit den unendlich vielen zahlentheoretischen Identitäten (7).*

Der Potenzreihenansatz bewährt sich vornehmlich in der additiven Zahlentheorie (vgl. § 16 u. 17), indem von zwei auf verschiedene Weise definierten Potenzreihen durch funktionentheoretische Schlüsse die Identität und damit das Übereinstimmen entsprechender Koeffizienten gezeigt wird. Endlich ist die analytische Identität

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)x^n$$

gleichbedeutend mit dem System zahlentheoretischer Identitäten

$$(9) \quad g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Von besonderer Wichtigkeit sind zahlentheoretische Funktionen, welche für je zwei natürliche Zahlen  $a, b$  die Relation

$$(10) \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

erfüllen, oder wenigstens

$$(11) \quad f(ab) = f(a)f(b), \quad \text{wenn } (a, b) = 1.$$

Ist  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = \prod_{p|n} p^{\alpha}$ , so folgt aus (10) bzw. (11)

$$(12) \quad f(n) = \prod_{p|n} (f(p))^{\alpha} \quad \text{bzw.} \quad f(n) = \prod_{p|n} f(p^{\alpha}).$$

Wenn  $f(n)$  die Eigenschaft (10) bzw. (11) hat und für jedes  $n$  der Ungleichung  $|f(n)| < 1$  genügt, wenn ferner  $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$  konvergiert, so gilt die Identität

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)}$$

bzw.

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \{1 + f(p) + f(p^2) + \cdots\},$$

wo  $p$  alle Primzahlen durchläuft. Die Voraussetzungen dieses Satzes werden insbesondere erfüllt durch die Funktion  $f(n) = \frac{1}{n^s}$ , wo  $s$  eine beliebige komplexe Zahl mit  $\Re(s) > 1$  ist; etwas allgemeiner kann  $f(n) = \frac{f_1(n)}{n^s}$  genommen werden, wo  $f_1(n)$  eine die Beziehung (10) bzw. (11) erfüllende zahlentheoretische Funktion bezeichnet, für die bei passendem reellem  $c$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(n)}{n^c} = 0$  ist, während  $s$  eine komplexe Zahl mit genügend großem Realteil bedeutet.

Die besprochenen analytischen Ansätze gehen ihrem Grundgedanken nach auf Euler zurück; die volle Ausnutzung unter Heranziehung feinerer Betrachtungen der reellen und komplexen Analysis beginnt aber erst mit den grundlegenden Abhandlungen Dirichlets und Riemanns und ist gegenwärtig noch nicht abgeschlossen. Genauere Zitate siehe in den folgenden Paragraphen, die von den einzelnen zahlentheoretischen Funktionen handeln.

## § 10. Die Eulersche Funktion $\varphi(n)$ .

Die Eulersche Funktion  $\varphi(n)$  ist erklärt als Anzahl der zu  $n$  teilerfremden Restklassen (mod.  $n$ ) oder einfacher ausgedrückt als die Anzahl der zu  $n$  teilerfremden natürlichen Zahlen bis zu  $n$  (vgl. § 4, S. 1478). Ihr Wert läßt sich auf verschiedene Weisen zu

$$(1) \quad \varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

bestimmen. Es ist

$$(2) \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \text{wenn } (a, b) = 1$$

$$(3) \quad \varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}, \quad \text{wenn } p \text{ Primzahl und } \alpha \geq 1.$$

Von Wichtigkeit ist ferner die Gleichung

$$(4) \quad \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

sowie § 11, Formel (4). Die erzeugende Dirichletsche Reihe drückt sich folgendermaßen durch  $\zeta(s)$  (§ 13) aus:

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \quad \text{für } \Re(s) > 2.$$

Für  $\varphi(n)$  gilt die Abschätzung nach unten

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n \log \log n} = e^{-C},$$

wo  $C$  die Eulersche Konstante bedeutet (Landau, *Handbuch* 1, S. 217); ferner gilt die Mittelwertformel

$$(7) \quad \sum_{\nu=1}^n \varphi(\nu) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + r(n),$$

wo

$$|r(n)| < n \left( \frac{1}{2} \log n + \frac{1}{2} C + \frac{5}{8} \right) + 1$$

(Dirichlet, *Berl. Abh.* 1849, S. 77—81 = *Werke* 2, S. 60—64; Mertens, *J. f. Math.* 77 (1874), S. 289—291), aus der unmittelbar folgt: Die Wahrscheinlichkeit  $w(x)$  dafür, daß zwei natürliche Zahlen  $a \leq x$ ,  $b \leq x$  teilerfremd sind, hat für  $x \rightarrow \infty$  den Grenzwert  $\frac{6}{\pi^2}$ . Das asymptotische Verhalten anderer mit  $\varphi(n)$  zusammengesetzter Summen untersuchen Cesàro (*Mém. soc. roy. d. sciences de Liège* (2) 10 (1883), S. 167—170), Berger (*Nov. acta reg. soc. scient. Upsaliensis* (3) 14 (1891), Nr. 2, S. 113), Landau (*Gött. Nachr.* 1900, S. 180—184), Lucke (*Dissertation* Göttingen 1926, S. 8—12).

Eine Tafel der Werte der zu  $\varphi(n)$  inversen Funktion für  $\varphi \leq 1000$  berechnete Carmichael (*Amer. J.* 30 (1908), S. 394 bis 400).

§ 11. Die Möbiussche Funktion  $\mu(n)$ .

Definition:  $\mu(n) = 0$ , wenn  $n$  durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist,  $\mu(n) = (-1)^r$ , wenn  $n$  das Produkt von genau  $r$  ( $r \geq 0$ ) voneinander verschiedenen Primzahlen ist.

Hieraus folgt

$$(1) \quad \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = 1, \\ 0, & \text{wenn } n > 1, \end{cases}$$

und weiter: Besteht zwischen zwei zahlentheoretischen Funktionen  $f(n)$ ,  $g(n)$  eine der beiden Beziehungen

$$(2) \quad \begin{cases} f(n) = \sum_{d|n} g(d) & \text{für jedes } n \geq 1 \\ g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) & \text{für jedes } n \geq 1, \end{cases}$$

so besteht auch die andere. Ebenso: Besteht eine der beiden Beziehungen

$$(2') \quad \begin{cases} f(n) = \prod_{d|n} g(d) & \text{für jedes } n \geq 1 \\ g(n) = \prod_{d|n} \left\{ f\left(\frac{n}{d}\right) \right\}^{\mu(d)} & \text{für jedes } n \geq 1, \end{cases}$$

so besteht auch die andere.

Diese Umkehrformeln sind der eigentliche Zweck, zu dem die Funktion  $\mu(n)$  eingeführt wurde. Bekannt waren sie schon Gauß (*Anal. resid.* art. 347 = *Werke* 2, S. 222) und wurden von verschiedenen Autoren (des öfteren ohne Einführung eines eigenen Funktionszeichens) benutzt. Als Funktion eingeführt wurde  $\mu(n)$  von Möbius (*J. f. Math.* 9 (1832), S. 105 = *Werke* 4, S. 591); der Buchstabe  $\mu$  als Bezeichnung wurde zum ersten Male von Mertens (*J. f. Math.* 77 (1874), S. 289) gebraucht und ist jetzt allgemein üblich.

Weitere Eigenschaften:

$$(3) \quad \mu(ab) = \mu(a)\mu(b), \quad \text{wenn } (a, b) = 1.$$

$$(4) \quad \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \quad \text{für } \Re(s) > 1$$

(vgl. § 13). Betreffend die *summatorische Funktion*  $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$  hat Mertens (*Sitzungsber. Wiener Akad. d. Wiss.* **106** IIa (1897), S. 761—830) die bis heute unbewiesene Vermutung  $M(x) = O(\sqrt{x})$  aufgestellt, aus deren Richtigkeit nicht nur ein Beweis der Riemannschen Vermutung (vgl. § 13) folgen würde, sondern auch die Tatsache, daß alle Nullstellen von  $\zeta(s)$  mit dem Realteil  $\frac{1}{2}$  einfach sind. D. v. Sterneck (*Sitzber. Wiener Akad.* passim 1901—1912, *Proceed. of the 5. Intern. Congress of Math.* **1**, Cambridge 1913, S. 341—343) bestätigte für die natürlichen  $n \leq 500000$  und 16 einzelne größere Werte von  $n$  bis zu 5000000 die Ungleichung  $M(n) < \sqrt{n}$ . Die beste zur Zeit bewiesene Abschätzung lautet

$$M(x) = O(x e^{-\alpha \sqrt{\log x \log \log x}}) \quad (\alpha > 0 \text{ konstant}).$$

Ferner ist bewiesen: **Falls** die Riemannsche Vermutung richtig ist, so gilt

$$M(x) = O\left(x^{\frac{1}{2} + \alpha \frac{\log \log \log x}{\log \log x}}\right) \quad (\alpha > 0 \text{ konstant}).$$

Vgl. z. B. Landau, *Vorles.* **2**, S. 157—166. Die Funktion  $\mu(n)$  spielt überhaupt in der Lehre der Verteilung der Primzahlen eine bedeutende Rolle.

Die Umkehrformeln (2) wurden verschiedentlich auf eine größere Zahl von Funktionen oder auf Funktionen mit mehreren Argumenten verallgemeinert, siehe z. B. Kronecker, *Vorles.* S. 246—257.

## § 12. Anzahl und Summe der Potenzen der Teiler einer natürlichen Zahl.

Ist  $l$  eine beliebige reelle Zahl, so bedeute  $\sigma_l(n)$  die Summe der  $l$ -ten Potenzen der positiven Teiler der natürlichen Zahl  $n$ , insbesondere also  $\sigma_0(n)$  die Anzahl der Teiler von  $n$ .<sup>1)</sup> Die Funktion  $\sigma_l(n)$  hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sigma_l(ab) = \sigma_l(a)\sigma_l(b) \quad \text{für } (a, b) = 1 \\ (2) \quad & \sigma_l(p^\alpha) = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{wenn } l = 0 \\ \frac{p^{l(\alpha+1)} - 1}{p^l - 1}, & \text{wenn } l \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

1) Im Gegensatz zu  $\varphi(n)$  und  $\mu(n)$  hat sich in der Literatur für diese Funktionen keine einheitliche Bezeichnungsweise durchgesetzt.

somit für  $n = \prod_{\kappa=1}^k p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}$

$$(3) \quad \sigma_l(n) = \begin{cases} \prod_{\kappa=1}^k (\alpha_{\kappa} + 1), & \text{wenn } l = 0 \\ \prod_{\kappa=1}^k \frac{p_{\kappa}^{l(\alpha_{\kappa}+1)} - 1}{p_{\kappa}^l - 1}, & \text{wenn } l \neq 0. \end{cases}$$

Zusammenhang der erzeugenden Dirichletschen Reihe mit der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion (§ 13):

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_l(n)}{n^s} = \zeta(s) \zeta(s-l) \quad \text{für } \Re(s) > \text{Max.}(1, l+1).$$

Nach (8), (9) aus § 9 gilt für die erzeugende Potenzreihe

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_l(n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^l x^n}{1 - x^n}.$$

Die Wichtigkeit dieser Beziehung beruht darauf, daß für positives ungerades  $l \geq 3$  und  $x = e^{2\pi i \omega}$ , wo  $\omega$  eine komplexe Variable mit positivem Imaginärteil bedeutet, die Reihe auf der rechten Seite von (5) in einfacher Weise mit der *Eisensteinschen Reihe*  $S_{l+1} = \sum'_{m_1, m_2} \frac{1}{(m_1 \omega + m_2)^{l+1}}$  zusammenhängt, es ist nämlich

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^l e^{2\pi i n \omega}}{1 - e^{2\pi i n \omega}} = \frac{l!}{(2\pi i)^{l+1}} \left\{ \frac{1}{2} S_{l+1} - \zeta(l+1) \right\};$$

vgl. Hurwitz, *Math. Ann.* **18** (1881), S. 547. Dadurch wird es möglich, eine Fülle der analytischen Formeln, welche die Theorie der elliptischen Funktionen und Modulfunktionen liefert, nutzbar zu machen, um Beziehungen der zahlentheoretischen Funktionen  $\sigma_l(n)$  untereinander und zu anderen zahlentheoretischen Funktionen zu gewinnen. Im Falle  $l = 1$  liefert die logarithmische Differentiation der Identität (3) aus § 16, die sich übrigens auch in die Theorie der elliptischen Funktionen einordnen läßt, eine Rekursionsformel für  $\sigma_1(n)$ ; vgl. die Euler-Zitate in § 16.



Für die Funktion  $\sigma_0(n)$ , die Anzahl der Teiler von  $n$ , gilt nach Runge (*Acta Math.* **7** (1885), S. 181—183) die Abschätzung

$$(7) \quad \sigma_0(n) = O(n^\varepsilon) \quad \varepsilon > 0 \text{ beliebig,}$$

die sich nach Landau (*Acta Math.* **48** (1926), S. 225 und *Vorlesungen* **1**, S. 352) zu  $\sigma_0(n) < 2^{c^{\frac{1}{\varepsilon}}} n^\varepsilon$  ( $c > 1$  passend konstant,  $\varepsilon > 0$  beliebig) präzisieren läßt. Wigert (*Arkiv för mat., ast., fys.* **3** (1906—1907), No. 18; vgl. Landau, *Handbuch* § 60) gab für die Größenordnung von  $\sigma_0(n)$  die feinere Formel

$$(8) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sigma_0(n) \cdot \log \log n}{\log n} = \log 2,$$

die durch Ramanujan (*Lond. Math. Soc. Proc.* (2) **14** (1915), S. 349—350 = *Collected Papers* **1**, S. 80) zu der Aussage verschärft wurde: Für alle  $n$  ist  $\sigma_0(n) < 2^k$ ,  $\sigma_0(n) < 2^t$  und für unendlich viele  $n$  ist  $\sigma_0(n) > 2^k$ ,  $\sigma_0(n) > 2^t$ , wo

$$(9) \quad \begin{cases} k = \frac{\log n}{\log \log n} + O\left(\frac{\log n}{(\log \log n)^2}\right) \\ k' = \frac{\log n}{\log \log n} + O\left(\frac{\log n}{(\log \log n)^2}\right) \\ t = Li(\log n) + O(\log n \cdot e^{-\alpha \sqrt{\log \log n}}) \\ t' = Li(\log n) + O(\log n \cdot e^{-\alpha \sqrt{\log \log n}}) \end{cases}$$

( $\alpha > 0$  konstant).

Entsprechend gilt für  $\sigma_1(n)$

$$(10) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_1(n)}{n \log \log n} = e^C,$$

wo  $C$  die Eulersche Konstante bedeutet, und für  $\sigma_l(n)$  bei  $l > 1$

$$(11) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_l(n)}{n^l} = \zeta(l).$$

Siehe Gronwall, *Trans. Am. M. S.* **14** (1913), S. 113—122 und Wigert, *Dissertation*, Kopenhagen 1912.

Die Mittelwertbestimmung von  $\sigma_0(n)$  heißt das *Dirichletsche Teilerproblem*. Es ist für reelles  $x > 0$

$$(12) \quad T(x) = \sum_{n \leq x} \sigma_0(n) = x \log x + (2C - 1)x + R(x),$$

wo  $C$  die Eulersche Konstante bedeutet; über das Restglied  $R(x)$  bewies Dirichlet (*Berl. Abh.* 1849, S. 69—74 = *Werke* 2, S. 51—56), indem er sich auf die Umformung (9), § 15 (unten S. 1538), angewandt auf  $f(x) = g(x) = 1$ , stützte,  $R(x) = O(\sqrt{x})$ . In einem Briefe an Kronecker aus dem Jahre 1858 (Dirichlets *Werke* 2, S. 407) teilte er mit, daß er für  $R(x)$  eine schärfere Abschätzung gefunden habe. Die schärfste bis jetzt bekannte Abschätzung lautet  $R(x) = O\left(x^{\frac{27}{82}}(\log x)^{\frac{11}{41}}\right)$  (v. d. Corput, *Math. Ann.* 98 (1928), S. 697—716; Berichtigung ibid. 100 (1928), S. 480). Die untere Grenze  $\vartheta$  derjenigen Exponenten  $\alpha$ , für welche  $R(x) = O(x^\alpha)$  wahr ist, ist heute noch unbekannt. Nach der anderen Seite weiß man: Es gibt unendlich viele  $x$ , für die  $R(x) > Kx^{\frac{1}{4}}$  bzw.  $R(x) < -Kx^{\frac{1}{4}}$  wird, unter  $K$  eine positive Konstante verstanden (Hardy, *Lond. M. S. Proc.* (2) 15 (1916), S. 1—25). Von besonderer Bedeutung für das Problem ist eine von Voronoï (*Ann. éc. norm.* (3) 21 (1904), S. 218—219 u. S. 529) herrührende Identität, die  $R(x)$  durch eine unendliche Reihe von Hankelschen und Besselschen Funktionen ausdrückt. Eine zusammenfassende Darstellung der Hauptresultate über das Dirichletsche Teilerproblem mit den bei dem heutigen Stande einfachsten Beweismethoden gab Landau, *Math. Ann.* 97 (1926), S. 251—290.

Die Mittelwertbestimmung von  $\sigma_1(n)$  ergibt nach Dirichlet (*Berl. Abh.* 1849, S. 76—77 = *Werke* 2, S. 59)

$$(13) \quad \sum_{n \leq x} \sigma_1(n) = \frac{\pi^2 x^2}{12} + O(x \log x),$$

wo die Restabschätzung von Walfisz (*Math. Zeitschr.* 26 (1927), S. 66—88) zu  $O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right)$  verschärft wurde. In der Literatur findet man noch eine Reihe anderer aus den  $\sigma_i(n)$  summatorisch zusammengesetzte Ausdrücke auf ihr asymptotisches Verhalten untersucht. Dem Dirichletschen Teilerproblem verwandt ist das *Piltzsche Teilerproblem*:  $\tau_k(n)$  bezeichne die Anzahl der Darstellungen von  $n$  als Produkt von  $k$  natürlichen Zahlen, es soll  $\sum_{n \leq x} \tau_k(n) = T_k(x)$  auf sein asymptotisches Verhalten untersucht werden. (Piltz, *Dissertation* Berlin 1881, Landau, *Gött. Nachr.* 1912, S. 689—691 u. 722—731, Hardy, a. a. O.)

Neben den  $\sigma_i(n)$  sind zahllose andere mit den Teilern von  $n$  zusammenhängende zahlentheoretische Funktionen von  $n$  be-

trachtet worden, indem die Teiler einschränkenden Bedingungen unterworfen werden, wie etwa  $< \sqrt{n}$  bzw.  $> \sqrt{n}$  zu sein, in einer vorgeschriebenen arithmetischen Progression zu liegen, Potenzen mit vorgeschriebenem Exponenten zu sein, in einer vorgeschriebenen Potenz in  $n$  aufzugehen, zu den komplementären Teilern teilerfremd zu sein usw. Auch Anzahldifferenzen solcher Teiler mit verschiedenen Nebenbedingungen wurden untersucht, wie z. B. die Anzahl der Teiler  $\equiv 1 \pmod{4}$  minus der Anzahl der Teiler  $\equiv 3 \pmod{4}$ . Unermeßlich ist die Zahl der Identitäten, die zwischen allen diesen und anderen zahlentheoretischen Funktionen aufgestellt wurden.

### § 13. Theorie der Primzahlen.

Über die Primzahlen seien hier nur die allernotwendigsten Angaben zusammengestellt, da ein genaueres Studium der Einzelheiten nicht ohne ausführliche Erörterungen über die benutzten analytischen Hilfsmittel möglich ist; es sei in dieser Hinsicht auf die S. 1461 genannten Schriften verwiesen.

Um die Folge der Primzahlen bis zu einer gegebenen Schranke  $x$  zu gewinnen, ist das einfachste Verfahren das sogenannte *Sieb des Eratosthenes* (überliefert in der *Arithmetik* des Nikomachos I, 13, in der Ausgabe von R. Hoche, Leipzig (Teubner) 1866, S. 29 ff.). Man schreibe die natürlichen Zahlen von 1 bis  $x$  hin, streiche 1 durch, lasse 2 stehen, streiche alle geraden Zahlen von 4 bis  $x$  durch, lasse 3 stehen, streiche alle durch 3 teilbaren Zahlen von 9 bis  $x$  durch, und so fort; zuletzt bleiben von den Zahlen von 1 bis  $x$  die Primzahlen und nur diese undurchstrichen. Zur praktischen Anwendung ist dieses Verfahren zu roh, es läßt sich aber leicht verfeinern und dann zur Herstellung von Primzahl- oder Faktorentafeln anwenden, wobei es zweckmäßig ist, die einzelnen Operationen durch geeignet erdachte mechanische Vorrichtungen auszuführen. Vgl. hierüber z. B. Euler, *Abh.* 467, *Nov. Comm. Petrop.* 19 (1774; 1775) = *Comm. arithm.* 2, S. 64—91 = *Op. omn.* ser. 1, 3, S. 359—404; Gauß, *Werke* 2, S. 183—184, die Vorrede der sogleich zu nennenden Faktorentafel von Lehmer, sowie Lehmer, *Proc. Nat. Acad. sciences* 11 (1925), S. 97—98.

Unter den zahlreichen vorhandenen Primzahl- und Faktorentafeln seien die beim heutigen Stande umfassendsten genannt: D. N. Lehmer, *Factor table for the first ten millions* (Carnegie

*Inst. Washington, Publ. No. 105 (1909)*) und D. N. Lehmer, *List of prime numbers from 1 to 10006721 (Carnegie Inst. Washington, Publ. No. 165 (1914))*. Eine kleinere, für den Hausgebrauch des Zahlentheoretikers ausreichende, Primzahltafel enthält das Buch von Kraitchik, *Recherches*.

Zu den reizvollsten, seit Fermat viel gepflegten Aufgaben der Zahlentheorie gehört es, von großen vorgelegten Zahlen (die außerhalb der Grenzen der vorhandenen Tafeln liegen) zu entscheiden, ob sie Primzahlen sind oder nicht, und im letzten Falle ihre Faktoren aufzufinden. Da Methoden aus den verschiedensten Teilen der Zahlentheorie für diesen Zweck zur Anwendung gelangen, kann hier auf dies interessante Gebiet nicht näher eingegangen werden. Die Literatur hierüber ist außerordentlich reichhaltig, aber etwas zerstreut. Eine Übersicht über einen Teil dieser Methoden findet man bei Kraitchik, *Théorie* 1, Kap. 6, S. 132—160, 2, Kap. 10—16, S. 121—220, *Recherches*, S. 73—92; außerdem siehe vor allem Gauß, *Disqu. arithm.*, art. 329—334 und die daran anknüpfenden von H. Weber veranlaßten Straßburger Dissertationen von P. Meyer (1906) und R. Burgwedel (1910), ferner die einen ganz eigenen Weg gehende Abhandlung von M. v. Thielmann, *Math. Ann.* 62 (1906), S. 401—408. Vgl. außerdem unten § 17, S. 1555 und § 18, S. 1568 f.

Die Folge der Primzahlen bricht nicht ab. Für diesen Satz findet sich in den *Elementen* des Euklid (9, Satz 20) ein klassisch einfacher und strenger Beweis, der zu jeder gegebenen endlichen Menge von Primzahlen ein angebbares Intervall konstruiert, innerhalb dessen eine von allen Primzahlen der Menge verschiedene Primzahl liegt. Einen Fortschritt darüber hinaus bedeuten erst gewisse von Euler entdeckte analytische Identitäten, die später die Grundlage für die gesamte Theorie der Verteilung der Primzahlen wurden. Siehe Euler, Abh. 72, *Comm. Petrop* 9 (1737; 1744), S. 160—188 = *Op. omn.* ser. 1, 14, S. 216—244 und *Introductio* caput 15 = *Op. omn.* ser. 1, 8. Der Gedanke der Eulerschen Betrachtungen spricht sich in den Formeln (13), (14) aus § 9 aus; Euler wendet diese Identitäten insbesondere (ohne Rücksicht auf die Konvergenzverhältnisse)

auf  $f(n) = \frac{1}{n^s}$  an. Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  konvergiert (sogar absolut)

für alle  $s$  mit  $\Re(s) > 1$ ; die durch sie definierte Funktion von  $s$  bezeichnet man seit Riemann (*Berl. Monatsber.* 1859, S. 671

bis 680 = *Ges. Math. Werke*, 2. Aufl., S. 145—153) mit  $\zeta(s)$ . Es ist also für  $\Re(s) > 1$

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

wo  $p$  alle Primzahlen durchläuft. Läßt man  $s$  durch reelle Werte von rechts gegen 1 rücken, so wächst die linke Seite über alle Grenzen, womit ein neuer Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen gegeben ist. Es scheint, daß dieser Beweis nicht *explizit* bei Euler vorkommt, dagegen beweist Euler (in nach unseren Begriffen unstrenger Form) die Divergenz der über alle Primzahlen erstreckten Reihe

$$\sum_p \frac{1}{p}$$

und sagt, sie sei gewissermaßen der Logarithmus der harmonischen Reihe. Für  $\Re(s) > 1$  folgt aus (1) in der Tat

$$(2) \quad \log \zeta(s) = \log \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) = \sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k p^{ks}},$$

und bei  $s \rightarrow 1 + 0$  bleibt der zweite Teil der rechten Seite endlich. Die volle Bedeutung der Eulerschen Betrachtungen wurde erst klar, als es 1837 Dirichlet (*Ber. üb. d. Verh. d. Kgl. Preuß. Ak. d. Wiss.* 1837, S. 108—110; *Berl. Abh.* 1837, S. 45—81 = *Werke* 1, S. 307—312 bzw. S. 313—342) auf diesem Wege gelang, den „Satz von der arithmetischen Progression“ zu beweisen:

*Jede arithmetische Progression erster Ordnung, deren Anfangsglied und Differenz teilerfremd sind, enthält unendlich viele Primzahlen.*

Dieser Satz war 1785 von Legendre aufgestellt worden (*Hist. de l'Acad. roy. d. sciences Paris, année 1785 (1788)*, S. 552). Der daselbst skizzierte und später (*Essai*, 2. Aufl. 1808, S. 404) ausgeführte Beweis ist jedoch fehlerhaft. Es ist auch bis heute nicht gelungen, den Satz in vollem Umfange ohne die von Dirichlet eingeführten Hilfsmittel der Analysis zu beweisen; dagegen sind für viele spezielle arithmetische Progressionen elementare Beweise gegeben worden, siehe z. B. Kronecker, *Vorles.* 1, S. 438—441, I. Schur, *Sitzber. Berl. Math. Ges.* 11



(1912), S. 40—50 und unten § 18, S. 1568. Dirichlet hält sich ganz an den Ansatz (2); um die Primzahlen, die der Kongruenz

$$p \equiv a \pmod{m} \quad (a, m) = 1$$

genügen, von den übrigen zu isolieren, führt er neben der Reihe  $\sum \frac{1}{n^s}$  die *L-Reihen* ein, die für  $\Re(s) > 1$  durch

$$(3) \quad L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

erklärt sind, wo  $\chi$  einen Charakter (mod.  $m$ ) bedeutet (vgl. § 14). Für  $\Re(s) > 1$  gilt

$$(4) \quad L(s, \chi) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}$$

und

$$(5) \quad \log L(s, \chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\chi(p^k)}{k p^{ks}}.$$

Mit Hilfe von (6), § 14 (S. 1530) vollzieht sich dann die Isolierung der  $p \equiv a \pmod{m}$ . Alsdann folgt der Grenzübergang  $s \rightarrow 1 + 0$ , dabei ist die Hauptschwierigkeit der Nachweis, daß die Werte

$$L(1, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \quad \chi \neq \chi_1$$

nicht verschwinden. Moderne Darstellungen des Beweises findet man bei Hecke, *Algebr. Zahlen*, S. 170—172 und (elementarer ohne Benutzung der Theorie der algebraischen Zahlen, dafür aber weniger durchsichtig) bei Landau, *Vorles.* 1, S. 79—96.

Die Anzahl der Primzahlen  $\leq x$ , wo  $x$  eine beliebige positive Zahl, bezeichnet man mit  $\pi(x)$ . Die Aufgabe, den Verlauf der Funktion  $\pi(x)$  näher zu bestimmen, heißt das *Problem der Verteilung der Primzahlen*. Neben  $\pi(x)$  betrachtet man  $\pi(x; m, a)$ , die Anzahl der  $p \equiv a \pmod{m}$ , die  $\leq x$  sind. Gauß<sup>1)</sup> hat vermutet, daß  $\pi(x)$  annähernd durch die Funktion  $\frac{x}{\log x}$  oder durch

1) Für genauere Zitate sei auf Landau, *Handbuch*, und auf den *Enzyklopädieartikel* von Bohr und Cramér verwiesen.



den Integrallogarithmus  $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$  dargestellt wird. Ein Beweis dieser Tatsache in dem Sinne

$$(6) \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

gelang aber erst 1896 Hadamard und de la Vallée Poussin. Der Satz (6) heißt der *Primzahlsatz*. Die schärfste gegenwärtig beweisbare Fassung lautet

$$(7) \quad \pi(x; m, a) = \frac{1}{\varphi(m)} \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left(x e^{-\alpha \sqrt{\log x \log \log x}}\right),$$

wo  $\alpha$  eine von  $m$  und  $a$  unabhängige positive Konstante bedeutet. Dieses Resultat von Littlewood wurde, mit eigenen Beweisen versehen, von Landau veröffentlicht (*Math. Zeitschr.* **20** (1924), S. 105—125; siehe auch *Vorles.* **2**, S. 1—47).

Das wichtigste Hilfsmittel bei diesen Untersuchungen bildet das *funktionentheoretische* Studium der Funktion  $\zeta(s)$  sowie der  $L$ -Reihen für komplexe  $s$ . Es wurde von Riemann (l. c.) begonnen und bietet heute noch ungelöste Fragen. Von einer Ausführung der funktionentheoretischen Eigenschaften der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion muß hier Abstand genommen werden; es soll nur erwähnt werden, daß man unter dem Namen *Riemannsche Vermutung* die bis heute unbewiesene Behauptung versteht, daß sämtliche nicht auf der reellen Achse der  $s$ -Ebene gelegenen Nullstellen der Funktion  $\zeta(s)$  den Realteil  $\frac{1}{2}$  haben. Aus der Richtigkeit dieser Behauptung würden sich zahlreiche wichtige Folgerungen für die Primzahltheorie ergeben.

In der Reihe der Primzahlen kommen *beliebig große Lücken* vor, denn unter den  $n - 1$  Zahlen  $n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$  ist (für  $n > 1$ ) keine einzige eine Primzahl. Das Gegenstück hierzu, daß es unendlich viele *Paare von Primzahlen mit der Differenz 2* gibt, ist eine bis heute unbewiesene Vermutung; man weiß nur, daß diejenigen Primzahlen  $p$ , für die  $p + 2$  Primzahl ist, so dünn verteilt sind, daß die über sie erstreckte Summe  $\sum \frac{1}{p}$  konvergiert (Brun, *Bull. Sc. M.* (2) **43**, S. 100—104 u. S. 124—128; auch dargestellt bei Landau, *Vorles.* **1**, S. 71 bis 78).

# § 14. Aus Einheitswurzeln zusammengesetzte Ausdrücke, insbesondere Charaktere (mod. $m$ ) und Gaußsche Summen.

Die Bedeutung der Einheitswurzeln für die elementare Zahlentheorie ist begründet in den beiden Sätzen: Ist  $\varepsilon$  eine  $m$ -te Einheitswurzel, so hängt der Wert der zahlentheoretischen Funktion  $f(n) = \varepsilon^n$  nur ab von der Restklasse (mod.  $m$ ), der  $n$  angehört. Die sämtlichen  $m$ -ten Einheitswurzeln bilden bei Verknüpfung durch Multiplikation eine zyklische Gruppe, welche mit der Gruppe  $\mathfrak{A}_m$  der Restklassen (mod.  $m$ ) bei Verknüpfung durch Addition vermöge der Zuordnung  $\varepsilon^n \leftrightarrow n \pmod{m}$  isomorph ist.

Bei vielen Gelegenheiten ist der isolierende Faktor

$$(1) \quad b_m(n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \equiv 0 \pmod{m} \\ 0, & \text{wenn } n \not\equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

von Nutzen. Mit Hilfe der  $m$ -ten Einheitswurzeln läßt er sich in der Gestalt

$$(2) \quad b_m(n) = \frac{1}{m} \sum_{l \pmod{m}} e^{\frac{2\pi i n l}{m}} = \frac{1}{m} \sum \varepsilon_m^n$$

darstellen, wo in der zweiten Summe  $\varepsilon_m$  sämtliche  $m$ -ten Einheitswurzeln durchläuft. Eine unmittelbare Anwendung ist z. B. die Librische Formel (7) aus § 4, S. 1483, bei deren Beweis die ganze Kunst nur in der Vertauschung der Summationsreihenfolgen besteht.

Eine verwandte, in neuerer Zeit häufig als „Ramanujan's sum“ (Ramanujan, *Transact. Cambridge phil. soc.* **22** (1918), S. 259—276 = *Collected papers* **1**, S. 179—199) zitierte Funktion ist die Summe der  $n$ -ten Potenzen der primitiven  $m$ -ten Einheitswurzeln:

$$(3) \quad c_m(n) = \sum_{\substack{l \pmod{m} \\ (l, m) = 1}} e^{\frac{2\pi i n l}{m}} = \sum \varrho_m^n.$$

Mit Hilfe der Möbiusschen  $\mu$ -Funktion bestimmt sich ihr Wert zu

$$(4) \quad c_m(n) = \sum_{d \mid (m, n)} \mu\left(\frac{m}{d}\right) d;$$

insbesondere ist für  $m = p^\alpha$ , wo  $p$  Primzahl und  $\alpha \geq 1$ ,

$$(5) \quad c_{p^\alpha}(n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } p^{\alpha-1} \nmid n \\ -p^{\alpha-1}, & \text{wenn } p^{\alpha-1} \mid n \text{ aber } p^\alpha \nmid n \\ p^\alpha - p^{\alpha-1}, & \text{wenn } p^\alpha \mid n. \end{cases}$$

Von besonderer Wichtigkeit für viele Fragen der Zahlentheorie sind die *Charaktere* (mod.  $m$ ). Eine für alle ganzen Zahlen  $n$  definierte Funktion  $\chi(n)$  heißt ein Charakter (mod.  $m$ ), wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1.  $\chi(a) = \chi(b)$ , wenn  $a \equiv b \pmod{m}$
2.  $\chi(a) = 0$ , wenn  $(a, m) > 1$
3.  $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$
4.  $\chi(1) = 1$ .

Man kann diese auch so aussprechen:  $\chi(n)$  ist eine Funktion der Restklassen (mod.  $m$ ), die für die zu  $m$  relativ primen Restklassen ein Gruppencharakter der von diesen bei Verknüpfung durch Multiplikation gebildeten Abelschen Gruppe  $\mathfrak{G}_m$  ist und für die übrigen Restklassen den Wert Null hat. Es gibt zu jedem  $m$  genau  $\varphi(m)$  verschiedene Charaktere

$$\chi_1(n), \chi_2(n), \dots, \chi_{\varphi(m)}(n);$$

einer unter ihnen,  $\chi_1(n)$ , hat für jedes zu  $m$  teilerfremde  $n$  den Wert 1, er heißt der *Hauptcharakter*. Die Werte aller Charaktere sind entweder Null oder  $\varphi(m)$ -te Einheitswurzeln; je zwei Charaktere  $\chi$  und  $\chi$  nehmen für gleiches Argument konjugiert komplexe Werte an. Ihr Produkt ergibt den Hauptcharakter, daher schreibt man auch  $\bar{\chi}(n) = \chi^{-1}(n)$  und nennt  $\chi^{-1}$  den zu  $\chi$  *inversen* Charakter. Wenn  $\chi(n)$  für jedes  $n$  reell ist, also  $\chi(n) = \bar{\chi}(n)$ , so heißt  $\chi$  ein *reeller* Charakter.

Die wichtigsten Eigenschaften der Charaktere drücken sich in den Formeln aus:

$$(6) \quad \sum_{\chi} \chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \not\equiv 1 \pmod{m} \\ \varphi(m), & \text{wenn } n \equiv 1 \pmod{m} \end{cases} \quad (1)$$

1)  $\sum_{\chi}$  bedeutet:  $\chi$  durchläuft bei festem  $n$  die  $\varphi(m)$  verschiedenen Charaktere (mod.  $m$ ).

$$(7) \quad \sum_{n \pmod{m}} \chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \chi \neq \chi_1 \\ \varphi(m), & \text{wenn } \chi = \chi_1 \end{cases}$$

$$(8) \quad \chi(n) = \bar{\chi}(n') = \chi^{-1}(n'), \text{ wenn } n \cdot n' \equiv 1 \pmod{m}.$$

Man unterscheidet *eigentliche* und *uneigentliche* Charaktere (mod.  $m$ ). Ein Charakter  $\chi(n)$  heißt ein *eigentlicher*, wenn es keinen von  $m$  verschiedenen (positiven) Teiler  $M$  von  $m$  gibt, derart daß stets  $\chi(a) = \chi(b)$  gilt, wenn  $a \equiv b \pmod{M}$ ,  $(a, m) = 1$ ,  $(b, m) = 1$  ist. D. h. also, wenn  $\chi$  bei Beschränkung auf die zu  $m$  teilerfremden Restklassen als Argument nicht schon Gruppencharakter für die Gruppe  $\mathfrak{G}_M$  der zu  $M$  teilerfremden Restklassen (mod.  $M$ ) ist, wo  $M$  ein beliebiger der positiven *echten* Teiler von  $m$  ist. Für das Rechnen mit *eigentlichen* Charakteren ist die wichtigste Gleichung

$$(9) \quad \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{M} \\ n \pmod{m}}} \chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } M \mid m, M \neq m \\ \chi(a), & \text{wenn } M = m \end{cases}$$

(gültig für  $m > 0$ ,  $M > 0$ ,  $a$  fest,  $(a, m) = 1$ ).

Die Unterscheidung in eigentliche und uneigentliche Charaktere ist von Bedeutung bei der Behandlung der sogenannten *Lagrangeschen Resolventen*

$$G(\chi, n) = \sum_{l \pmod{m}} \chi(l) e^{\frac{2\pi i n l}{m}}.$$

Unter der Voraussetzung, daß  $\chi$  ein *eigentlicher* Charakter ist, gilt

$$(10) \quad G(\chi, n) = G(\chi, 1) \cdot \bar{\chi}(n),$$

ferner

$$(11) \quad \begin{cases} G(\chi, 1) G(\bar{\chi}, 1) = \chi(-1) \cdot m \\ |G(\chi, 1)|^2 = m. \end{cases}$$

Insbesondere ist also

$$(12) \quad \begin{cases} G(\chi, n) = 0, & \text{wenn } (n, m) > 1 \\ |G(\chi, n)| = \sqrt{m}, & \text{wenn } (n, m) = 1. \end{cases}$$

Verallgemeinerung von (12) auf *uneigentliche* Charaktere siehe Landau, *Vorles. 3*, S. 330–334. — Jedem (eigentlichen oder uneigentlichen) Charakter  $\chi(n)$  (mod.  $m$ ) läßt sich ein eigentlicher Charakter  $X(n)$  nach einem passenden Teiler  $M$  von  $m$  zuordnen,

derart, daß  $\chi(n) = X(n)$  wird, wenn  $(n, m) = 1$ , während für  $(n, m) > 1$ ,  $(n, M) = 1$  gilt:  $\chi(n) = 0$ ,  $X(n) \neq 0$ .  $M$  ist durch  $\chi$  eindeutig bestimmt und heißt der *Führer* des Charakters  $\chi(n)$ . Für alle  $n$  kann man schreiben:  $\chi(n) = \chi_1(n)X(n)$ .

Die Charaktere wurden von Dirichlet in die Zahlentheorie eingeführt (*Berl. Abh.* 1837, S. 61–65 = *Werke* 1, S. 333–337), der eine explizite Darstellung der Werte von  $\chi(n)$  mit Hilfe von Indexsystemen und Einheitswurzeln an die Spitze stellte. Den abstrakteren Begriff der Charaktere einer beliebigen Abelschen Gruppe, durch den erst die wesentlichen Eigenschaften der Charaktere (mod.  $m$ ) unabhängig von einem zufälligen Konstruktionsverfahren erfaßbar wurden, gab zum ersten Mal Weber (*Math. Ann.* 20 (1882), S. 301–329). Die Unterscheidung in eigentliche und uneigentliche Charaktere rührt von Lipschitz her (*J. f. Math.* 105 (1883), S. 142–144). Neuere Darstellungen der Theorie: Landau, *Handbuch* 1, S. 387–414, 478–486, 492–494, *Vorles.* 1, S. 83–87; Hecke, *Algebr. Zahlen*, § 10 und § 15.

Für verschiedene Anwendungen ist es nötig, endliche Summen von Charakteren der Gestalt

$$s_l = \sum_{n=1}^l \chi(n) \quad \text{oder} \quad s_{a,b} = \sum_{n=a}^b \chi(n)$$

für einen *eigentlichen* Charakter (mod.  $m$ ) abzuschätzen. Stets gilt

$$|s_l| < \sqrt{m} \log m, \quad |s_{a,b}| < \sqrt{m} \log m,$$

und, wenn  $s$  das Maximum von  $|s_l|$  (bei festem  $m$  für alle  $l \geq 1$  und alle eigentlichen  $\chi$ ) und  $S$  das (in entsprechender Weise verstandene) Maximum von  $|s_{a,b}|$  bezeichnet, so gelten die Formeln

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{s}{\sqrt{m} \log m} \leq \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}, & \text{wenn } \chi(-1) = 1 \\ \frac{1}{2\pi}, & \text{wenn } \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

und

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{S}{\sqrt{m} \log m} \leq \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{2}}, & \text{wenn } \chi(-1) = 1 \\ \frac{1}{2\pi}, & \text{wenn } \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

Siehe Pólya (*Gött. Nachr.* 1918, S. 21–29), I. Schur (*ibid.* S. 30–36), Landau (*ibid.* S. 79–97).

*Gaußsche Summen* heißen die Summen der Form

$$(13) \quad G(a, b) = \sum_{h \pmod{b}} e^{\frac{2\pi i a}{b} h^2},$$

wo  $a$  eine beliebige ganze,  $b$  eine von Null verschiedene ganze Zahl ist. Sie haben die Funktionaleigenschaften

$$(14) \quad G(a, b) = G(a', b), \quad \text{wenn } a \equiv a' \pmod{b}$$

$$(15) \quad G(da, db) = |d| \cdot G(a, b), \quad \text{wenn } d \neq 0$$

$$(16) \quad G(ac^2, b) = G(a, b), \quad \text{wenn } (c, b) = 1$$

$$(17) \quad G(a, b) = \frac{1 + i \operatorname{sign.}(ab)}{4} \sqrt{\left| \frac{b}{a} \right|} G(-b, 4a),$$

wenn  $a \neq 0, b \neq 0$ .

Aus (17) ergeben sich insbesondere folgende Werte für  $G(1, n)$  ( $n \geq 1$  ganz):

$$(18) \quad G(1, n) = \frac{1 + (-i)^n}{1 - i} \sqrt{n} = \frac{1 + i^{-n}}{1 - i} \sqrt{n},$$

d. h.

$$(18') \quad G(1, n) = \begin{cases} (1 + i)\sqrt{n} & \text{für } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \sqrt{n} & \text{für } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 0 & \text{für } n \equiv 2 \pmod{4} \\ i\sqrt{n} & \text{für } n \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

wo  $\sqrt{n} > 0$  zu nehmen ist. Für ungerades  $n$  kann auch geschrieben werden

$$(18'') \quad G(1, n) = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{n}.$$

Mittels der Formeln (14), (16), (17) läßt sich der Wert von  $G(a, b)$  für beliebige  $a, b$  durch kettenbruchartige Algorithmen, ähnlich den zur Bestimmung des Jacobischen Symbolen dienenden (vgl. § 8, S. 1509) berechnen.

Wird  $b$  in beliebig viele paarweise teilerfremde Faktoren zerlegt:

$$b = b_1 b_2 \cdots b_k,$$

und zur Abkürzung für  $x = 1, 2, \dots, k$  gesetzt

$$B_x = \frac{b}{b_x} = b_1 b_2 \cdots b_{x-1} b_{x+1} \cdots b_k,$$

so gilt

$$(19) \quad G(a, b) = G(a B_1, b_1) G(a B_2, b_2) \cdots G(a B_k, b_k).$$



Hieraus folgt mit Hilfe von (14) und (16): Wenn der Bruch  $\frac{a}{b}$  die Partialbruchzerlegung

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_k}{b_k}$$

mit ganzen paarweise teilerfremden  $b_1, b_2, \dots, b_k$  besitzt<sup>1)</sup>, so gilt

$$(20) \quad G(a, b) = G(a_1, b_1) G(a_2, b_2) \dots G(a_k, b_k).$$

Durch (19) ist die Berechnung von  $G(a, b)$  auf den Fall zurückgeführt, daß  $b$  eine Primzahlpotenz  $p^\alpha$  ist. Diesen weiter zu behandeln dient die Rekursionsformel

$$(21) \quad G(a, p^\alpha) = p G(a, p^{\alpha-2}),$$

die unter den Voraussetzungen

$$p \text{ Primzahl, } (a, p) = 1,$$

$$\alpha \geq 2 \text{ falls } p \neq 2, \quad \alpha \geq 4 \text{ falls } p = 2$$

gilt. Aus ihr folgt sofort

$$(22) \quad G(a, p^\alpha) = \begin{cases} p^{\frac{\alpha}{2}}, & \text{wenn } \alpha \text{ gerade} \\ p^{\frac{\alpha-1}{2}} G(a, p), & \text{wenn } \alpha \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$(p \text{ ungerade Primzahl, } (a, p) = 1)$$

und

$$(22') \quad G(a, 2^\alpha) = \begin{cases} 2^{\frac{\alpha}{2}-1} G(a, 4), & \text{wenn } \alpha \text{ gerade, } \alpha \geq 2 \\ 2^{\frac{\alpha-3}{2}} G(a, 8), & \text{wenn } \alpha \text{ ungerade, } \alpha \geq 3 \end{cases}$$

( $a$  ungerade).

Ist  $p$  eine ungerade Primzahl und  $(a, p) = 1$ , so gilt ferner

$$(23) \quad G(a, p) = \sum_{\substack{h \pmod{p} \\ (h, p) = 1}} \left( \frac{h}{p} \right) e^{\frac{2\pi i a}{p} h},$$

wo  $\left( \frac{h}{p} \right)$  das Legendresche Symbol bedeutet. Durch diese Formel wird  $G(a, p)$  als ein Spezialfall der vorher betrachteten Aus-

1)  $a$  braucht dabei nicht zu  $b$  teilerfremd zu sein.

drücke  $G(\chi, n)$  erwiesen. Entsprechend der Gleichung (10) oben ergibt sich aus (23)

$$(24) \quad G(a, p) = \left(\frac{a}{p}\right) G(1, p),$$

also nach (18'')

$$(25) \quad G(a, p) = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \left(\frac{a}{p}\right) \sqrt{p}.$$

Aus (22) und (25) folgt nun

$$(26) \quad G(a, p^\alpha) = \begin{cases} p^{\frac{\alpha}{2}}, & \text{wenn } \alpha \text{ gerade} \\ i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \left(\frac{a}{p}\right) p^{\frac{\alpha}{2}}, & \text{wenn } \alpha \text{ ungerade;} \end{cases}$$

in beiden Fällen gilt

$$(27) \quad G(a, p^\alpha) = \left(\frac{a}{p^\alpha}\right) G(1, p^\alpha),$$

wo jetzt unter  $\left(\frac{a}{p^\alpha}\right)$  das Jacobische Symbol zu verstehen ist.

Verbindet man dies Ergebnis mit (19) und (18''), so folgt der Satz:

*Wenn  $b > 0$  ungerade und  $(a, b) = 1$  ist, so gilt*

$$(28) \quad G(a, b) = \left(\frac{a}{b}\right) G(1, b) = i^{\left(\frac{b-1}{2}\right)^2} \left(\frac{a}{b}\right) \sqrt{b},$$

wo  $\left(\frac{a}{b}\right)$  das Jacobische Symbol bedeutet.<sup>1)</sup>

Endlich ist für ungerades  $a$

$$(29) \quad \begin{cases} G(a, 2) = 0 \\ G(a, 4) = 2(1 + i^a) = (-i)^{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2} (1 + i) \sqrt{4} \\ \qquad \qquad \qquad = (-i)^{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2} G(1, 4) \\ G(a, 8) = 4e^{\frac{\pi i a}{4}} = i^{\frac{a-1}{2}} (1 + i) \sqrt{8} \\ \qquad \qquad \qquad = i^{\frac{a-1}{2}} G(1, 8); \end{cases}$$

1) Sind  $a, b$  zwei teilerfremde ungerade positive Zahlen und wendet man (28) auf die drei in der aus (19) folgenden Identität  $G(1, ab) = G(a, b) G(b, a)$  vorkommenden Gaußschen Summen an, so ergibt sich der vierte Gaußsche Beweis des Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste, und zwar sogleich der Verallgemeinerung auf Jacobische Symbole.

somit ergibt (22')

$$(30) \quad G(\alpha, 2^\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \alpha = 1 \\ (1 + i^\alpha) 2^{\frac{\alpha}{2}} = (-i)^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2} G(1, 2^\alpha), & \text{wenn } \alpha \text{ gerade, } \alpha \geq 2 \\ e^{\frac{\pi i \alpha}{4}} 2^{\frac{\alpha+1}{2}} = i^{\frac{\alpha-1}{2}} (1 + i) 2^{\frac{\alpha}{2}} = i^{\frac{\alpha-1}{2}} G(1, 2^\alpha), & \text{wenn } \alpha \text{ ungerade, } \alpha \geq 3. \end{cases}$$

Nimmt man jetzt (19), (28), (30), (18'') zusammen, so erhält man als Endresultat:

Es sei  $b > 0$ ,  $(a, b) = 1$ ,  $b = 2^\alpha u$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $u$  ungerade. Dann wird

$$(31) \quad \begin{aligned} G(a, b) &= i^\delta \left(\frac{a}{u}\right) G(1, b) \\ &= i^\delta \frac{1 + i^{-b}}{1 - i} \left(\frac{a}{u}\right) \sqrt{b}, \end{aligned}$$

wo  $\left(\frac{a}{u}\right)$  das Jacobische Symbol ist und

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \alpha = 0 \\ \text{beliebig,} & \text{wenn } \alpha = 1 \\ \frac{a-1}{2}u + \frac{a^2-1}{4}, & \text{wenn } \alpha \text{ gerade, } \alpha \geq 2 \\ \frac{a-1}{2}u, & \text{wenn } \alpha \text{ ungerade, } \alpha \geq 3. \end{cases}$$

Die Gaußschen Summen  $G(1, p)$  wurden von Gauß (*Disqu. arithm.* art. 356) in die Mathematik eingeführt. Gauß berechnete dort auch die Werte von  $(G(1, p))^2$ , aber die Bestimmung des Vorzeichens von  $G(1, p)$  gelang ihm erst ein Jahrzehnt später (1811) in der eigens diesem Zweck gewidmeten Abhandlung *Summatio quarundam serierum singularium* (*Werke* 2, S. 9—45), die bereits von den allgemeinen Summen  $G(a, b)$  handelt. Die Schwierigkeit der Vorzeichenbestimmung der Gaußschen Summen hatte seinerzeit große Berühmtheit erlangt. Dirichlet bewies die Formel (17) (bzw. gleichwertige Formeln) durch Anwendung von *Fourierschen Reihen* (*Berl. Abh.* 1835, S. 391—407 = *Werke* 1, S. 237—256). Seitdem ist das Problem mit den verschiedensten Methoden behandelt worden, durch elementare rechnerische Umformungen verbunden mit Abschätzungen trigonometrischer Ausdrücke, mit Hilfe der Transformation der Thetafunktionen, durch

Anwendung des Cauchyschen Residuensatzes, mit Hilfe des Matrizenkalküls. Einige dieser Beweisanordnungen sind dargestellt bei Landau, *Vorles.* 1, S. 153—171; hinzu kommt ein neuer auf Abschätzung trigonometrischer Summen beruhender Beweis von Landau (*Gött. Nachr.* 1928, S. 19—20); die beste Beweisanordnung für (17) mit Benutzung des Cauchyschen Residuensatzes gibt Mordell (*Mess. of Math.* 48 (1918), S. 54—56).

Für Verallgemeinerungen auf mehrfache Gaußsche Summen siehe Weber, *J. f. Math.* 74 (1872), S. 14—56 und Krazzer, *Festschrift f. H. Weber*, Leipzig (Teubner) 1912, S. 181—197.

### § 15. Die Funktion $[x]$ .

Nach Gauß (*Werke* 2, S. 5, 1808) bezeichnet man für beliebiges reelles  $x$  mit  $[x]$  die größte ganze Zahl, welche  $\leq x$  ist. Diese unstetige Funktion der reellen Variablen  $x$  spielt bei vielen Rechnungen mit zahlentheoretischen Ausdrücken eine große Rolle. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktion sind

$$(1) \quad x - 1 < [x] \leq x$$

$$(2) \quad [x + g] = [x] + g, \quad \text{wenn } g \text{ ganz}$$

$$(3) \quad [-x] = \begin{cases} -[x] - 1, & \text{wenn } x \text{ nicht ganz} \\ -[x] & , \quad \text{wenn } x \text{ ganz} \end{cases}$$

$$(4) \quad [gx] = [x] + \left[x + \frac{1}{g}\right] + \cdots + \left[x + \frac{g-1}{g}\right],$$

wenn  $g > 0$  und ganz

$$(5) \quad \left[\frac{x}{g}\right] = \left[\frac{[x]}{g}\right], \quad \text{wenn } g > 0 \text{ und ganz}$$

$$(6) \quad [x_1] + [x_2] + \cdots + [x_n] \leq [x_1 + x_2 + \cdots + x_n].$$

Wenn  $x$  keine ganze Zahl ist, gestattet  $[x]$  folgende analytische Darstellung:

$$(7) \quad x - [x] - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi v x}{v},$$

dagegen gilt für jedes reelle  $x$

$$(7') \quad [x] - [-x] - 2x = \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi v x}{v}.$$

Eine erste Anwendung findet die Funktion  $[x]$  bei den auf das Gaußsche Lemma gestützten Beweisen des Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste und den anschließenden Betrachtungen, vgl. oben S. 1503. Weiter tritt sie auf bei Umformungen gewisser endlicher Summen, wofür ein typisches Beispiel gegeben sei:

$f(n)$  und  $g(n)$  seien zwei beliebige zahlentheoretische Funktionen und

$$F(n) = \sum_{m=1}^n f(m), \quad G(n) = \sum_{m=1}^n g(m)$$

seien die zugehörigen summatorischen Funktionen. Bezeichnet dann für positives  $x$  das Zeichen  $\sum_{d, d' \leq x}$ , daß  $d$  und  $d'$  alle Paare natürlicher Zahlen durchlaufen, für die  $dd' \leq x$  ist, so gilt

$$\begin{aligned} (8) \quad \sum_{d, d' \leq x} f(d) g(d') &= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d=1}^{[x]} f(d) G\left(\left[\frac{x}{d}\right]\right). \end{aligned}$$

Neben diese Formel tritt nach Dirichlet eine für viele Zwecke vorteilhaftere, mehr symmetrisch gebaute. Für  $1 \leq y \leq x$  gilt

$$\begin{aligned} (9) \quad \sum_{d, d' \leq x} f(d) g(d') &= \sum_{d \leq y} f(d) G\left(\left[\frac{x}{d}\right]\right) + \sum_{\substack{d' \leq \frac{x}{y} \\ d' \leq \frac{x}{y}}} g(d') F\left(\left[\frac{x}{d'}\right]\right) \\ &\quad - F([y]) G\left(\left[\frac{x}{y}\right]\right). \end{aligned}$$

Besonders wichtig sind die Spezialfälle, die für die Funktionen  $g(n) = 1$ ,  $G(n) = n$  (für alle natürlichen  $n$ ) entstehen.

Es empfiehlt sich, solche Umordnungen, wie die in (8) und (9) vorgenommenen, geometrisch an dem sogenannten *Teilerfeld* zu veranschaulichen (Möbius, *J. f. Math.* **22** (1841), S. 276 bis 284 = *Werke* **4**, S. 613—624). Man markiere sich in einem ebenen Parallelkoordinatensystem zu den Abszissen  $n = 1, 2, 3, \dots$  die Punkte, deren Ordinaten die Teiler von  $n$  sind. Dann kann man die markierten Punkte ordnen nach den Parallelen zu einer der Koordinatenachsen, auf denen sie liegen, oder nach den Strahlen durch den Ursprung, auf denen sie liegen, und auf viele andere Weisen, und dann den Übergang von der einen Art der Anordnung zu einer anderen anschaulich verfolgen.

Endlich sei noch erwähnt, daß sich mit Hilfe des Zeichens [ ] die Primzahlzerlegung der Fakultäten bequem anschreiben läßt. Für jede natürliche Zahl  $n$  ist nämlich

$$n! = \prod_p p^{\alpha_p}$$

mit

$$\alpha_p = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{p^m} \right];$$

dabei hat in dem Produkt  $p$  nach Belieben entweder alle Primzahlen  $\leq n$  oder alle Primzahlen überhaupt zu durchlaufen.

### § 16. Additive Zahlentheorie (ausschließlich der Zerfällung in Quadrate).

Unter dem Namen *additive Zahlentheorie* faßt man den Kreis derjenigen Fragen zusammen, die an die additive Zusammensetzung der natürlichen Zahlen aus natürlichen Zahlen als Summanden anknüpfen. Während bei der multiplikativen Zusammensetzung die Zahlen, welche als Faktoren einer natürlichen Zahl  $n$  auftreten können, nur besondere, nämlich die Teiler von  $n$ , sein können, besteht eine solche Einschränkung außer der selbstverständlichen Bedingung,  $\leq n$  zu sein, bei der additiven Zusammensetzung an sich nicht. Auch etwas, das den Primzahlen der multiplikativen Zahlentheorie in der additiven Zahlentheorie entspricht, fehlt; an letzten unzerlegbaren Bausteinen für die additive Zusammensetzung der Zahlen gibt es nur einen einzigen, die Eins. Damit haben die Analoga derjenigen Fragen, die in der multiplikativen Zahlentheorie den Ausgangspunkt zu allen weiteren Problemen bilden, in der additiven Zahlentheorie triviale Antworten. Die interessanteren Fragen der additiven Zahlentheorie beschäftigen sich vielmehr mit der Bestimmung der Anzahl der additiven Zusammensetzungen einer gegebenen natürlichen Zahl  $n$ , wobei den Summanden mehr oder weniger Bedingungen auferlegt werden. Diese können folgender Art sein: Die Summanden sollen ganz beliebige natürliche Zahlen sein, oder sie sollen alle gerade bzw. alle ungerade sein, oder es sollen Quadrat- bzw. Kubikzahlen bzw. Potenzen mit einem vorgeschriebenen Exponenten sein, oder es sollen Primzahlen sein, usw. Auch kann verlangt werden, daß sie der Größe nach beschränkt sind, endlich können Beziehungen mehrerer Summanden zueinander gefordert werden, etwa: die Summanden



sollen alle voneinander verschieden sein, oder bei Anordnung der Größe nach sollen aufeinander folgende Summanden mindestens eine vorgeschriebene Differenz haben, usw. Ebenso können für die Anzahl der Summanden, die in den zu zählenden additiven Zusammensetzungen auftreten, Vorschriften gegeben werden: entweder sie bleibt frei, oder sie wird genau vorgegeben, oder es wird eine obere Grenze für sie festgesetzt. Endlich ist eine Verabredung zu treffen, ob zwei additive Darstellungen einer Zahl  $n$ , die sich nur durch die Reihenfolge der eingehenden Summanden unterscheiden, als verschieden gezählt werden sollen oder nicht. Es ist üblich, wenn nichts hinzugesagt wird, nur auf die eingehenden Summanden selbst und nicht auf ihre Reihenfolge zu achten. Eine bestimmte additive Darstellung einer natürlichen Zahl  $n$  aus natürlichen Zahlen als Summanden heißt eine *Zerfällung* (lateinisch: *partitio*) von  $n$ ; die Gesamtheit der Vorschriften der geschilderten Art, durch welche die Zerfällung näher gekennzeichnet ist, kann man als den *Typus* der Zerfällung bezeichnen. Das Schema der Fragestellungen der additiven Zahlentheorie ist demnach folgendes:

*Wie groß ist die Anzahl der Zerfällungen einer gegebenen natürlichen Zahl  $n$  nach einem vorgeschriebenen Typus? Insbesondere: Wie muß  $n$  beschaffen sein, damit es überhaupt eine Zerfällung nach diesem Typus zuläßt?*

Jedoch läßt sich die Trennung zwischen additiver und multiplikativer Zahlentheorie nicht scharf durchführen. Denn viele Probleme der additiven Zahlentheorie, insbesondere die von der Zerfällung in Quadrate handelnden (§ 17), erfordern zu ihrer Beantwortung durchaus die Methoden der multiplikativen Zahlentheorie und ordnen sich ganz in die Gedankengänge der multiplikativen Theorien ein.

Eine zusammenfassende Darstellung der additiven Zahlentheorie bis zum Jahre 1910 gab Bachmann in seinem Buch *Additive Z.*, wo auch über Verallgemeinerungen nach verschiedenen Richtungen der soeben formulierten Hauptfrage berichtet wird. Ein Teil der additiven Zahlentheorie ist ganz in reiner Kombinatorik aufgegangen, über diesen vgl. die Spezialliteratur über Kombinatorik, z. B. MacMahon, *Combinatory Analysis*, 2 Bde. Cambridge (Univ. press) 1915, 1916. Eine Gesamtdarstellung, die die neueren Fortschritte berücksichtigt, fehlt bisher.

Zur Bezeichnung der Anzahl der Zerfällungen von  $n$  in einer bestimmten Form bedient man sich eines von Jacobi herrührenden und besonders durch Vahlen wieder in Gebrauch

gekommenen Symboles, dessen Anwendung am raschesten durch ein Beispiel zu erklären ist. Es bezeichnet

$$N(n = a_1 + a_2 + \cdots + a_s)$$

$$0 < a_1 < \cdots < a_s \leq m$$

die Anzahl der Zerfällungen von  $n$  in genau  $s$  voneinander verschiedene Summanden, die nicht größer als  $m$  sind. Ähnlich in anderen Fällen.

Der erste, der Methoden zur Behandlung der Aufgaben der additiven Zahlentheorie entwickelt hat, ist Euler. Die wichtigsten unter seinen zahlreichen diesbezüglichen Arbeiten sind: *Abh.* 158, *Comm. Petrop.* **13** (1741/43; 1751), S. 64—93 = *Op. omn.* ser. 1, **2**, S. 163—193; *Introductio* Kap. 16; *Abh.* 191, *Nov. Comm. Petrop.* **3** (1750/51; 1753), S. 125—169 = *Comm. arithm.* **1**, S. 73—101 = *Op. omn.* ser. 1, **2**, S. 254—294; *Abh.* 244, *Nov. Comm. Petrop.* **5** (1754/55; 1760), S. 75—83 = *Comm. arithm.* **1**, S. 231—238 = *Op. omn.* ser. 1, **2**, S. 390—398.

Euler benutzt das Hilfsmittel der erzeugenden Potenzreihen. In den von ihm behandelten Fällen gestattet die erzeugende Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$ , wo  $f(n)$  die zu bestimmende

Anzahlfunktion bedeutet, eine einfache Produktdarstellung, welche die Bedeutung von  $f(n)$  in Evidenz setzt. Bezeichnet z. B.  $q(n)$  für  $n \geq 1$  die Anzahl der Zerfällungen von  $n$  in beliebig viele voneinander verschiedene Summanden, und wird  $q(0) = 1$  gesetzt, so ist

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} q(n)x^n = \prod_{v=1}^{\infty} (1 + x^v),$$

ebenso ist, wenn  $p(n)$  die Anzahl der Zerfällungen von  $n$  in beliebig viele gleiche oder ungleiche Summanden bezeichnet (wieder sei  $p(0) = 1$ ),

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \frac{1}{\prod_{v=1}^{\infty} (1 - x^v)}.$$

Entwickelt man das Produkt

$$\prod_{v=1}^{\infty} (1 + x^v t)$$

in eine Potenzreihe nach  $x$  und  $t$ , so gibt der Koeffizient von  $x^n t^m$  die Anzahl der Zerfällungen von  $n$  in genau  $m$  voneinander

verschiedene Summanden. Diese Beispiele genügen, das Prinzip des Ansatzes zu erläutern. Durch einfache Kunstgriffe, die sich auf die Produktdarstellungen stützen, gelingt es Euler, Identitäten zwischen den verschiedenen erzeugenden Potenzreihen zu gewinnen; die Koeffizientenvergleichung führt dann zu Beziehungen zwischen den verschiedenen Anzahlfunktionen. Diese haben teils die Natur von Rekursionsformeln, die als Grundlage zur Berechnung von Tafeln der Werte der Anzahlfunktionen dienen können, teils sind es Gleichheiten zwischen den Anzahlen der Zerfällungen nach verschiedenen Typen, wofür als Beispiele die beiden Sätze genannt seien:

*Jede natürliche Zahl  $n$  läßt sich ebensooft in beliebig viele Summanden, die höchstens gleich  $m$  sind, zerfällen, wie sich die Zahl  $n + m$  in genau  $m$  unbeschränkte Summanden zerfällen läßt.*

*Jede natürliche Zahl läßt sich ebensooft in gleiche oder ungleiche ungerade Summanden zerfällen, wie sie sich in voneinander verschiedene beliebige Summanden zerfällen läßt.*

Mit Hilfe der gewonnenen Rekursionsformeln berechnete Euler (zweite und dritte der oben genannten Schriften) eine Tabelle für die Anzahl der Möglichkeiten,  $n$  aus den Zahlen  $1, 2, \dots, m$  als Summanden zusammenzusetzen, sowie für die oben mit  $p(n)$  bezeichnete Anzahlfunktion. Eine von MacMahon berechnete Fortsetzung der Tafel für  $p(n)$  bis zu  $n = 200$  sowie eine von Darling berechnete Tafel für  $q(n)$  bis zu  $n = 100$  findet sich *Lond. M. S. Proc.* (2) **17** (1918), S. 114—115 = *Collect. Pap. of Ramanujan* **1**, S. 308—309.

Die bedeutendste Leistung Eulers auf diesem Gebiet ist die Entdeckung der Identität

$$(3) \quad \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - x^{\nu}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} (-1)^{\lambda} x^{\frac{3\lambda^2 - \lambda}{2}},$$

anfangs nur auf induktivem Wege; später (in der letzten der oben genannten Arbeiten) gelang es ihm, sie äußerst scharfsinnig zu beweisen. Die Identität (3) ist eine spezielle Formel aus der Theorie der *elliptischen Thetafunktionen*, und zwar ist die auf der rechten Seite auftretende Reihe das *älteste* Beispiel einer Thetareihe. Die arithmetische Bedeutung der Identität, die erst von Legendre formuliert wurde (*Théorie* **2**, S. 132), heißt:

*Jede natürliche Zahl läßt sich ebensooft in eine gerade Anzahl von Summanden wie in eine ungerade Anzahl von Summanden*

zerlegen, außer wenn sie eine Pentagonalzahl  $\frac{3\lambda^2 - \lambda}{2}$  ist; dann schießt eine Zerfällung in eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Summanden über, je nachdem  $\lambda$  gerade oder ungerade ist. (Pentagonalzahlsatz.)

Durch Vahlen (*J. f. Math.* **112** (1893), S. 9—12) wurde dieser Satz entsprechend der Identität

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \prod_{\mu=1}^{\infty} (1 - x^{3\mu-2}z) (1 - x^{3\mu-1}z^{-1}) (1 - x^{3\mu}) \\
 &= \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - z^{r(\nu)}x^{\nu}) \\
 &= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} (-z)^{\lambda} x^{\frac{3\lambda^2 - \lambda}{2}},
 \end{aligned}$$

wo  $r(\nu)$  den absolut kleinsten Rest von  $\nu \pmod{3}$  bezeichnet, verschärft. Euler selbst folgerte aus (2) und (3) für die Anzahl  $p(n)$  die Rekursionsformel

$$(5) \quad p(n) = - \sum_{\substack{\lambda=-\infty \\ \lambda \neq 0}}^{\infty} (-1)^{\lambda} p\left(n - \frac{3\lambda^2 - \lambda}{2}\right)$$

sowie nach logarithmischer Differentiation von (3) eine ähnliche Formel für die Summe der Teiler von  $n$  (vgl. § 12, S. 1521).

Die Behandlung eines Problems der additiven Zahlentheorie mit Hilfe der Analysis nach dem Eulerschen Muster zerfällt in zwei Teile. Der erste besteht in der Darstellung der erzeugenden Funktion in einer Gestalt, welche die Bedeutung der Koeffizienten in Evidenz setzt, der zweite in der Anwendung analytischer Kunstgriffe, welche hernach zu Aussagen über die Koeffizienten führen. Der zweite Teil ist im allgemeinen der schwierigere und erfordert oft die Heranziehung tiefer funktionentheoretischer Hilfsmittel. Euler beschränkte sich auf solche Beispiele, wo er sozusagen durch algebraische Rechnungen zum Ziele gelangen konnte. Daher ist es nicht zu verwundern, daß sich sämtliche Ergebnisse Eulers auch ganz ohne Gebrauch der Analysis durch rein kombinatorische Betrachtungen gewinnen lassen. Das Beweisprinzip ist dabei die Herstellung umkehrbar eindeutiger Zuordnungen zwischen den Gesamtheiten der Zerfällungen nach verschiedenen Typen. Sylvester (*Phil. Mag.* (4) **5** (1853), S. 199 bis 202 = *Coll. Math. Papers* **1**, S. 595—598), der daselbst

Ferrers als Urheber des Gedankens nennt, bedient sich zur Veranschaulichung der Zuordnungen graphischer Schemata. Am weitesten in der systematischen Bestimmung der Zerfallungszahlen durch derartige Schlüsse geht Vahlen (*J. f. Math.* **112** (1893), S. 1—36). Besonders hervorgehoben zu werden verdient der wundervolle, auf einem genialen Zuordnungsprinzip beruhende Beweis Franklins (*C. R.* **92** (1881), S. 448—450) für den Pentagonalzahlensatz. Er gab für einige spätere Beweise ähnlicher Sätze das Vorbild ab. Obwohl die kombinatorischen Beweise, wenn sie fertig vorliegen, an Einfachheit kaum hinter den analytischen zurückstehen, haben sie den letzteren gegenüber den Nachteil, daß die Auffindung der passenden Gruppierungen und Kombinationen in jedem einzelnen Falle besonderes Geschick erfordert, während die Analysis gewissermaßen zwangsläufig zu den Resultaten hinführt. Der Analysis wohnt auch die Kraft inne, neue unbekannte Resultate zu entdecken, während die kombinatorischen Methoden im besten Falle schon bekannte oder wenigstens vermutete Resultate zu bestätigen vermögen.

Was bei der analytischen Behandlungsweise den „zweiten Teil“ betrifft, kann man drei Ziele unterscheiden: *Erstens* die Aufstellung von Identitäten zwischen verschiedenen erzeugenden Funktionen, die zu Identitäten zwischen den zu untersuchenden zahlentheoretischen Funktionen führen, *zweitens* die *genaue* Berechnung der Koeffizienten, welche die gesuchten Anzahlen liefern, *drittens* die angenäherte Berechnung dieser Koeffizienten. Zur Erreichung des ersten Zieles hat sich neben rein algebraisch-algorithmischen Umformungen insbesondere die Theorie der *elliptischen Funktionen und Modulfunktionen* (einschließlich der *Theta-funktionen*) als ergiebige Quelle gezeigt. Die Aufzählung von Einzelheiten würde hier zu weit führen, vgl. jedoch die Beispiele aus § 17. Zum *zweiten* Ziele, soweit es nicht einfach auf Ergebnissen des ersten ruht, ist eine größere Reihe von Arbeiten von Cayley und Sylvester (vgl. die Gesamtausgaben ihrer Schriften) zu erwähnen, die sich mit der expliziten Darstellung des Koeffizienten von  $x^n$  in der Potenzreihenentwicklung des Ausdrucks

$$\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\cdots(1-x^{a_s})},$$

d. i. der Lösungszahl der Diophantischen Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_sx_s = n$$



in nicht negativen ganzen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_s$  beschäftigen. Die entstehenden, aus Einheitswurzeln zusammengesetzten Ausdrücke sind natürlich sehr kompliziert. Der dritte Gesichtspunkt wurde erst seit 1916 in Angriff genommen, als Hardy und Ramanujan eine neue *funktionentheoretische Methode* erfanden, deren Entdeckung als bei weitem der größte Fortschritt bezeichnet werden muß, den die additive Zahlentheorie seit Euler machte.

Der Grundgedanke dieser Methode besteht in Folgendem:

Die erzeugende Potenzreihe  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$  der zu untersuchenden zahlentheoretischen Funktion  $f(n)$  ist in den betreffenden Fällen im Inneren des Einheitskreises konvergent, die Funktion  $F(x)$  aber über den Einheitskreis nicht fortsetzbar. Für  $f(n)$  wird die Cauchysche Integraldarstellung angesetzt

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(x)}{x^{n+1}} dx,$$

wobei das Integral um einen zum Einheitskreis konzentrischen Kreis erstreckt wird, dessen Radius von  $n$  abhängt und mit wachsendem  $n$  von unten gegen 1 strebt. Das Integral wird dann näherungsweise berechnet, indem  $F(x)$  in der Nähe derjenigen Einheitswurzeln, deren Grad unterhalb einer bestimmten von  $n$  abhängenden und zugleich mit  $n$  wachsenden Schranke liegt, durch einfachere Funktionen ersetzt wird, die sich bei Annäherung an diese Einheitswurzeln möglichst genau ebenso singulär verhalten wie  $F(x)$ , auf der übrigen Peripherie des Einheitskreises aber regulär sind. Die technische Durchführung in allen Einzelheiten ist außerordentlich mühsam; auch läßt sich bisher noch nicht einem Problem a priori ansehen, ob die Behandlung nach dieser Methode zum Erfolge führt oder nicht, aber in vielen Fällen, wo man die Schwierigkeiten der Fehlerabschätzungen noch nicht zu überwinden vermag, liefert die Methode heuristisch wertvolle Resultate. Ein vollständiges Verzeichnis der bis 1922 erschienenen Literatur zu der Methode findet man bei Hardy und Littlewood, *Acta Math.* **44** (1922), S. 1, 2.

Das erste nach dieser Methode behandelte Problem ist die Untersuchung des *asymptotischen Verhaltens der oben genannten Funktion  $p(n)$* . (Hardy und Ramanujan, *C. R.* **164** (1917), S. 35—38; *Lond. M. S. Proc.* (2) **17**, S. 75—115 = *Collect.*



*papers of Ramanujan*, S. 239—241 und 276—309.) Mit einfacheren Hilfsmitteln wird zunächst die asymptotische Formel

$$(6) \quad p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}$$

gewonnen; durch die Methode wird sodann das viel schärfere Resultat

$$(7) \quad p(n) = \sum_{q=1}^{\nu} A_q(n) \frac{V_q}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left( \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{q} \sqrt{n - \frac{1}{24}}}}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right) + O(n^{-\frac{1}{4}})$$

erreicht. Hier bedeuten die  $A_q(n)$  kompliziert aus Einheitswurzeln zusammengesetzte Ausdrücke mit reellem Zahlenwert, und es ist  $\nu = [\alpha\sqrt{n}]$ , unter  $\alpha$  irgendeine positive Konstante verstanden. Wegen der Kleinheit des Fehlergliedes läßt sich die Formel für große  $n$  zur *genauen* Berechnung von  $p(n)$  gebrauchen. Die Autoren teilen in ihrer Abhandlung ferner die Resultate einiger weiterer Anwendungen der Methode mit. Die schwächste der a. a. O. vorkommenden Näherungen

$$(8) \quad \log p(n) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}n},$$

zu deren Beweis Hardy und Ramanujan die immerhin noch recht schwierigen „Tauberian theorems“ brauchten, sowie analoge Formeln für verwandte Funktionen wurden auf *sehr elementarem* Wege von Knopp und I. Schur bewiesen (Knopp und Schur, *Math. Zeitschr.* **24** (1925), S. 559—574; Knopp, *Schriften d. Königsberger gelehrten Ges.* **2** (1925), S. 45—74).

Der zweite mit der Methode behandelte Gegenstand ist das sogenannte *Waringsche Problem*. Waring sprach die beiden Behauptungen aus (*Meditationes algebraicae*, Cambridge 1770, S. 204—205; 3. Aufl. 1782, S. 349—350), daß sich jede natürliche Zahl  $n$  in eine feste, d. h. nur von  $k$ , nicht von  $n$  abhängende, Anzahl nicht negativer  $k$ -ter Potenzen ganzer Zahlen zerfallen lasse, ebenso in eine feste Anzahl von Werten eines ganzzahligen primitiven Polynoms in einer Variablen. Nachdem vorher der Beweis des ersten Satzes nur für spezielle Exponenten  $k$  gelungen war, erbrachte Hilbert im Jahre 1909 (*Gött. Nachr.* 1909, S. 17—36; *Math. Ann.* **67** (1909), S. 281 bis 300) den ersten allgemeinen Beweis, der dann von verschiedenen Seiten vereinfacht wurde. (Hausdorff, *Math. Ann.* **67** (1909), S. 301—305; Stridsberg, *Math. Ann.* **72** (1912),

S. 145—152; Remak, *ibid.* S. 153—156; Frobenius, *Berl. Sitzber.* 1912, S. 666—670.) Kamke fügte einen mit der Hilbertschen Methode geführten Beweis auch für die *zweite* (natürlich präziser formulierte) Behauptung Warings hinzu (*Math. Ann.* **83** (1921), S. 85—112). Seit 1920 haben Hardy und Littlewood in vier ausführlichen Abhandlungen *Some problems of partitio numerorum I, II, IV, VI* (*Gött. Nachr.* 1920, S. 33—54; *Math. Zeitschr.* **9** (1921), S. 14—27; **12** (1922), S. 161—188; **23** (1925), S. 1—37) die oben geschilderte Methode auf die weitergehende Aufgabe angewandt, die Anzahl  $r_{k,s}(n)$  der Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$(9) \quad x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k = n$$

asymptotisch zu untersuchen. Damit gelang nicht nur ein neuer Beweis des Waring-Hilbertschen Satzes, sondern es wurde auch möglich, der Wahrheit sehr nahe kommende Abschätzungen für das *kleinste*  $s$  zu geben, für das bei einem gegebenen  $k$  die Gleichung (9) für *alle großen*  $n$  lösbar ist. Beiträge zu diesen Untersuchungen lieferten außerdem Landau (*Gött. Nachr.* 1921, S. 88—92; *Math. Zeitschr.* **12** (1922), S. 219—247, hier auch Anwendung auf den Kamkeschen Satz; *Lond. M. S. Proc.* (2) **25** (1925), S. 484—486, *Lond. M. S. Journ.* **1** (1925/26), S. 72—74), Ostrowski (*Math. Zeitschr.* **9** (1921), S. 28—34), Weyl (*Gött. Nachr.* 1921, S. 189—192). Eine zusammenfassende Darstellung des gegenwärtig Erreichten gibt Landau, *Vorles.* **1**, S. 235—339. Die Hauptresultate sind daselbst S. 237—241 übersichtlich zusammengestellt.

Auf einem ganz neuen Wege versuchte Winogradoff (*Rec. math. Soc. math. de Moscou* **31** (1924), S. 490—507) das Waringsche Problem anzugreifen. Landau (*Acta math.* **48** (1925), S. 217—253; erneute Darstellung in *Vorles.* **1**, S. 340—360) arbeitete Winogradoffs Methode aus und fügte eine Abschätzung des kleinsten  $s$  hinzu, bei dem (9) für *alle*  $n \geq 0$  lösbar ist; eine solche liefert die Hardy-Littlewoodsche Methode nicht, die Winogradoffsche sagt dafür aber nichts über die Größenordnung der Anzahl  $r_{k,s}(n)$  aus.

Die dritte Anwendung der neuen Methode betrifft den sogenannten *Goldbachschen Satz*. Mit diesem Namen bezeichnet man die von Goldbach an Euler (*Corresp. Math. et Phys. de célèbres géomètres du 18. siècle* (1843), **1**, S. 127 u. 135, Briefe aus d. Juni 1742) mitgeteilte Behauptung: *Jede gerade natürliche Zahl außer 2 ist Summe zweier Primzahlen*. Schon vorher

hatte Descartes (*Oeuvres* **10**, S. 298) behauptet, jede Zahl sei Summe von 1, 2 oder 3 Primzahlen. Bis zur Entdeckung der Hardy-Ramanujan-Littlewoodschen Methode war es trotz energischen Versuchen (Sylvester, *Lond. M. S. Proc.* **4** (1871—1873), S. 4—6 = *Coll. Math. Pap.* **2**, S. 709—711; *Nature* **55** (1896/97), S. 196—197 u. 269 = *Coll. Math. Pap.* **4**, S. 734—737; Stäckel, *Gött. Nachr.* 1896, S. 292—299; Landau, *ibid.* 1900, S. 177 bis 186; Stäckel, *Sitzber. Heidelb. Akad. d. Wiss.* 1917, Abh. 15; 1918, Abh. 2 u. 14; *Abhandl. d. Heidelb. Akad. d. Wiss.* 1922, Abh. 10) nicht gelungen, über vage Vermutungen hinauszukommen. 1923 gelang es Hardy und Littlewood (*Acta Math.* **44** (1922), S. 1—70), wenn nicht den Goldbachschen Satz, so doch folgendes zu beweisen:

*Wenn es wahr ist, daß die obere Grenze der Realteile der Nullstellen sämtlicher Dirichletscher  $L$ -Reihen (vgl. § 13, S. 1527) kleiner als  $\frac{3}{4}$  ist, ist jede große ungerade Zahl Summe von drei ungeraden Primzahlen. Ist ferner  $N(n)$  die Anzahl der Lösungen von  $n = p + p' + p''$  ( $p, p', p''$  ungerade Primzahlen), so ist für ungerades  $n$*

$$(10) \quad N(n) \sim \frac{2 \log(n)}{n^2} \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right).$$

Hardy und Littlewood beweisen unter der gleichen, der Riemannschen Vermutung (siehe S. 1528) ähnlichen, unbewiesenen Annahme über die  $L$ -Reihen eine Reihe ähnlicher Sätze. Außerdem geben die Verfasser (meist ohne Beweis) eine Fülle heuristischer asymptotischer Abschätzungen für verwandte Probleme, wie z. B. für die Zerfällung in Kubus + Primzahl oder die unterhalb einer vorgegebenen Grenze gelegene Anzahl von Primzahlen bestimmter Formen, wie  $m^2 + 1$ ,  $am^2 + bm + c$  und ähnliche. Insbesondere machen sie es wahrscheinlich, daß die Anzahl  $\nu(n)$  der Zerlegungen von  $n$  in zwei Primzahlen für gerades  $n$  folgendes asymptotische Verhalten hat:

$$(11) \quad \nu(n) \sim \frac{(\log n)^2}{2n} \prod_p \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p|n} \frac{p-1}{p-2}.$$

In einer späteren Arbeit (*Lond. M. S. Proc.* (2) **22** (1924), S. 46—56) wird gezeigt, daß unter derselben Annahme über die  $L$ -Reihen „fast alle“ geraden Zahlen als Summe zweier Primzahlen darstellbar sind.

Landau (*Pal. circ. mat.* **46** (1922), S. 349—356) vereinfachte einen Hauptpunkt des Beweises und gab in seinen Vor-

lesungen **1**, S. 183—234 eine zusammenhängende Darstellung der Hauptergebnisse der beiden Hardy-Littlewoodschen Arbeiten. Vgl. auch Rademacher, *Abh. Math. Sem. Hamburg* **3** (1924), S. 111 und *Math. Zeitschr.* **25** (1926), S. 627—657.

Zum Goldbachschen Satz liegt umfangreiches empirisches Material vor. Am vollständigsten ist die Tabelle von R. Haußner (*Nova Acta Leop. Carol.* **72** (1899), S. 1—214), die für alle geraden Zahlen bis zu 3000 sämtliche Goldbachzerlegungen auführt, für alle geraden Zahlen bis zu 5000 die Anzahl der Zerlegungen. Für spezielle Formen gerader Zahlen ist die Zerlegbarkeit inzwischen bis zu viel größeren Zahlen bestätigt (vgl. z. B. Cunningham, *Mess. of Math.* **36** (1906), S. 17—30).

Als bemerkenswerte Einzelheiten aus der additiven Zahlentheorie sei noch erwähnt: I. Schur (*Berl. Sitzber.* 1917, S. 302 bis 321) entdeckte einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen Zerfällungen in Summanden  $\equiv \pm 1 \pmod{5}$  bzw.  $\equiv \pm 2 \pmod{5}$  und Zerfällungen mit der Minimaldifferenz 2 der Summanden<sup>1)</sup>, weiter (*ibid.* 1926, S. 488—495) zwischen den Zerfällungen in Summanden  $\equiv \pm 1 \pmod{6}$  und Zerfällungen mit der Minimaldifferenz 3 bzw. 6 der Summanden, und verallgemeinerte das letzte Resultat auf Summanden  $\equiv \pm \alpha \pmod{k}$  einerseits und solche  $\equiv \pm \alpha$  oder  $\equiv 0 \pmod{k}$  und mit der Minimaldifferenz  $k$  bzw.  $2k$  andererseits. Vgl. hierzu auch Gleißberg, *Math. Zeitschr.* **28** (1928), S. 372—382. Ramanujan fand auf empirischem Wege das Theorem: Ist  $m = 5^\alpha 7^\beta 11^\gamma$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \dots$ ) und  $24l \equiv 1 \pmod{m}$ ,  $1 \leq l < m$ , so ist für  $n \equiv l \pmod{m}$  stets  $p(n) \equiv 0 \pmod{m}$ . Von diesem Satz sind bisher erst wenige Spezialfälle (nämlich  $0 \leq \alpha \leq 2$ ,  $0 \leq \beta \leq 2$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$ ) bewiesen worden. Siehe Ramanujan (*Cambridge Phil. S. Proc.* **19** (1919), S. 207—210 = *Coll. Papers* **1**, S. 210—213), Darling (*ibid.* S. 217—218 und *Lond. M. S. Proc.* (2) **19** (1921), S. 350—372), Ramanujan (*Math. Zeitschr.* **9** (1921), S. 147 bis 153 = *Coll. Papers* **1**, S. 232—238), Mordell (*Lond. M. S. Proc.* (2) **20** (1922), S. 408—416).

1) Die entscheidenden Identitäten der Schurschen Arbeit waren ohne Beweis schon mehrfach unabhängig früher gefunden worden, und MacMahon (*Combinatory Analysis* **2** (Cambr. Univ. Press), 1916, S. 33ff.) hat sie auch zahlentheoretisch gedeutet. Doch reicht hier der Raum nicht, die Geschichte der Angelegenheit darzustellen.

# § 17. Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Quadraten.

Die Frage nach der Darstellbarkeit einer natürlichen Zahl als Summe von zwei, drei, vier Quadratzahlen gehört zu den ältesten der Zahlentheorie und war für ihre historische Entwicklung von der größten Bedeutung. Der Kürze halber sei eine Quadratzahl (einschließlich Null) mit  $\square$  und eine Summe von  $s$  Quadratzahlen bzw. die Darstellung einer Zahl als Summe von  $s$  Quadratzahlen mit  $\boxed{s}$  bezeichnet. Die Anzahl der Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 = n \quad (n > 0 \text{ ganz})$$

in ganzen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_s$  heiße  $r_s(n)$ . Dann besteht die Aufgabe darin, für gegebenes  $s$  die zahlentheoretische Funktion  $r_s(n)$  zu untersuchen, insbesondere festzustellen, für welche  $n$  sie *positive* Werte annimmt, und Beziehungen von  $r_s(n)$  zu anderen zahlentheoretischen Funktionen aufzudecken.

Im Falle  $n = 2$  seien neben  $r_2(n)$ , wofür der Kürze halber  $r(n)$  geschrieben werde, noch folgende zahlentheoretischen Funktionen betrachtet:  $r^*(n)$ , die Anzahl der *primitiven* Lösungen von

$$(2) \quad x^2 + y^2 = n,$$

d. h. derjenigen, welche die Nebenbedingung  $(x, y) = 1$  erfüllen, ferner  $A(n)$ , die Anzahl der *Zerfällungen* von  $n$  in zwei Quadrate, d. h. die Anzahl der Lösungen von (2) mit der Nebenbedingung  $0 \leq x \leq y$ ,  $A^*(n)$ , die der Zerfällungen in zwei teilerfremde Quadrate,  $B(n)$ , die der Zerfällungen in zwei positive Quadrate,  $B^*(n)$ , die der Zerfällungen in zwei positive teilerfremde Quadrate. Diese Funktionen lassen sich in folgender Weise auf  $r(n)$  bzw.  $r^*(n)$  zurückführen:

$$(3) \quad A(n) = \begin{cases} \frac{r(n)}{8}, & \text{wenn } n \neq \square \text{ und } n \neq 2\square \\ \frac{r(n) + 4}{8}, & \text{wenn } n = \square \text{ oder } n = 2\square \end{cases}$$

$$(4) \quad B(n) = \begin{cases} \frac{r(n)}{8}, & \text{wenn } n \neq \square \text{ und } n \neq 2\square \\ \frac{r(n) - 4}{8}, & \text{wenn } n = 2\square \\ \frac{r(n) + 4}{8}, & \text{wenn } n = \square \end{cases}$$



$$(5) \quad A^*(n) = \begin{cases} \frac{r^*(n)}{8}, & \text{wenn } n \neq 1 \text{ und } n \neq 2 \\ \frac{r^*(n)}{4} = 1, & \text{wenn } n = 1 \text{ oder } n = 2 \end{cases}$$

$$(6) \quad B^*(n) = \begin{cases} \frac{r^*(n)}{8}, & \text{wenn } n \neq 1 \text{ und } n \neq 2 \\ \frac{r^*(n) - 4}{4} = 0, & \text{wenn } n = 1 \\ \frac{r^*(n)}{4} = 1, & \text{wenn } n = 2. \end{cases}$$

$r(n)$  und  $r^*(n)$  selbst bestimmen sich aus der Primzahlzerlegung von  $n$ :

Es sei  $n = 2^\alpha q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_k^{\beta_k} p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_l^{\gamma_l}$ , wo  $q_1, q_2, \dots, q_k$  voneinander verschiedene Primzahlen bedeuten, die  $\equiv 3 \pmod{4}$  sind,  $p_1, p_2, \dots, p_l$  voneinander verschiedene Primzahlen, die  $\equiv 1 \pmod{4}$  sind; während die Exponenten  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  nicht negative ganze Zahlen sein sollen. Dann ist

$$(7) \quad r(n) = 4 \cdot \frac{1 + (-1)^{\beta_1}}{2} \cdot \frac{1 + (-1)^{\beta_2}}{2} \cdots \frac{1 + (-1)^{\beta_k}}{2} \cdot (1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2) \cdots (1 + \gamma_l),$$

d. h.

$$(8) \quad r(n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn einer der Exponenten } \beta_x \text{ ungerade} \\ 4(1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2) \cdots (1 + \gamma_l), & \text{wenn alle Exponenten } \beta_x \text{ gerade} \end{cases}$$

und

$$(9) \quad r^*(n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \alpha \geq 2 \text{ oder einer der Exponenten } \beta_x \neq 0 \\ 2^{\alpha+2}, & \text{wenn } \alpha < 2 \text{ und alle Exponenten } \beta_x \text{ gleich Null.} \end{cases}$$

Die Formel (7) läßt sich noch in eine andere Gestalt setzen, indem man den vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter  $\pmod{4}$  einführt, dessen Definition lautet:

$$\chi(a) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{a-1}{2}} = \left(\frac{-1}{a}\right), & \text{wenn } a \text{ ungerade} \end{cases}$$

(vgl. § 14, S. 1530). Dann wird nämlich

$$(10) \quad r(n) = 4 \sum_{d|n} \chi(d),$$



in Worten:  $r(n)$  ist gleich dem vierfachen Überschuß der Anzahl derjenigen Teiler von  $n$ , die  $\equiv 1 \pmod{4}$  sind, über die Anzahl derjenigen, die  $\equiv 3 \pmod{4}$  sind. Insbesondere sind die Spezialfälle hervorzuheben: Keine Primzahl der Form  $4\nu + 3$  ist  $\boxed{2}$ . Keine natürliche Zahl, in der eine Primzahl der Form  $4\nu + 3$  in ungerader Potenz aufgeht, ist  $\boxed{2}$ . Jede Primzahl der Form  $4\nu + 1$  ist auf eine und nur eine Weise als  $\boxed{2}$  zerfallbar.

Die Zahlen  $n$ , für die  $A(n) > 0$  ausfällt, wurden schon von Girard richtig angegeben (in *L'arithmétique de Simon Stevin par A. Girard*, Leide 1625, S. 622 und *Œuvres mathématiques de Simon Stevin par A. Girard*, Leyde (Elsevier) 1634, S. 156, col. I, abgedruckt *Bibl. Math.* (3) **2**, S. 358—359). Fermat erkannte als Fundament der Theorie den „Girardschen Satz“, daß jede Primzahl der Form  $4\nu + 1$  als Summe zweier positiver (eo ipso teilerfremder) Quadratzahlen darstellbar ist, und bewies ihn mit der sogenannten Methode der *descente indéfinie*, veröffentlichte aber seinen Beweis nicht. Die Methode der *descente* besteht (auf den vorliegenden Fall spezialisiert) darin, aus der Annahme, es gäbe eine Primzahl  $4\nu + 1$ , die nicht  $\boxed{2}$  wäre, eine zweite herzuleiten, die kleiner ist als die erste und auch nicht  $\boxed{2}$ . Durch Wiederholung des Verfahrens ergäbe sich eine Kette fortgesetzt abnehmender Primzahlen der Form  $4\nu + 1$ , die nicht  $\boxed{2}$  sind. Da diese Kette schließlich bei  $5 = 1^2 + 2^2$  enden müßte, entsteht ein Widerspruch und die gemachte Annahme ist falsch. Ferner gab Fermat in Worten den Inhalt der aus (4) und (8) folgenden Formel für  $B(n)$  an, siehe *Œuvres* **1**, S. 293—297, **2**, S. 221, **2**, S. 432. Die ersten vollständigen Beweise veröffentlichte Euler (Abh. 228, *Nov. Comm. Petrop.* **4** (1752/53; 1758), S. 3—40 = *Comm. arithm.* **1**, S. 155—173 = *Op. omn.* ser. 1, **2**, S. 295—327; Abh. 241, *Nov. Comm. Petrop.* **5** (1754/55; 1760), S. 3—13 = *Comm. arithm.* **1**, S. 210—215 = *Op. omn.* ser. 1, **2** S. 328—337). Die Fassung (10) der Anzahlbestimmung geht im Wesentlichen auf Jacobi zurück, der auf sie durch Koeffizientenvergleichen in einer aus der Theorie der elliptischen Funktionen gewonnenen Identität geführt wurde, sie dann aber auch arithmetisch bewies (*J. f. Math.* **12** (1834), S. 167—169 = *Werke* **6**, S. 245—247). An Stelle der von Jacobi benutzten Identität lassen sich auch andere verwenden; siehe z. B. die Darstellung bei Hurwitz-Courant, *Funktionentheorie*, 2. Aufl. Berlin (Springer) 1925, S. 212—214.

Bei den elementaren Beweisen ist ein Haupthilfsmittel die Identität

$$(11) \quad (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1 y_1 \pm x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 \mp x_2 y_1)^2,$$

nach der das Produkt zweier  $\boxed{2}$  selbst eine  $\boxed{2}$  ist. Es gelang Euler, diese Tatsache in folgendem Sinne umzukehren:

*Wenn die natürliche Zahl  $m$  Teiler einer Summe zweier teilerfremder Quadrate ist, so ist sie selbst Summe zweier teilerfremder Quadrate.*

Da  $-1$  quadratischer Rest von jeder Primzahl  $p$  der Form  $4\nu + 1$  ist (siehe § 8, S. 1500), folgt, daß  $p$  als Teiler eines Ausdrucks  $x^2 + 1$  selbst Summe zweier teilerfremder Quadrate ist, d. h. der Girardsche Satz. Mittels (11) kann man nun auf zusammengesetzte Zahlen weiter schließen. Die Beweise des Eulerschen Lemmas beruhen auf einem Reduktionsverfahren, das äußerlich in sehr verschiedener Gestalt auftreten kann — wiederholte Divisionen mit Rest, Kettenbruchentwicklung, Reduktion binärer quadratischer Formen der Diskriminante  $-4$  (siehe unten S. 1561) —, aber stets von den *Größenbeziehungen* der ganzen Zahlen wesentlichen Gebrauch macht. Bei einigen Beweisanordnungen für den Girardschen Satz wird das Lemma nicht explizit formuliert, sondern es wird der Beweis der Tatsache  $\left(\frac{-1}{p}\right) = +1$  für  $p \equiv 1 \pmod{4}$  und die Reduktion mit einem Schlage durchgeführt, so z. B. in dem besonders eleganten Beweis von Smith (*J. f. Math.* **50** (1855), S. 91–92 = *Coll. Math. Papers* **1**, S. 33–34). Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die beiden wesentlichen Elemente der elementaren Beweisanordnungen, nämlich erstens „die darzustellende Zahl ist Teiler einer  $\boxed{2}$ “, zweitens: ein Reduktionsverfahren, um von der Kongruenz zur Gleichheit überzugehen, in jedem der arithmetischen Beweise der fraglichen Sätze, wenn auch manchmal verhüllt, wiederzufinden sind. — Neuere Darstellungen der elementaren Beweisanordnungen findet man z. B. bei Wertheim, *Anfangsgründe*, S. 189–195; Bachmann, *Additive Z.*, S. 304–309; Landau, *Vorles.* **1**, S. 101–105.

Die vom heutigen Standpunkt einfachste und durchsichtigste Begründungsart der Sätze über  $\boxed{2}$  stützt sich auf die Theorie der sogenannten *Gaußschen ganzen komplexen Zahlen*, d. h. der Zahlen  $a + bi$ , wo  $a$  und  $b$  gewöhnliche ganze Zahlen sind, während  $i$  die imaginäre Einheit bedeutet. Ist  $\alpha = a + bi$  und  $\bar{\alpha}$  die zu  $a + bi$  konjugierte Zahl  $a - bi$ , so bezeichnet man das Produkt  $\alpha \bar{\alpha} = a^2 + b^2$  als *Norm* der Zahl  $a + bi$ . Hiernach ist die Darstellung einer ganzen rationalen Zahl als Summe zweier ganzer

rationaler Quadrate gleichbedeutend mit ihrer Darstellung als Norm einer ganzen komplexen Zahl, d. h. also als *Produkt* zweier konjugierter ganzer komplexer Zahlen; damit ist die zu untersuchende *additive* Frage zurückgeführt auf eine *multiplikative* innerhalb des von den ganzen komplexen Zahlen gebildeten Integritätsbereiches  $\Gamma(i)$ . In diesem Bereich gilt aber, wie zuerst Gauß (*Werke* 2, S. 102—109, S. 171—178) gezeigt hat, der Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in unzerlegbare Faktoren (komplexe Primzahlen). Aus ihm und der Übersicht über die sämtlichen komplexen Primzahlen aus  $\Gamma(i)$  folgen die obigen Resultate fast mühelos. Die Theorie des Bereiches  $\Gamma(i)$  ist in Lehrbüchern oft dargestellt worden, siehe z. B. Dirichlet-Dedekind, 4. Aufl., S. 434—450; Landau, *Vorles.* 3, S. 5—15.

Die Formel (10) gewinnt in diesem Zusammenhange folgende Deutung: Da in  $\Gamma(i)$  jedes Ideal Hauptideal ist und genau vier Einheiten vorhanden sind, wird  $\frac{r(n)}{4}$  gleich der Anzahl der Ideale  $\alpha$  aus  $\Gamma(i)$ , deren Norm  $N\alpha$  den Wert  $n$  hat. Daraus folgt für  $\Re(s) > 1$  (vgl. § 13)

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} = \sum_{\alpha} \frac{1}{(N\alpha)^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{(Np)^s}},$$

wo  $\alpha$  alle von (0) verschiedenen Hauptideale und  $p$  alle von (0) und (1) verschiedenen Primideale von  $\Gamma(i)$  durchläuft. Mit Rücksicht auf das Gesetz für die Zerlegung der rationalen Primzahlen in komplexe Primfaktoren, aus dem ein entsprechendes Gesetz für die Ideale des Ringes  $\Gamma(i)$  folgt, wird das letzte Produkt gleich

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \cdot \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \zeta(s) L(s, \chi).$$

Nunmehr ergibt sich (10) aus der Identität

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

durch Anwendung der Formeln (6), (7) aus § 9, S. 1516.

Eine weitere Beweismethode besteht darin, die allgemeine arithmetische Theorie der *binären quadratischen Formen*

$ax^2 + bxy + cy^2$  ( $a, b, c$  feste,  $x, y$  unbestimmte ganze Zahlen)

voranzustellen und die Sätze über [2] zu folgern, indem man die Sätze über die Darstellung einer gegebenen ganzen Zahl durch eine gegebene binäre Form auf die spezielle Form  $x^2 + y^2$  anwendet. Vgl. darüber unten S. 1559.

Einige der Ergebnisse lassen sich auch aus gewissen Sätzen der *Kreisteilungslehre* folgern. Ist  $p$  eine Primzahl der Form  $4\nu + 1$ , so liefert diese Methode sogar explizite Ausdrücke für die Werte  $x, y$ , die  $x^2 + y^2 = p$  lösen. Vgl. z. B. die Darstellung bei Bachmann, *Kreistheilung*, S. 122–133 und die dort gegebenen Zitate, siehe auch Jacobsthal, *J. f. Math.* **132** (1907), S. 238–245. — Mit Hilfe der kombinatorischen Betrachtungen der additiven Zahlentheorie (siehe oben § 16, S. 1543) begründete Vahlen (*J. f. Math.* **112** (1893), S. 19–27; vgl. auch Bachmann, *Additive Z.*, S. 309–319) die Hauptsätze; trotz ihrem elementaren Charakter ist diese Art der Herleitung recht umständlich.

Eine Tafel der Lösungen von  $x^2 + y^2 = p$  für die Primzahlen  $p \equiv 1 \pmod{4}$  bis zu 100 000 veröffentlichte Cunningham, *Quadratic partitions*, London (Fr. Hodgson) 1904, (Errata *Mess. of Math.* **34** (1904/05), S. 132).

Euler (Abh. 228, *Nov. Comm. Petrop.* **4** (1752/53; 1758), S. 32–40 = *Comm. arithm.* **1**, S. 167–173 = *Op. om.* ser. 1, **2**, S. 318–327) wandte die Theorie an, um große ungerade Zahlen der Form  $4\nu + 1$  auf ihren Primzahlearakter zu prüfen; für die natürlichen Zahlen  $n \equiv 1 \pmod{4}$  gelten nämlich die Sätze:

1. Ist  $n$  auf keine Weise als [2] darstellbar, so ist  $n$  nicht Primzahl, sondern durch mindestens eine Primzahl der Form  $4\nu + 3$  teilbar.

2. Ist  $n$  auf genau eine Weise als [2] darstellbar und sind die in der Darstellung auftretenden Quadrate teilerfremd, so ist  $n$  Primzahl.

3. Ist  $n$  genau auf eine Weise als [2] darstellbar, aber haben die in der Darstellung auftretenden Quadrate einen gemeinsamen Teiler, oder ist  $n$  auf mehr als eine Weise als [2] darstellbar, so lassen sich aus den Darstellungen durch rationale Rechnungen echte Teiler von  $n$  finden.

Die Darstellungen als [2] sind an Hand einer Tafel der Quadratzahlen sehr leicht aufzufinden. Euler zeigte, wie sich diese Operation durch besonders übersichtliche Anordnung auf

eine Folge einfacher Additionen zurückführen läßt, und kürzte in einer späteren Abhandlung das Verfahren dadurch ab, daß er aus der vorgelegten Zahl Kongruenzbedingungen für die als Summanden in Frage kommenden Quadratzahlen aufstellte, um so die Zahl der auszuführenden Versuche zu verringern. Auch ermittelte er eine Reihe anderer binärer quadratischer Formen  $ax^2 + by^2$  mit der Eigenschaft, daß den Sätzen 1. bis 3. analoge Sätze gelten, und nutzte sie zur Prüfung auf Primzahlcharakter aus. Indessen haben diese Verfahren heute einen Teil der hohen praktischen Bedeutung, die sie zu Eulers Zeit, in der es noch keine weit reichenden Primzahltafeln gab, besaßen, eingebüßt; denn für Zahlen, die jenseits der Grenzen der Lehmerschen Primzahltafel (siehe § 13, S. 1524) liegen, wird selbst bei diesen Verfahren die Rechenarbeit zu groß, während andere neuere Verfahren mitunter noch zum Ziele führen (vgl. § 13, S. 1525).

Die Theorie der Darstellbarkeit als  $\boxed{4}$  weist in methodischer Hinsicht große Analogien zu der Theorie der Darstellbarkeit als  $\boxed{2}$  auf. Der Hauptsatz, der vielleicht Diophantos bekannt war, aber zum ersten Male bei Bachet de Méziriac in seiner Diophantausgabe von 1621 S. 241—242 klar ausgesprochen wurde, heißt:

*Jede natürliche Zahl ist als  $\boxed{4}$  darstellbar.*

Fermat bewies diesen Satz mittels seiner Methode der descente indéfinie, veröffentlichte aber wiederum seinen Beweis nicht. Der erste veröffentlichte Beweis stammt von Lagrange (*Nouv. mém. de l'Acad. Roy. des sciences de Berlin* (1770/72), S. 123—133 = *Œuvres* **3**, S. 189—201), stützt sich aber, wie Lagrange auch hervorhebt, in wesentlichen Punkten auf Vorarbeiten Eulers. Euler gab sodann eine erheblich vereinfachte Darstellung des Lagrangeschen Beweises. (Abh. 445, *Nova acta Erudit.* 1773, S. 193—211 = *Acta Petrop.* 1777 II (1780), S. 48—69 = *Comm. arithm.* **1**, S. 538—548 = *Op. omn.* ser. 1, **3**, S. 218—239.) Die beste moderne Darstellung des Euler-Lagrangeschen Beweises findet man bei Landau, *Vorles.* **1**, S. 107—109.

Die Grundlage dieses Beweises ist die von Euler (Abh. 242, *Novi Comm. Petrop.* **5** (1754/55; 1760), S. 54 = *Comm. arithm.* **1**, S. 231 = *Op. omn.* ser. 1, **2**, S. 369) entdeckte algebraische Identität



$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \\ & = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 \\ & + (x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 \\ & + (x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4)^2 \\ & + (x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2. \end{aligned} \right.$$

Ebenso wie sich die Identität (11) in der Sprache der komplexen Zahlen aussprechen läßt: „Die Norm eines Produktes zweier komplexer Zahlen ist gleich dem Produkt der Normen der Faktoren“, läßt sich die Identität (12) in der Sprache der *Quaternionen* aussprechen: „Die Norm eines Produktes zweier Quaternionen ist gleich dem Produkt der Normen der beiden Quaternionen“. Durch Einführung der Quaternionen mit ganzzahligen Koeffizienten wird die Aufgabe der Darstellung als  $\boxed{4}$ , d. h. als Norm einer Quaternion mit ganzen Koeffizienten, in eine *multiplikative* verwandelt, wobei es sich freilich um eine nicht kommutative Multiplikation handelt. Vgl. Hurwitz, *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*, Berlin (Springer) 1919, insbes. Vorles. 11. Eine Ausdehnung und Vertiefung haben die dort entwickelten Gedanken erfahren in dem Buch: L. E. Dickson, *Algebra's and their arithmetics*, Chicago (Univ. Press) 1923, *deutsche Ausgabe* besorgt von A. Speiser, Zürich und Leipzig (Orell Füssli) 1927. Von  $\boxed{4}$  handelt in diesem Buche insbesondere § 100 (für  $\tau = -1$ ). Im übrigen verläuft der Euler-Lagrangesche Beweis des Bachetschen Satzes ganz analog dem Eulerschen des Girardschen Satzes. Wieder treten als Hauptbestandteile die Lösbarkeit der Kongruenz

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

und ein Reduktionsverfahren auf.

Die Anzahl  $r_4(n)$  bestimmte Jacobi (*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, Regiomonti 1829, S. 188 = *Ges. Werke* **1**, S. 239) durch Koeffizientenvergleichung in der für  $|q| < 1$  gültigen Identität

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \right)^4 = 1 + 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1 + (-q)^m} \\ & = 1 + 8 \sum_{u=1,3,5,\dots} \sigma_1(u) \{ q^u + 3q^{2u} + 3q^{4u} + 3q^{8u} + \dots \}. \end{aligned} \right.$$



Hier bezeichnet, wie in § 12,  $\sigma_1(u)$  die Summe der Teiler von  $u$ . Das Ergebnis lautet, wenn  $n = 2^\alpha u$  ( $\alpha \geq 0$ ,  $u$  ungerade) gesetzt wird,

$$(14) \quad r_4(n) = \begin{cases} 8\sigma_1(u), & \text{wenn } \alpha = 0 \\ 24\sigma_1(u), & \text{wenn } \alpha > 0. \end{cases}$$

Einen Beweis einer mit (13) gleichwertigen Identität mittels elliptischer Funktionen findet man z. B. bei Hurwitz-Courant, *l. c.* S. 207–268. Später gaben Jacobi (*J. f. Math.* **12** (1834), S. 167–172 = *Werke* **6** (1891), S. 245–251) und Dirichlet (*J. de Math.* (2) **1** (1856), S. 210–214 = *Werke* **2** (1897), S. 201–208) rein arithmetische Beweise der Formel (14). Siehe auch die Darstellung bei Bachmann, *Additive Z.* S. 348–358 und Landau, *Vorles.* **1**, S. 110–113.

Neben  $r_4(n)$  sind auch die Lösungszahlen der Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n$  mit der Nebenbedingung, daß alle  $x_i$  oder eine vorgeschriebene Anzahl unter ihnen gerade oder ungerade sein sollen, vielfach untersucht worden, ferner Beziehungen zwischen den einzelnen Lösungen der Gleichungen  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n$  mit oder ohne Nebenbedingungen für verschiedene Werte von  $n$ . Vgl. z. B. Glaisher, *Quart. J.* **36** (1905), S. 305–358, **37** (1906), S. 36–48, **38** (1907), S. 8–9; Mordell, *Mess. of Math.* **47** (1918), S. 142–144.

Über die Darstellung als  $\boxed{3}$  gelten die Sätze:

Eine natürliche Zahl ist dann und nur dann als  $\boxed{3}$  darstellbar, wenn sie nicht die Form  $4^\alpha(8\nu + 7)$  hat. Wenn eine natürliche Zahl  $\equiv 2 \pmod{4}$  oder  $\equiv 1 \pmod{2}$  aber  $\not\equiv 7 \pmod{8}$  ist, so ist sie als Summe dreier teilerfremder Quadrate darstellbar.

Vgl. Legendre, *Essai*, 1. Aufl., S. 202 u. S. 398–399; Dirichlet, *J. f. Math.* **40** (1850), S. 228–232 = *Werke* **2**, S. 87–96. Dirichlets Beweis findet man neu dargestellt bei Landau, *Vorles.* **1**, S. 114–125. Die Beweise sind schon darum schwieriger als die der Sätze über  $\boxed{2}$  und  $\boxed{4}$ , weil eine zu (11) oder (12) analoge Identität bei drei Variablen nicht bestehen kann, wie schon das von Legendre gegebene Beispiel  $(1 + 1 + 1)(1 + 4 + 16) \not\equiv \boxed{3}$  zeigt. Die Anzahl  $r_3(n)$  wurde von Gauß (*Disqu. arithm.* art. 291–292; siehe auch die Darstellung bei Bachmann, *Quadrat. Formen* **1**, S. 139–149 u. S. 600) mit Hilfe der Theorie der ternären quadratischen Formen untersucht und durch die Anzahl der in einem Geschlecht enthaltenen Klassen binärer quadratischer Formen der Diskriminante  $-4n$  ausgedrückt. Auf Grund dieses Zusammenhanges

liefern die berühmten von Dirichlet mit den von ihm eingeführten transzendenten Methoden bewiesenen Formeln für die Klassenzahlen binärer quadratischer Formen gegebener Diskriminante Ausdrücke für  $r_3(n)$ , in denen die binären Formen nicht mehr explizit auftreten. Vgl. z. B. Bachmann, *l. c.*, S. 142—143. Mittels elliptischer Funktionen bzw. Modulfunktionen behandelten die Bestimmung von  $r_3(n)$  Kronecker, *J. f. Math.* **57** (1860), S. 253—254 und Mordell, *Mess. of Math.* **45** (1915) S. 76—80.

Da für  $s > 4$  immer  $r_s(n) \geq r_4(n) > 0$  ist, fällt für  $s > 4$  die Aufsuchung der Bedingungen der Darstellbarkeit weg, und es bleibt nur die schwierigere Aufgabe, die Anzahl  $r_s(n)$  selbst zu untersuchen. Es hat sich gezeigt, daß die ungeraden Werte von  $s$  zu einem anderen Typus von Endformeln führen wie die geraden. Als Untersuchungsmethoden bieten sich im wesentlichen folgende zwei dar: Entweder man entwickelt eine allgemeine arithmetische Theorie der quadratischen Formen von  $s$  Veränderlichen mit ganzzahligen Koeffizienten und wendet sie auf die spezielle Form  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2$  an, oder man versucht durch funktionentheoretische Betrachtungen für die erzeugende Potenzreihe

$\left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \right)^s$  einen anderen Ausdruck zu gewinnen, wonach

man durch Koeffizientenvergleichung die gewünschten Resultate erhält. Bei beiden Methoden bereiten die ungeraden Werte von  $s$  größere Schwierigkeiten als die geraden. Eine große Anzahl von Formeln wurde, meist ohne Beweis, von Eisenstein (*J. f. Math.* **35** (1847), S. 135, 368; **39**, (1850), S. 180—181) und Liouville (zahlreiche Arbeiten im *J. de Math.* (2) **5**—**14** (1860 bis 1869)) veröffentlicht; die ersten Beweise gaben mittels der Theorie der quadratischen Formen Smith (*London R. S. Proc.* **16** (1868), S. 197—208 = *Coll. Math. Papers* **1**, S. 510—523; *Mém. prés. à l'Acad. d. sciences de l'Institut nat. de France* (2) **29** (1887) No. 1 = *Coll. Math. Papers* **2**, S. 623—680) und Minkowski (*Mém. prés. etc.* (2) **29** (1884) No. 2 = *Ges. Math. Abhandl.* **1**, S. 1—144).

Über die Theorie der *quadratischen Formen* sei hier folgendes bemerkt: Unter einer quadratischen Form von  $s$  Veränderlichen — man spricht für  $s = 2, 3, 4, \dots$  auch von einer binären, ternären, quaternären, ... Form — versteht man in der

*Zahlentheorie* einen Ausdruck  $\sum_{i,k=1}^s a_{ik} x_i x_k$ , in dem die Koeffizienten  $a_{ik} = a_{ki}$  ganze Zahlen bedeuten. Die Determinante  $|a_{ik}|$

(bei Gauß das  $(-1)$ -fache von ihr) heißt die *Determinante der Form*. Man sagt, eine ganze Zahl  $n$  wird durch die Form *dargestellt*, wenn sich den Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_s$  solche ganzzahligen Werte erteilen lassen, für die der Wert der Form gleich  $n$  wird. Die Darstellung heißt eine *primitive* oder *eigentliche*, wenn die den Variablen erteilten Werte keinen von  $\pm 1$  verschiedenen gemeinsamen Teiler haben, sonst eine *uneigentliche* oder *imprimitive*. Die ersten Hauptfragen sind: *Welche ganzen Zahlen sind durch eine gegebene quadratische Form darstellbar? Wenn eine ganze Zahl  $n$  durch eine gegebene Form darstellbar ist, wie findet man alle ihre Darstellungen durch diese Form?* Dabei kann man nach Belieben entweder alle Darstellungen oder nur die primitiven ins Auge fassen. Setzt man in die Form

$f = \sum_{i,k=1}^s a_{ik} x_i x_k$  für die Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_s$  lineare homogene

Verbindungen mit ganzzahligen Koeffizienten in neuen Variablen  $x'_1, x'_2, \dots, x'_{s'}$  ein, wobei  $s' < s$  sei, so geht sie in eine Form  $g$  von den  $s'$  Variablen  $x'_1, x'_2, \dots, x'_{s'}$  über; man sagt dann, *die Form  $g$  wird durch die Form  $f$  dargestellt*. Die Frage nach den Darstellungen einer Form durch eine andere ist eine naturgemäße Verallgemeinerung der Frage nach den Darstellungen einer ganzen Zahl durch eine Form.

Eng mit der Theorie der Darstellung verknüpft und zu ihrem Aufbau notwendig ist die Theorie der *Äquivalenz* der quadratischen Formen. Zwei Formen

$$f = \sum_{i,k=1}^s a_{ik} x_i x_k \quad \text{und} \quad g = \sum_{i,k=1}^s b_{ik} y_i y_k$$

heißen äquivalent, wenn es eine unimodulare ganzzahlige Substitution<sup>1)</sup>

$$x_i = \sum_{k=1}^s t_{ik} y_k$$

gibt, durch die  $f(x)$  in  $g(y)$  übergeht. Äquivalente Formen haben die gleiche Determinante. Die Gesamtheit der Formen einer gegebenen Determinante zerfällt in *Klassen äquivalenter Formen*, derart, daß je zwei Formen einer Klasse miteinander äquivalent sind, zwei Formen aus verschiedenen Klassen jedoch nicht äquivalent. Es ist eines der wichtigsten Ergebnisse der Theorie, daß es nur *endlich viele* Klassen zu einer gegebenen Determinante

1) D. h. die Koeffizienten  $t_{ik}$  sollen ganze Zahlen und ihre Determinante  $|t_{ik}|$  soll gleich 1 sein.

gibt. Mit der Klasseneinteilung ergibt sich zugleich die Aufgabe, zu entscheiden, ob zwei vorgelegte Formen äquivalent sind, und wenn dies der Fall ist, sämtliche Transformationen der einen in die andere aufzusuchen. Hierzu dient die sogenannte *Reduktion* der Formen: In jeder Klasse wird eine Form (eventuell mehrere Formen) als Repräsentant der Klasse ausgezeichnet, deren Koeffizienten gewissen Ungleichungen genügen, und es wird ein Algorithmus angegeben, um von einer beliebigen Form der Klasse ausgehend in endlich vielen Schritten durch ganzzahlige unimodulare Substitutionen zu der (bzw. einer) reduzierten Form zu gelangen. Die Reduktionsverfahren hängen auf das engste mit der Lehre von den Diophantischen Approximationen zusammen und werden häufig mit großem Vorteil geometrisch veranschaulicht. Die Klassen von Formen einer Determinante werden weiter zusammengefaßt zu *Geschlechtern* (genera), worauf hier nicht näher eingegangen werden kann, und diese wiederum zu *Ordnungen* je nach den Werten der größten gemeinsamen Teiler der 1-reihigen, 2-reihigen, ... Unterdeterminanten der Matrices der in den betreffenden Geschlechtern enthaltenen Formen.

Die *binären* quadratischen Formen, die historisch am ersten ausführlich untersucht wurden und im vorigen Jahrhundert sozusagen ein Kernstück der Zahlentheorie bildeten, nehmen dadurch eine Sonderstellung ein, daß sie zugleich *zerlegbare* Formen sind. So nennt man die ganzen homogenen Funktionen  $n$ -ten Grades in  $n$  Veränderlichen mit ganzzahligen Zahlenkoeffizienten, die sich als Produkt aus  $n$  Linearformen dieser Veränderlichen mit algebraischen Zahlen als Koeffizienten schreiben lassen. Auf Grund dieses Umstandes lassen sich heute die meisten Ergebnisse über binäre Formen bequemer in der Sprache der inzwischen gut ausgebildeten Theorie der quadratischen Zahlkörper und ihrer Ideale<sup>1)</sup> aussprechen. Es ist daher vorteilhafter, letztere Theorie voranzustellen und die binären Formen nur hinterher zur Ergänzung heranzuziehen. Mit Rücksicht auf die glatte wechselseitige Beziehung zwischen binären Formen und Idealen in quadratischen Körpern hat es sich als zweckmäßig erwiesen, von der oben eingeführten, von Gauß herrührenden Terminologie abzuweichen. Bei den binären Formen betrachtet man heute auch die Formen  $ax^2 + bxy + cy^2$  mit *ungeradem* mittleren Koeffizienten  $b$  und nennt den Ausdruck  $b^2 - 4ac$  die *Diskriminante*

1) Richtiger müßte es heißen: Ideale in den Integritätsbereichen, deren Quotientenkörper ein quadratischer Zahlkörper ist.

der Form; die Formen werden dann nach ihren Diskriminanten an Stelle der Gaußschen Determinanten klassifiziert. Infolge der Zerlegbarkeit der binären Formen lassen sich bei ihnen manche Entwicklungen durchführen, die auf die Formen mit mehr als zwei Variablen nicht oder nur in beschränktem Umfange übertragbar sind, insbesondere die Lehre von der Komposition.

Es sei noch erwähnt, daß für  $s = 8$ , aber für keinen von 2, 4, 8 verschiedenen Wert von  $s$ , eine Identität vom Typus der Identitäten (11), (12) besteht. Vgl. darüber Dickson, *Annals of Math.* (2) **20** (1919), S. 155—171 und S. 297.

Über die Theorie der *binären quadratischen Formen* siehe vor allem Gauß, *Disqu. arithm.* sectio V; Dirichlet-Dedekind, 4. Aufl., Abschnitte IV und V und Supplemente IV und X; Smith, *Report*, part. III—VI. Für Formen von mehr als zwei Variablen sei auf das Lehrbuch Bachmann, *Quadrat. Formen* verwiesen.

Die *funktionentheoretische* Methode zur Bestimmung von  $r_s(n)$  stützt sich in erster Linie auf die Theorie der elliptischen Modul-funktionen; neuerdings ist auch die Hardy-Ramanujan-Littlewood-sche Methode zur Behandlung von Problemen der additiven Zahlentheorie herangezogen worden. Aus der Literatur, die den funktionentheoretischen Weg verfolgt, seien nur einige neuere Arbeiten genannt: Ramanujan, *Trans. Cambr. Phil. S.* **22** (1916), S. 179 bis 184 = *Collected Papers* **1**, S. 157—162; Hardy, *Trans. Amer. M. S.* **21** (1920), S. 255—284; Mordell, *Quart. J.* **48** (1920), S. 93—104; *Trans. Cambr. Phil. S.* **22** (1923), S. 361 bis 372; Petersson, *Abh. Math. Sem. Hamburg* **4** (1926), S. 199—224 (Ergänzung dazu: Rademacher, *ibidem* **5** (1927), S. 40—44); Hecke, *ibidem* **5** (1927), S. 219—224; Kloosterman, *Acta Math.* **49** (1926), S. 407—464 und *Abh. Math. Sem. Hamburg* **5** (1927), S. 337—352.

### § 18. Rekurrente Zahlenreihen.

Unter einer *rekurrenten Zahlenreihe* versteht man eine Folge von Zahlen  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , die einer Rekursionsformel der Gestalt

$$(1) \quad a_{n+1} = c_1 a_n + c_2 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k+1}$$

genügen, wobei  $c_1, c_2, \dots, c_k$  ein festes System von Koeffizienten bedeutet.  $k$  heißt die *Ordnung* der Reihe, das System  $c_1, c_2, \dots, c_k$  oder bei manchen Autoren auch die Gleichung

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_k = 0$$



heißt die *Skala* der Rekursion. Auf die rekurrenten Reihen wurde man ursprünglich in der Algebra durch die Potenzreihenentwicklung einer gebrochenen rationalen Funktion geführt. In der *Zahlentheorie* sind vornehmlich die Reihen *zweiter Ordnung mit ganzzahliger Skala* untersucht worden, insbesondere durch Lucas, der ihnen eine große Reihe — leider nicht ganz fehlerfreier — Arbeiten widmete; die wichtigste unter ihnen steht *Amer. J.* **1** (1878), S. 184—240 und 289—321. Eine moderne und tiefer dringende Darstellung einiger Hauptpunkte gab Carmichael *Ann. of Math.* (2) **15** (1912), S. 30—70. Vielleicht erlangen die in zahlentheoretischer Hinsicht bisher fast gar nicht untersuchten Reihen höherer Ordnung im Zusammenhang mit der Theorie der algebraischen Zahlkörper später noch einmal größere Bedeutung.

Die Grundtatsachen betreffend Reihen *zweiter Ordnung* sind folgende: Es seien  $p$  und  $q$  zwei teilerfremde ganze Zahlen,  $p > 0$ ,  $q \neq 0$ ,  $\Delta = p^2 - 4q \neq 0$ . Dann sind die von Lucas untersuchten Reihen definiert durch die Rekursionsformeln

$$u_{n+1} = pu_n - qu_{n-1}$$

$$v_{n+1} = pv_n - qv_{n-1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1; \quad v_0 = 2, \quad v_1 = p.$$

Die am häufigsten behandelten Spezialfälle sind:

$p = 1, q = -1$ ; dann heißt die Reihe der  $u_n$  die *Reihe von Fibonacci*.

$p = 3, q = 2$ ; die entsprechenden Reihen  $u_n = 2^n - 1$ ,  $v_n = 2^n + 1$  heißen die *Reihen von Fermat*.

$p = 2, q = -1$ ; die entstehenden Reihen wurden von Lucas als *Pellsche*, von Bachmann als *Duprésche* bezeichnet.

Die Glieder einer jeden der Rekursionsformel

$$(2) \quad w_{n+1} = pw_n - qw_{n-1}$$

genügenden Zahlenfolge setzen sich aus  $u_n$  und  $v_n$  oder auch aus  $u_n$  und  $u_{n-1}$  mit konstanten Koeffizienten linear zusammen:

$$(3) \quad w_n = \left(w_1 - \frac{w_0}{2}p\right)u_n + \frac{w_0}{2}v_n = w_1u_n - w_0qu_{n-1},$$



insbesondere ist also

$$(4) \quad v_n = pu_n - 2qu_{n-1}.$$

Umgekehrt gilt

$$(5) \quad \Delta u_n = pv_n - 2qv_{n-1},$$

wo  $\Delta = p^2 - 4q$ . Es seien  $a, b$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - px + q = 0,$$

so daß

$$(6) \quad p = a + b, \quad q = ab, \quad \Delta = (a - b)^2$$

wird. Dann drücken sich  $u_n$  und  $v_n$  in folgender Weise durch  $a$  und  $b$  aus:

$$(7) \quad u_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad v_n = a^n + b^n.$$

Hieraus folgen die Darstellungen als Polynome in  $p$  und  $\Delta$ :

$$(8) \quad \begin{cases} 2^{n-1}u_n = \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2v+1} p^{n-2v-1} \Delta^v \\ 2^{n-1}v_n = \sum_{v=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2v} p^{n-2v} \Delta^v \end{cases}$$

und als Polynome in  $p$  und  $q$ :

$$(9) \quad \begin{cases} u_n = \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^v \binom{n-v-1}{v} p^{n-2v-1} q^v \\ v_n = \sum_{v=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^v \frac{n}{n-v} \binom{n-v}{v} p^{n-2v} q^v. \end{cases}$$

Endlich lassen sich  $u_n$  und  $v_n$  durch  $p$  und  $q$  in Form von Determinanten und in Form von Kettenbrüchen ausdrücken.

Die Teilfolgen  $\frac{u_{rn}}{u_r}, v_{rn}$ , wo  $r$  eine feste natürliche Zahl ist, während  $n$  die Reihe der nicht negativen ganzen Zahlen

durchläuft, bilden selbst ein System Lucasscher Reihen; *alle allgemeinen Formeln der Theorie bleiben richtig, wenn man gleichzeitig*

$$u_n, \quad v_n, \quad p, \quad q, \quad \Delta, \quad a, \quad b$$

durch

$$\frac{u_{rn}}{u_r}, \quad v_{rn}, \quad v_r, \quad q^r, \quad \Delta u_r^2, \quad a^r, \quad b^r$$

ersetzt.

Zwischen den eingeführten Größen bestehen zahlreiche elegante Relationen, die vielfach Analogien zu den Formeln zwischen den trigonometrischen Funktionen  $\cos nx$ ,  $\sin nx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) aufweisen. Für die anzuknüpfenden zahlentheoretischen Folgerungen sind die wichtigsten unter ihnen

$$(10) \quad u_n v_{n-1} - u_{n-1} v_n = 2q^{n-1},$$

$$(11) \quad u_n^2 - u_{n-1} u_{n+1} = q^{n-1},$$

$$(12) \quad v_n^2 - \Delta u_n^2 = 4q^n,$$

dann die *Additionstheoreme*

$$(13) \quad \begin{cases} 2u_{m+n} = u_m v_n + v_m u_n \\ 2v_{m+n} = v_m v_n + \Delta u_m u_n \\ u_{m+n} = u_m u_{n+1} - q u_{m-1} u_n \end{cases}$$

und eine größere Reihe von *Multiplikationsformeln*, welche  $u_{nr}$ ,  $v_{nr}$  als Polynome in  $u_r$ ,  $v_r$ ,  $q$ ,  $\Delta$  darstellen. Die niedersten Fälle sind

$$(14) \quad \begin{aligned} u_{2n} &= u_n v_n & v_{2n} &= v_n^2 - 2q^n \\ u_{3n} &= u_n (v_n^2 - q^n) & v_{3n} &= v_n (v_n^2 - 3q^n). \end{aligned}$$

Daneben treten Formeln, in denen  $\frac{u_{nr}}{u_r}$  bzw.  $\frac{v_{nr}}{v_r}$  linear durch  $u_{(n-1)r}$ ,  $u_{(n-3)r}$ ,  $u_{(n-5)r}$ ,  $\dots$  bzw.  $v_{(n-1)r}$ ,  $v_{(n-3)r}$ ,  $v_{(n-5)r}$ ,  $\dots$  ausgedrückt werden, wobei die Koeffizienten Potenzen von  $q$  sind.

Das *zahlentheoretische* Interesse konzentriert sich auf die Frage nach der *Primzahlzerlegung* der einzelnen Glieder der Reihen. Alle Glieder der Reihen  $u_n$ ,  $v_n$  sind zu  $q$  teilerfremd, aber jede nicht in  $q$  aufgehende Primzahl geht in unendlich vielen Gliedern  $u_n$  auf. Ist  $n$  ein Teiler von  $m$ , so ist  $u_m$  durch  $u_n$  teilbar, und wenn außerdem der Quotient  $\frac{m}{n}$  ungerade ist, so ist auch  $v_m$  durch  $v_n$  teilbar. Stets ist  $(u_n, v_n) = 1$  oder  $= 2$ .

Bezeichnet  $d$  den größten gemeinsamen Teiler von  $f, g, h, \dots$ , so ist  $u_d$  der größte gemeinsame Teiler von  $u_f, u_g, u_h, \dots$ . Für die  $v$ -Reihe gilt das Entsprechende, wenn die Voraussetzung hinzugefügt wird, daß jede der Zahlen  $\frac{f}{d}, \frac{g}{d}, \frac{h}{d}, \dots$  ungerade ist. Eine in  $u_n$  bzw.  $v_n$  aufgehende Primzahl  $\pi$  heißt *eigentlicher* oder *primitiver* Teiler von  $u_n$  bzw.  $v_n$ , wenn sie in keinem  $u_v$  bzw.  $v_v$  mit  $1 \leq v \leq n-1$  aufgeht, sonst *uneigentlicher* oder *imprimitiver* Teiler. Die eigentlichen Teiler von  $v_n$  stimmen mit den eigentlichen Teilern von  $u_{2n}$  überein. Ist  $\pi$  eigentlicher Teiler von  $u_\omega$  bzw.  $v_\omega$ , so geht  $\pi$  in  $u_n$  bzw.  $v_n$  dann und nur dann auf, wenn  $n \equiv 0 \pmod{\omega}$  ist, ferner besteht dann die Kongruenz

$$\pi \equiv \left(\frac{\Delta}{\pi}\right) \pmod{\omega} \quad \text{bzw.} \quad \pi \equiv \left(\frac{\Delta}{\pi}\right) \pmod{2\omega},$$

wo  $\left(\frac{\Delta}{\pi}\right)$  das Kroneckersche Symbol (§ 8, S. 1508) bedeutet. Um die Primzahlzerlegung von  $u_n$  bzw.  $v_n$  zu finden, benutzt man zuerst die *algebraische* Zerlegung

$$(15) \quad u_n = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} F_d(a, b), \quad v_n = \prod_{\substack{d|2n \\ d+n}} F_d(a, b),$$

in der  $F_m(x, y)$  das Kreisteilungspolynom

$$\prod_{\substack{r \pmod{m} \\ (r, m) = 1}} \left( x - e^{\frac{2\pi i r}{m}} y \right)$$

bedeutet, und hat dann die Faktoren  $F'_d(a, b)$  weiter zu zerlegen. Die *primitiven* Teiler von  $u_n$  gehen in  $F'_n(a, b)$  auf. Für ungerades  $m$  liefert sodann die Kreisteilungstheorie Darstellungen von  $4 \frac{u_{mn}}{u_n}$ ,  $4 \frac{v_{mn}}{v_n}$  durch binäre quadratische Formen, aus denen sich nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz *Linearformen* ergeben, denen die Divisoren von  $\frac{u_{mn}}{u_n}$ ,  $\frac{v_{mn}}{v_n}$  angehören müssen. In derselben Weise ist Formel (12) verwertbar.

Die Reste der  $u_n$ ,  $v_n$  nach jeder zu  $2q\Delta$  teilerfremden natürlichen Zahl  $m$  als Modul wiederholen sich periodisch; bezeichnet  $\varphi(m)$  die Anzahl der zu  $m$  teilerfremden Restklassen

(mod.  $m$ ) in dem durch  $\sqrt{\Delta}$  bestimmten Zahlkörper  $P(\sqrt{\Delta})$  <sup>1)</sup>, so ist  $\varphi(m)$  eine Periode, d. h. es gilt für alle  $n$

$$u_{n+\varphi(m)} \equiv u_n \pmod{m}, \quad v_{n+\varphi(m)} \equiv v_n \pmod{m}. \quad ^2)$$

Dieser Satz folgt aus (7) und dem „Fermatschen Satz“ für den Körper  $P(\sqrt{\Delta})$  <sup>3)</sup>; er kann als eine Verallgemeinerung des letzteren angesehen werden. Die kleinste Periode, die nach (4), (5) für die  $u$ -Reihe und die  $v$ -Reihe die gleiche ist, ist stets ein Teiler von  $\varphi(m)$ ; sie ist die kleinste Zahl  $\mu$ , für die gleichzeitig

$$u_\mu \equiv 0 \pmod{m}, \quad v_\mu \equiv 2 \pmod{m}$$

gilt. Bezeichnet  $\lambda(m)$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen  $p_x^{\alpha_x-1} \left( p_x - \left( \frac{\Delta}{p_x} \right) \right)$ , so ist (immer unter der Voraussetzung  $(m, 2q\Delta) = 1$ )  $u_\lambda \equiv 0 \pmod{m}$ . Insbesondere gilt für zu  $q$  teilerfremde Primzahlen  $\pi$

$$u_{\pi - \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)} \equiv 0, \quad u_\pi \equiv \left( \frac{\Delta}{\pi} \right) \pmod{\pi}.$$

Über die Potenz, in der  $\pi$  in den Gliedern  $u_n$  aufgeht, gilt der Satz:  $\pi$  sei *eigentlicher Teiler* von  $u_\omega$  und es sei  $\pi^\alpha \mid u_\omega$ ,  $\pi^{\alpha+1} \nmid u_\omega$ . Ist dann  $\omega \nmid n$ , so ist  $\pi \nmid u_n$ ; ist aber  $\omega \mid n$ , und zwar  $n = \pi^\beta m \omega$ , wo  $(m, \pi) = 1$ , so gilt

$$\begin{aligned} \pi^{\alpha+\beta} \mid u_n, \quad \pi^{\alpha+\beta+1} \nmid u_n, & \quad \text{wenn } \pi^\alpha \neq 2 \\ \pi^{\alpha+\beta} \mid u_n, \quad u_{m\omega} \equiv 2 \pmod{4}, & \quad \text{wenn } \pi^\alpha = 2. \end{aligned}$$

1) Also, wenn  $m$  die Primzahlzerlegung  $m = \prod_{x=1}^k p_x^{\alpha_x}$  besitzt,

$$\varphi(m) = \prod_{x=1}^k p_x^{\alpha_x-1} (p_x - 1), \quad \text{wenn } \sqrt{\Delta} \text{ rational}$$

$$\varphi(m) = \prod_{x=1}^k p_x^{2\alpha_x-2} (p_x - 1) \left( p_x - \left( \frac{\Delta}{p_x} \right) \right), \quad \text{wenn } \sqrt{\Delta} \text{ irrational.}$$

Für einen Augenblick werden der Kürze halber die einfachsten Begriffe aus der Theorie der quadratischen Zahlkörper als bekannt vorausgesetzt.

2) Die auf  $v$  bezügliche Formel gilt auch, wenn  $m$  zu  $\Delta$  nicht teilerfremd ist.

3) Für jede zu  $m$  teilerfremde Zahl  $\alpha$  aus  $P(\sqrt{\Delta})$  gilt  $\alpha^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ .

Die *Anwendungen* der Theorie erstrecken sich nach zwei Richtungen. Einmal kann man mit ihrer Hilfe eine Reihe von Spezialfällen des Dirichletschen Satzes über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in arithmetischen Progressionen *elementar* beweisen (vgl. § 13), sodann läßt sie sich zur Prüfung großer Zahlen auf ihren Primzahlcharakter hin benutzen. Der einfachste Spezialfall hiervon ist die sogenannte *Umkehrung des kleinen Fermatschen Satzes*:

1. Wenn für zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $m$  gilt

$$a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}, \text{ aber } a^d \not\equiv 1 \pmod{m}$$

für alle den Bedingungen

$$d \mid m - 1, \quad 1 \leq d < m - 1$$

genügenden  $d$ , so ist  $m$  Primzahl.

2. Wenn für zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $m$  gilt

$$a^{m-1} \not\equiv 1 \pmod{m}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{m},$$

so ist  $m$  zusammengesetzt.

3. Wenn  $m$  Primzahl ist, gibt es eine natürliche Zahl  $a$  (*primitive Wurzel*), derart daß  $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ ,  $a^v \not\equiv 1 \pmod{m}$  für  $1 \leq v < m - 1$ .

Da es in praxi, selbst wenn die vorgelegte zu prüfende Zahl  $m$  Primzahl ist, im allgemeinen nicht gelingt, sich eine Zahl  $a$  gemäß 3. zu verschaffen, liefern 1. und 2. zusammen nur ein *unvollständiges Kriterium*, da man nur von einer zufällig gewählten zu  $m$  teilerfremden Zahl  $a$  ausgehen kann. Die Sätze 1. bis 3. lassen sich mit Hilfe der rekurrenten Reihen in folgender Weise verallgemeinern; dabei bedeutet  $m$  eine positive ungerade Zahl.

1'. Wenn in einer Lucasschen Reihe gilt  $u_{m+\varepsilon} \equiv 0 \pmod{m}$  ( $\varepsilon = 1$  oder  $\varepsilon = -1$ ), aber  $u_d \not\equiv 0 \pmod{m}$  für alle den Bedingungen

$$d \mid m + \varepsilon, \quad 1 \leq d < m + \varepsilon$$

genügenden  $d$ , so ist  $m$  Primzahl und  $\varepsilon = -\left(\frac{\Delta}{m}\right)$ .

2'. Wenn  $(m, q) = 1$  und  $u_{m-\left(\frac{\Delta}{m}\right)} \not\equiv 0 \pmod{m}$  ist, so ist  $m$  zusammengesetzt.

3'. Wenn  $m$  Primzahl ist, so gibt es Lucassche Reihen mit  $\left(\frac{\Delta}{m}\right) = 1$  und solche mit  $\left(\frac{\Delta}{m}\right) = -1$ , derart, daß  $u_{m-\left(\frac{\Delta}{m}\right)} \equiv 0 \pmod{m}$ , aber  $u_v \not\equiv 0 \pmod{m}$  für  $1 \leq v < m - \left(\frac{\Delta}{m}\right)$ .

Die Unvollständigkeit des auf 1', 2' gestützten Kriteriums ist die gleiche wie die des auf 1., 2. gestützten. Als besonders brauchbar erweist sich das Kriterium bei Zahlen  $m$  der Form  $2^n \pm 1$ , wo es sich ein wenig verschärfen läßt und sich nach Übergang zur  $v$ -Reihe und nach dem Bezeichnungswechsel  $r_{v+1} = v_{2v}$  die Gestalt annimmt: Es sei  $m = 2^n - \varepsilon$  ( $\varepsilon = 1$  oder  $\varepsilon = -1$ ). Man wähle  $q = \varepsilon$  und  $p$  so, daß  $\left(\frac{\Delta}{m}\right) = \left(\frac{p^2 - 4q}{m}\right) = -\varepsilon$  wird, bilde dann die Reihe der Zahlen  $r_1, r_2, \dots, r_n$  nach der Vorschrift  $r_1 = p$ ,  $r_2 = p^2 - 2\varepsilon$ ,  $r_{v+1} = r_v^2 - 2$  für  $2 \leq v \leq n-1$ . Wenn keine von ihnen durch  $m$  teilbar ist, ist  $m$  zusammengesetzt; wenn  $r_\lambda$  die erste (und daher, wie leicht folgt, einzige) durch  $m$  teilbare unter ihnen ist, so ist  $m$  Primzahl, falls  $\lambda \geq \frac{n+3}{2}$ . Falls aber  $\lambda \leq \frac{n+1}{2}$ , bleibt der Primzahlcharakter von  $m$  unentschieden, aber jeder Primfaktor  $\pi$  von  $m$  ist  $\equiv \left(\frac{\Delta}{\pi}\right) \pmod{2^\lambda}$ .

Im Falle  $\varepsilon = 1$ ,  $n \equiv 3 \pmod{4}$  kann man  $p = 3$ ,  $q = 1$ ,  $\Delta = 5$  nehmen; im Falle  $\varepsilon = 1$ ,  $n \equiv 1 \pmod{4}$ :  $p = 4$ ,  $q = 1$ ,  $\Delta = 12$ ; im Falle  $\varepsilon = -1$ ,  $n = 2^k$ :  $p = 2$ ,  $q = -1$ ,  $\Delta = 8$ .

Bei den Zahlen  $2^n \pm 1$  kann man auch die unter 3 gemachten Aussagen fruchtbar machen und damit zu vollständigen Kriterien gelangen; z. B.:  $m = 2^{2^k} + 1$  sei quadratischer Nichtrest der ungeraden Primzahl  $N$ .  $m$  ist dann und nur dann Primzahl, wenn  $N^{2^{2^k-1}} \equiv -1 \pmod{m}$  gilt. Hier kann für alle  $k$  stets  $N = 3$  genommen werden.

## § 19. Vollkommene und befreundete Zahlen.

Eine Zahl heißt *vollkommen* (*numerus perfectus*), wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist, wenn also  $\sigma_1(n) = 2n$  ist. Die ersten vollkommenen Zahlen sind 6, 28, 496, 8128, ... Seit dem Altertum waren die vollkommenen Zahlen ein beliebter Gegenstand der Untersuchung, und der Beschäftigung mit ihnen hat die Zahlentheorie so bedeutende Entdeckungen wie den kleinen Fermatschen Satz zu verdanken. Euklid (*Elemente* 9, Satz 36) bewies, daß  $2^{n-1}(2^n - 1)$  eine vollkommene Zahl ist, wenn  $2^n - 1$



*Primzahl* ist, und Euler (Abh. 798, *Comm. arithm.* **2**, S. 630 (dort zuerst veröffentlicht) = *Opera postuma* **1** (1862), S. 88) gelang es umgekehrt nachzuweisen, daß jede *gerade* vollkommene Zahl notwendig die von Euklid angegebene Gestalt hat. Damit ist die Frage der geraden vollkommenen Zahlen zurückgeführt auf die andere, zu entscheiden, für welche  $n$  die Zahl  $2^n - 1$  Primzahl ist. Damit  $2^n - 1$  Primzahl sei, ist notwendig, aber keineswegs hinreichend, daß  $n$  selbst Primzahl ist. Mersenne (*Cogitata Physico Mathematica*, Paris 1644, praefatio generalis, art. 19) hat die Werte von  $n$  bis zu 257 aufgezählt, für die  $2^n - 1$  Primzahl wird, doch enthält seine Liste einige Fehler; nach ihm nennt man die Primzahlen  $2^n - 1$  für  $n \leq 257$  *Mersennesche Zahlen*. Gegenwärtig ist 127 der größte Exponent, für den der Primzahlcharakter von  $2^n - 1$  bewiesen ist. Eine klare Übersicht über unsere heutige Kenntnis betreffend die Primzahlzerlegungen der Zahlen  $2^n - 1$  bietet Kraitchik (*Recherches*, art. 51, S. 19—21 und *Théorie* **1**, S. 218). Über die Untersuchungsmethoden vgl. § 18, S. 1569.

Über gerade vollkommene Zahlen gelten noch folgende aus der Darstellung  $2^{n-1}(2^n - 1)$  leicht zu beweisenden Sätze: Jede gerade vollkommene Zahl außer 6 ist  $\equiv 1 \pmod{9}$  und  $\equiv 1$  oder 2 oder 3 oder 8  $\pmod{13}$ , jede gerade vollkommene Zahl außer 28 ist  $\equiv 1$  oder 6  $\pmod{7}$ , jede gerade vollkommene Zahl außer 6 und 496 ist  $\equiv 16$  oder 28 oder 36 oder 56 oder 76  $\pmod{100}$  usw.

Man kennt keine *ungerade* vollkommene Zahl, es ist aber bisher nicht gelungen, die Unmöglichkeit einer solchen zu beweisen. Über ungerade vollkommene Zahlen weiß man, falls sie existieren sollten, folgendes: Sie haben die Form  $p^{4k+1}M^2$ , wo  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $p$  Primzahl,  $(p, M) = 1$  (Euler, Abh. 792, *Comm. arithm.* **2**, S. 514—515 = *Opera postuma* **1**, S. 14—15). Sie sind  $\equiv 1$  oder  $\equiv 9 \pmod{12}$  (Pepin, *Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei* **13** (1897), S. 345—420). Sie sind stets durch 6 verschiedene Primzahlen teilbar, und falls sie zu 3 bzw.  $3 \cdot 5$  bzw.  $3 \cdot 7$  bzw.  $3 \cdot 5 \cdot 7$  teilerfremd sind, sind sie durch mindestens 9 bzw. 14 bzw. 11 bzw. 27 verschiedene Primzahlen teilbar und folglich sehr groß, z. B. im letzten Falle größer als  $10^{44}$  (Sylvester, *C. R.* **106** (1888), S. 403—405, 446—450, 522—526, 641—642 = *Collected Math. Papers* **4**, S. 604—619; Pepin, *l. c.*; Catalan, *Mathesis* **8** (1888), S. 112—113). Es gibt keine durch  $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$  teilbare vollkommene Zahl. Es gibt höchstens endlich viele ungerade

vollkommene Zahlen mit einer vorgeschriebenen Anzahl von verschiedenen Primfaktoren (Dickson, *Amer. J.* **35** (1913), S. 413—426); und wenn die genaue Anzahl der verschiedenen Primfaktoren gleich  $n$  ist, so ist der kleinste Primfaktor  $\leq n$ , und auch für die übrigen Faktoren gilt eine einfache Abschätzung (Servais, *Mathesis* **8** (1888), S. 92—93). Die Beweise eines beträchtlichen Teiles der genannten Sätze stützen sich auf die individuellen Eigenschaften der kleinen Primzahlen (etwa bis 20), die durch numerische Rechnung verwertet werden; ein allgemeinerer Ansatz zu einem Beweis der Nichtexistenz ungerader vollkommener Zahlen fehlt bisher völlig.

Zum Unterschiede von den vollkommenen Zahlen bezeichnet man diejenigen Zahlen, für welche  $\sigma_1(n) < 2n$  ist, als *unvollständig* (*deficient, defective*) und diejenigen, für welche  $\sigma_1(n) > 2n$  ist, als *überschießend* (*abundant*). Die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Anzahlen der unvollständigen und der überschießenden Zahlen bis zu  $x$  für gegen  $\infty$  wachsendes  $x$  scheint bisher noch nicht behandelt zu sein. Eine naheliegende Verallgemeinerung der vollkommenen Zahlen sind die Zahlen  $n$ , die für ein gegebenes ganzes  $m > 2$  der Gleichung  $\sigma_1(n) = mn$  genügen, die „*mehrfach vollkommenen*“ Zahlen. Hier sind jedoch nur einzelne Zahlenbeispiele und keine allgemeinen Regeln bekannt.

Auch das Interesse für *befreundete Zahlen* (*numeri amica-biles*) geht auf das Altertum zurück. Zwei Zahlen  $m$  und  $n$  heißen befreundet, wenn jede gleich der Summe der echten Teiler der anderen ist, also

$$\sigma_1(m) = \sigma_1(n) = m + n.$$

Am eingehendsten wurden sie von Euler untersucht (Abh. 100, *Nova Acta Erudit.* 1747, S. 267—269 = *Comm. arithm.* **2**, S. 637—638 = *Op. omn.* ser. 1, **2**, S. 59—61; Abh. 152, *Opuscula varii argumenti* **2** (1750), S. 23—107 = *Comm. arithm.* **1**, S. 102—145 = *Op. omn.* ser. 1, **2**, S. 86—162; Abh. 798, *Comm. arithm.* **2**, S. 627—636), der eine Reihe von Regeln zu ihrer Bildung angab und mit ihrer Hilfe 62 Paare finden konnte. Vor ihm waren nur drei Paare bekannt, bis heute sind nur etwa sechs zu den Eulerschen hinzugekommen. Eine allgemeine Regel zur Aufsuchung befreundeter Zahlenpaare nach dem Muster der Euklidischen Regel für gerade vollkommene Zahlen gibt es nicht; die verschiedenen Einzelregeln zeigen vielmehr, daß die Mannigfaltigkeit der befreundeten Zahlen sehr viel größer ist als die Mannigfaltigkeit der vollkommenen Zahlen. Bei den

neueren Untersuchungen über befreundete Zahlen spielt folgende Frage eine Rolle: Es bezeichne  $s(n)$  die Summe der positiven Teiler von  $n$ , die kleiner sind als  $n$ . Man bilde die Folge der Zahlen

$$n, \quad s(n), \quad s_2(n) = s(s(n)), \quad s_3(n) = s(s_2(n)), \quad \dots$$

Welches Verhalten hat sie? Werden von einer Stelle an alle Glieder gleich 1, oder wiederholen sich die Werte der Glieder periodisch, oder kommen in der Folge Glieder mit beliebig großem Werte vor? Vgl. Catalan, *Bull. Soc. M.* **16** (1887/88), S. 129, *Mathesis* **8** (1888), S. 130; Cunningham, *London M. S. Proc.* **35** (1902/03), S. 40; Dickson, *Quart. J.* **44** (1913), S. 264—296; Poulet, *L'intermediaire des math.* **25** (1918), S. 100—101.

### Literaturverzeichnis.

Das folgende Literaturverzeichnis dient teils dem Zweck, dem Lernenden eine Auswahl der wichtigsten Werke zur Einführung in die Zahlentheorie bzw. ihre Unterdisziplinen zu nennen, teils soll es abkürzende Bezeichnungen für im Texte öfter genannte Bücher oder Abhandlungen erklären. Daneben sei an das Vorhandensein von Gesamtausgaben einiger der bedeutenderen Zahlentheoretiker erinnert; sie sind im Literaturverzeichnis nicht besonders aufgeführt. Ein Verweis auf das Literaturverzeichnis im Text geschieht mit dem Zeichen L.-V. Wenn eine Arbeit an mehreren Stellen gedruckt ist, werden die Zitate dieser Stellen durch das Zeichen = verbunden.

Bachmann, P.

1. *Zahlentheorie, Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen.* Leipzig 1872—1923, B. G. Teubner.
  1. Teil: *Die Elemente der Zahlentheorie*, 1892.
  2. Teil: *Die analytische Zahlentheorie*, 1894.
  3. Teil: *Die Lehre von der Kreistheilung*, 1872.  
[Abk.: *Kreistheilung*.
  4. Teil: *Die Arithmetik der quadratischen Formen.* 1. Abt. 1898, 2. Abt. 1923.  
[Abk.: *Quadratische Formen*.
  5. Teil: *Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper*, 1905.
2. *Niedere Zahlentheorie.* 1. Teil. Leipzig 1902, B. G. Teubner.
3. *Niedere Zahlentheorie.* 2. Teil. *Additive Zahlentheorie.* Leipzig 1910, B. G. Teubner.  
[Abk.: *Additive Z.*
4. *Grundlehren der neueren Zahlentheorie.* 2. Aufl. Berlin u. Leipzig 1921, W. de Gruyter.

Bohr, H. und Cramér, H.

*Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie.* *Enzyklop. der Math. Wiss.* II C 8, S. 722—849. Leipzig 1923, B. G. Teubner.

## Committee on Algebraic Numbers

*Algebraic numbers. Report of the Committee on algebraic numbers, National Research Council.* Teil I von L. E. Dickson, H. H. Mitchell, H. S. Vandiver, G. E. Wahlin in *Bulletin of the National Research Council* 5, part. 3, No. 28. Washington, D. C. 1923. Teil II von H. S. Vandiver und G. E. Wahlin *ibid.* No. 62. Washington, D. C. 1928.

## Dickson, L. E.

*History of the theory of numbers.* 3 Bde. *Publications of the Carnegie Institution of Washington* No. 256. Washington 1919–1923.

## Dirichlet, P. G. Lejeune-

*Vorlesungen über Zahlentheorie.* Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. 1. Aufl. 1863; 2. Aufl. 1871; 3. Aufl. 1879–1880; 4. Aufl. 1894.  
[Abk.: *Dirichlet-Dedekind.*]

## Euler, L.

1. *Introductio in analysin infinitorum.* Lausanne 1748, M. M. Bousquet = *Opera omnia*, ser. 1, 8. [Abk.: *Introductio.*]
2. *Commentationes arithmeticae collectae.* 2 Bde. Petropoli 1849, Typis ac impensis academiae. [Abk.: *Comm. arithm.*]

Eulersche Abhandlungen werden nach folgendem Schema zitiert: Euler, Abh. 134, *Nov. Comm. Petrop.* 1 (1748/49; 1750), S. 20–48 = *Comm. arithm.* 1, S. 50–61 = *Op. omn.* ser. 1, 2, S. 62–85. Hierbei bedeutet 134 die Nummer in dem Eneströmschen Verzeichnis und 1748/49 das Jahr, über das die betr. *Comm.* handeln, 1750 das Erscheinungsjahr.

## Gauss, C. F.

1. *Disquisitiones arithmeticae.* Leipzig 1801, G. Fleischer = *Werke* 1. [Abk.: *Disqu. arithm.* (art. bedeutet die Artikelnummer.)]
2. *Analysis residuorum* (Nachlaß, 1797 oder 1798 verfaßt). *Werke* 2, S. 212–242. [Abk.: *Anal. resid.*]

## Hasse, H.

*Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper.* Teil I: *Klassenkörpertheorie*, *Math. Ver.* 35 (1926), S. 1–55. Teil Ia: *Beweise zu Teil I*, *ibid.* 36 (1927), S. 233–311. Ein zweiter Teil wird die Reziprozitätsgesetze behandeln.  
[Abk.: *Bericht.*]

## Hecke, E.

*Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen.* Leipzig 1923, Akadem. Verlagsgesellschaft. [Abk.: *Algebr. Zahlen.*]

## Hensel, K.

*Theorie der algebraischen Zahlen.* Bd. 1. Leipzig u. Berlin 1908, B. G. Teubner. [Abk.: *Algebr. Zahlen.*]

Hilbert, D.

*Die Theorie der algebraischen Zahlkörper.* Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. *Math. Ver.* 4 (1897), S. I—XVIII und S. 177—546. [*Abk.: Bericht.*]

Kraitchik, M.

1. *Théorie des nombres.* 2 Bde. Paris 1922 und 1926, Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>. [*Abk.: Théorie.*]
2. *Recherches sur la théorie des nombres.* Paris 1924, Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>. [*Abk.: Recherches.*]

Kronecker, L.

*Vorlesungen über Zahlentheorie*, bearbeitet und herausgegeben von K. Hensel. Leipzig 1901, B. G. Teubner. [*Abk.: Vorles.*]

Landau, E.

1. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.* 2 Bde. Leipzig und Berlin 1909, B. G. Teubner. [*Abk.: Handbuch.*]
2. *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale.* Leipzig und Berlin 1918 (2. fast unveränderte Auflage 1927), B. G. Teubner.
3. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* 3 Bde. Leipzig 1927, S. Hirzel. [*Abk.: Vorles.*]

Legendre, A. M.

1. *Essai sur la théorie des nombres.* Paris an VI (= 1798), Duprat.
2. Aufl. Paris 1808, Courcier. [*Abk.: Essai.*]
2. *Théorie des nombres.* 2 Bde. (An Stelle einer 3. Aufl. des Essai.) Paris 1830, F. Didot. [*Abk.: Théorie.*]

National Research Council siehe unter: Committee on Algebraic Numbers.

Smith, H. J. St.

*Report on the theory of numbers.* In sechs Teilen erschienen in dem *Report for the British Association* 1859—1865 = *The Collected Math. papers of H. J. St. Smith*, 1, S. 38—364.

[*Abk.: Report.*]

Sommer, J.

*Vorlesungen über Zahlentheorie. Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper.* Leipzig und Berlin 1907, B. G. Teubner.

Steinitz, E.

*Algebraische Theorie der Körper.* *J. f. Math.* 137 (1910), S. 167—309.

Wertheim, G.

*Anfangsgründe der Zahlenlehre.* Braunschweig 1902, Vieweg & Sohn. [*Abk.: Anfangsgründe.*]



# Register.

## A.

Abbildung 691, 731; konforme A. 735f., 742, 1315; A. durch lineare Fkt. 737; A. mehrfach zusammenhängender Gebiete 745.

Abelsche Fkt. 886, 895; A. Differential 860; A. Integral 481, 878; A. Theorem 823, 883; A. Gruppe 202, spezielle lineare A. Gruppe 248; A. Glchn. 305; einfache A. Glchn. 306, 333; algebr. Auflösbarkeit der A. Glchn. 309; A. Stetigkeitssatz 434, 712, 771; Verallgemeinerungen desselben 771; A. Summabilität 772.

Abgeleitete einer ganzen rat. Fkt. 261; a. Gruppe 189; a. Kovariante 590; a. Matrix 138; 146.

Abgeschlossene Menge 27, 687, 1028; a. Hülle 1028, 1029; a. Integral 1027; a. Kern 1265; a. Ordnungstypus 22; a. Form 1278.

Ableitung 457, 692, 1066; partielle A. 465; A. einer homogenen Fkt. 466; A. der Theta- und Sigmafkt. 792; A. einer Fakultätenreihe 1215; A. einer Menge 28, 687, 1028; rechte, linke A. 1066;  $\omega$ -A. 1360;  $\varphi$ -A. (de la Vallée Poussin) 1361.

Abnehmende Fkt. 474.

Abschätzung der Koeff. und des Restes einer Potenzreihe 714; A. der Fourierkoeffizienten 1334f., 1368; A. der kleinsten pos. prim. Wurzel einer Primzahl 1481; A. der kleinsten pos.  $n$ -ten Potenznichte 1437; A.

der kleinsten pos. quadrat. Nichtreste 1511; A. von Charakterensummen 1532; A. von Restgliedern 1197, 1515, 1518, 1523, 1528; A. zahlentheoret. Fkt. 1518, 1522.

Abschnitt 23.

absoluter Betrag 12; a. Differentialrechnung 468, 589, 598; a. Invariante der  $\wp$ -Fkt. 806; a. Minimum 651; a. Rationalitätsbereich 290; a. konvergent 424, 493; a. stetig 1088.

Abstand 688, 1027, 1365.

abstrakte Gruppentheorie 170; a. endliche Gruppen 194.

abteilungsweise monoton 459, 488. abundant 1571.

abzählbar 19, 688.

Addition natürl. Zahlen 4; reeller Zahlen 7; A. von Matrizes 79; A. von Ordnungstypen 21.

Additionstheorem, algebr. A. 796; A. der Jacobischen ellipt. Fkt. 802; A. der  $\wp$ -Fkt. 807; A. der Theta- und Sigmafkt. 790; A. der Thetafkt. 907; A. der ellipt. Integrale 822, 823; A. der Abelschen Fkt. 897; A. der Kugelfkt. 1407; A. der Besselschen Fkt. 1438.

additive Zahlentheorie 1539ff.

adjungierte Determinante 61; a. Differentialgleichg. 538; a. Eigenfunkt. 1267; a. Fkt., a. Kurve 867, 870; a. Matrix 138; a. System Pfaffscher Glchn. 582; a. Differentialausdruck 1134,



- 1285, 1303; sich selbst a. Differentialausdruck 1135, 1286, 1303.  
 Adjunktion 290, 302.  
 Affekt 305.  
 Affinitätsreziprokante 393.  
 ähnliche Gruppe 184; ä. Kollineationsgruppen 234; ä. Mengen 21; ä. Transformationsgruppen 604.  
 Ähnlichkeit von Substitutionen 84, 116.  
 Airysches Integral 1431.  
 akzessorische Irrationalität 301, 321.  
 Alef 25.  
 Algebra (historisch) 251; Fundamentalsatz der A. 260.  
 algebraische Differentialglg. 1. O., 536; a. Fkt. 31, 481, 849; Integrale a. Fkt. 481; Körper a. Fkt. 481; a. Größen, a. Körper 293; a. auflösbare Glg. 320; a. Invarianten 392; a. Kurven 481, 865, 869; a. Zahlen 248, 293, 1461, 1472; a. Additionstheorem 796; Stellen a. Charakters 732.  
 Algorithmen z. Auswertung des Jacobischen Symbols 1509; A. zur Berechnung der Gaußschen Summen 1533.  
 Algorithmus, Euklidischer 258, 449, 1465, 1484, 1510.  
 allgemeines Integral einer gewöhnlichen Diffglg. 531, 1098.  
 alternierende bilineare Formen 88, 129; a. Gruppe 207; a. Fkt. 220; a. Kern 1266; a. Verfahren 1126, 1302, 1309.  
 ambig 1502.  
 Ampèresche Transf. 610.  
 analysis situs 853.  
 analytische Fkt. 697, 727; a. darstellbare Fkt. 1058; a. Fortsetzung 725, 732, 759; a. Gebilde 732; a. Kurvenbogen 743; a. Zahlentheorie 1461, 1515 ff.  
 anceps 1502.  
 Anfangszahl 25.  
 anharmonische Gruppe 238.  
 Anwachsen einer Fkt. in der Nähe des Konvergenzkreises 773.  
 Anwendungen der ellipt. Fkt. 843.  
 Anzahl der Wurzeln einer Glg. (innerhalb eines Bereichs) 348; A. der reellen Wurzeln 339; A. d. Nullstellen und Pole 723.  
 apolar 377.  
 Approximation von Wurzeln 349; sukzessive A. 354, 530; A. durch trigonometr. Polynome 1371.  
 Approximationen, diophantische 1461.  
 äquianharmonischer Fall der  $\wp$ -Fkt. 830.  
 äquivalente Mengen 17; ä. Fkt. 1063; ä. Gruppen 184; ä. Kollineationsgruppen 234; ä. Divisoren 862; ä. Transform. 900.  
 Äquivalenz von Matrizes 89, 90, 107; Ä. von singulären Scharen bilinearer Formen 114; Ä. bez. einer Gruppe 931; Ä. irrationaler Zahlen 451; Ä. Pfaffscher Formen 580; Ä. quadrat. Differentialformen 599; Ä. nach einem Doppelmodul 182; Ä. zweier Fkt. 1063; Ä. quadrat. Formen 1560.  
 arcus 686.  
 Argument 686.  
 arithmetische Gruppe 245; a. Mittel (Methode des) 1126, 1302; a. Reihe 421, 1526, 1568.  
 arithmetisch-geometrisches Mittel 42, 840.  
 Aronholdscher Prozeß 374, 405.  
 assoziative Verknüpfung 2, 7; a. Gesetz 1468.  
 assoziierte Kovarianten 390; a. Differentialglgn. 543; a. Fkt. 762.  
 asymptotische Darstellung einer Fkt. 429; a. D. der Besselschen Fkt. 1432 ff.; a. Verteilung der Eigenwerte 1149; a. Eigenschaften der Lösungen part. Diffglgn. 1150, 1232; a. Wert 768; a. Verhalten zahlentheoret. Fkt. 1514, 1518 ff., 1546, 1548.  
 asyzygetisch 383.  
 auflösbare Gruppe 199, 321; a. Glggn. 321.

Auflösung von Gleichn. 353—355.  
 Ausartungen der ellipt. Fkt. 829.  
 Auslegungsmethode 1302.  
 ausführbares Integral 480.  
 ausgezeichnete Untergruppe 930;  
 a. Kongruenzgruppen 997.  
 Ausschließungsmethoden 1486,  
 1513.  
 äußerer Inhalt 1133; ä. Maß 1039,  
 1045.  
 außerwesentlich singuläre Stelle  
 721; a. Teiler 868.  
 automorphe Fkt. 915 ff.; a. Form  
 973; a. Transf. einer Form 135,  
 136.  
 Automorphismen eines endl. Körpers  
 1492.  
 Automorphismus (von Gruppen)  
 192.  
 azygetisch 903.

### B.

Bahnkurven (einer eingliedrigen  
 Gruppe) 612, (einer Substitution)  
 921.  
 Bairesche Klasse 37, 490, 1059.  
 Basis (einer Abelschen Gruppe)  
 203, (eines Formenmoduls) 394,  
 (der natürl. Logarithmen) 435;  
 B. der Additionsgruppe in einem  
 endl. Körper 1492; B. eines  
 Ideals 1471.  
 Basiselement 203; B.fkt. 1320.  
 bedingt konvergent 424, 442, 446,  
 493.  
 befreundete Zahlen 1571.  
 Begrenzung 688; B.spunkt 1029.  
 Belegungsmenge 19.  
 Beltramsche Diffglh. der Gefälls-  
 fkt. 633.  
 Bereich 504, 688, 1468.  
 Bernoullische Fkt. 519, 1219; B.  
 Glhch. 534; B. Polynome 1193,  
 1217; B. Zahlen 422, 436, 520,  
 1217.  
 Bertrand'sches Problem 216.  
 Berührungstransformation 607 ff.  
 beschränkt 687, 1027, 1047, 1274,  
 1275.  
 Besselsche Fourierreihe 1446; B.  
 Fkt. 1291, 1420 ff., 1523; B. Inter-  
 polationsformel 1196; B. Un-  
 gleichung 1270, 1368, 1393.

bestimmtes Integral 486, 694 ff.  
 Bestimmtheitsweg 768.  
 Betrag, absoluter 7, 685, 735.  
 bewegliche Singularitäten (bei ge-  
 wöhl. Diffglh.) 547.  
 Bewegungsgruppe 171, 606.  
 Bézout'sche Determinante 270.  
 Bézoutiante 271, 342.  
 bilineare Form 87 ff.; alternierende  
 b. F. 129; b. F. von unendlich  
 vielen Veränderl. 165, 1275.  
 binäre Formen 358 ff., 387 ff.; b.  
 Kollineationsgruppen 236.  
 Binomialkoeffizienten 46.  
 binomische Glhch. 320; b. Reihe  
 434; b. Integrale 483; b. Kon-  
 gruenz 1494.  
 biquadratische Glhch. 285 ff.  
 birationale Transf. 858 ff.  
 Bohrsche Fkt. 1393 f.  
 Borchardtsche Moduln 243; B.  
 Satz (über Anzahl reeller Wur-  
 zeln) 343.  
 Borelsche Menge 1044; B. Über-  
 deckungssatz 1036; B. Summa-  
 bilitätspolygon 764.  
 Brachistochrone 678; B. im wider-  
 stehenden Mittel 682.  
 Brennpunkt 646.  
 Bring-Jerrardsche Normalform 279.

### C.

Cantor-Bendixsonscher Satz 1030.  
 Carathéodorys Satz über die Ab-  
 bildung des Randes 744; C. Ver-  
 allgemeinerung des Picardschen  
 Satzes 767.  
 Carathéodory-Landauscher Satz  
 710.  
 Cardanische Formel 282.  
 casus irreducibilis 283.  
 Cauchy'sche Integralformel 348,  
 702; C. Integralsatz 699 f.; C.  
 Determinante 68; C. Multiplika-  
 tionsregel 715; C. Reihensatz  
 713; C. Problem für part. Diff-  
 glhcn. 1107, 1158, 1165.  
 Cauchy - Riemannsche Diffglhcn.  
 693, 1118.  
 Cayleysche Formeln (orth. Subst.)  
 132; C. Glhch. 362; C. (Omega-)  
 Prozeß 372, 405.

Cesàrosche Mittel, C. Summierbarkeit 430, 771 ff., bei trigon. Reihen 1340 ff., 1360 ff., 1375 ff.  
 Charaktere (mod.  $m$ ) 1481, 1509, 1529, 1530 ff., 1551.  
 Charakteristik (der quadr. Form) 123, (der Thetafkt.) 832, 838, 892, (der part. Diffglggn.) 563, 568, 1109, 1112.  
 Charakteristikentheorie 349.  
 charakteristische Fkt. (einer Matrix) 85, (eines Moduls) 398, (einer infinit. Berühr.-Transf.) 611; ch. Glchg. 545, 548, 1232.  
 Christoffelsches Symbol 591, 595.  
 Clairautsche Glchg. 536.  
 Clebschscher Prozeß (Überschiebung) 381; Cl. Übertragungsprinzip 410.  
 Concomitante 138.  
 Cotesische Formeln 523, 1201.  
 Cremonatransformation (birationale Tr.) 602, 858.  
 C-summierbar 1380 ff., 1385 ff.

### D.

Darstellbarkeit einer Fkt. durch trig. Reihen 1326, 1331 f., 1384.  
 darstellende Integrale 1352.  
 Darstellung einer analyt. Fkt. durch Reihen von Polynomen 760, durch Integrale 761; asymptot. D. 429; D. einer Gruppe 230; D. willkür. Fkt. 432; D. natürl. Zahlen als Summe  $k^{\text{ter}}$  Potenzen 1546; D. natürl. Zahlen als Summe von Quadraten 1550; D. natürl. Zahlen als Summe von Primzahlen 1547 ff.; D. von Zahlen oder Formen durch quadrat. Formen 1560.  
 Darstellungsgruppe 235.  
 defective 1571.  
 Defekt 823.  
 deficient 1571.  
 definit 123, 475; d. Integral 649.  
 Definitionsbereich 1046; D.-Glchg. 193.  
 Deformationstheorie 617.

Delisches Problem 325.  
 Derivierte 457, 1065.  
 derivierte Gruppe 605; d. Matrix 154.  
 Descartesche Zeichenregel 345.  
 descente indéfinie 1552, 1556.  
 Determinante 52 ff.; adjungierte D. 61; symmetr. D. 63; D. einer quadrat. Form 118, 1559; Bézoutische D. 270; Fredholmsche D. 1252; Hermitesche D. 65; Hessesche D. 118, 160, 362; Jacobische D. 156, 360, 407; Smithsche D. 71; Sternsche D. 71; Vandermondesche D. 68; Wronskische D. 154; kubische D. 167; unendl. D. 161.  
 Determinantenteiler 102; D.-transf. 142.  
 Diagonalmatrix 81.  
 dialytische Methode 269.  
 dicht 22, 1028, 1365.  
 Diedergruppe 236, 944.  
 Differential 457; totales D. 466; Abelsches D. 860.  
 Differentialausdruck, adjungierter 1134, 1285; Diff.form 579, 588, 973; quadrat. Diff.form 592 ff.  
 Differentialgleichung, Definition 529, 538; lineare D. 545, 1100; D. 1. O. 532; gestattet eine Transf. 619; partielle D. 561, 1107 ff.; totale D. 573; D. mit Fundamentallösungen 546; D. vom Fuchsschen Typus 549; Systeme von D. 553; Cauchy-Riemannsche D. 693; Gaußsche (hypergeom.) D. 328; Lamésche D. 550, 831; Laplacesche D. 705, 1295; Riccatische D. 1104; D. der schwingenden Saite 1330; D. der Wärmeleitung 1175; D. der Thetafkt. 784; D. der Sigmafkt. 793; D. der  $\wp$ -Fkt. 804; D. der Thetanullwerte 792; D. der ellipt. Integrale 827; D. einer Kovariante 368.  
 Differentialinvariante 598, 614 ff.; D.-kalkül, absoluter 598; D.-klasse 863.

- Differentialparameter 468, 598, 616, 618.  
 Differentialquotient 457, 692, 1066;  
   D. höherer Ordnung 462; D. nicht ganzzahl. Ordn. 465; D. einer Determinante 153.  
 Differentialrechnung, Geschichtliches 454; absolute D. 468, 598.  
 Differentialrelationen für Theta-nullwerte 793; D. zwischen den Moduln der ellipt. Integrale 828.  
 Differentialteiler 860; D.klasse 863.  
 Differentiation, numerische 1198;  
   D. einer unendl. Reihe 460;  
   D. der trigon. Reihen 1359f.;  
   D. einer Matrix 153; D. unter dem Integralzeichen 496;  
   D.sregeln 460; Umkehrbarkeit der D.ordnung 465.  
 Differentiationsprozeß bei automorphen Formen 973.  
 Differentiator 616.  
 differenzierbar 463, 692, 1066; nichtd. Fkt. 458f.  
 Differenzen 1190; D.determinante 1231; D.gleichn. 521, 555ff., 1193; lineare D.gleichn. 558, 1229; normale D.gleichn. 1238; Poincarésche D.gleichn. 1233.  
 digredient 404.  
 Dilatation 608.  
 D-Integral 1090.  
 Dimension 398, 863.  
 Diophantische Approximationen 1461; D. Gleichn. 1459, 1462, 1544.  
 Dirichletsche Reihen 718, 1214, 1515ff., 1518f., 1521, 1525ff.; D. diskontinuierlicher Faktor 499; D. Prinzip 675, 742, 1126; D. Problem 1298.  
 Dirichlets Satz über die arithm. Progression 1526; D. Teilerproblem 1522.  
 diskontinuierliche Lösungen 647; d. Faktor 499.  
 Diskontinuitätsbereich 931, 954; normaler D. 954.  
 Diskriminante 118, 274, 284, 286, 288, 359, 362, 365, 371, 407, 1507, 1561; D.fläche 376; D.kurve 1098.  
 distributive Verknüpfung 2, 7; d. Gesetz 1469.  
 Divariante 405, 410.  
 divergent 8, 13, 424, 429, 442, 447, 453.  
 Divergenzerscheinungen bei trigon. Reihen 1354ff., 1383.  
 Division 4, 5; D. mit Rest 1465.  
 Divisor 180, 258, 295, 857; D. der Doppelpunkte 857, 867, 869; D. der Rückkehrpunkte 873; D. der Wendepunkte 873; D.enschar 872; D.ensysteme 1470.  
 Doppelfolge 34; D.integral 506; D.kettensatz 1473; D.modul 178, 1487, 1491; D.punkte 866; D.punktdivisor 857, 867, 869; D.reihe 439; D.reihensatz von Weierstraß 709, 714; D.schicht 1118, 1296.  
 doppeltperiodische Fkt. 794, 830.  
 Drehstreckung 738.  
 Drehung 738; D.gruppen 176; D.satz von Bieberbach 741.  
 Dreieckszahl 50, 423.  
 dreifaches Integral 508.  
 Dreigeradensatz 707.  
 Dreikreisesatz 706.  
 Dreiteilung der hyperellipt. Fkt. 244, 336.  
 Duprésche Zahlenreihen 1563.  
 Durchschnitt 180, 187, 687, 1026.
- E.**
- e 435.  
 ebene Menge 1026.  
 echter Teiler 1463, 1471.  
 Eckenbedingung, Erdmannsche 647.  
 E-Funktion 635, 643, 667; 883;  
   E-F. für Doppelintegrale 674.  
 Eigenfunktion 1263, 1267; 1271.  
 Eigenlösung 1288.  
 eigentliche Darstellung 1560; e. Charakter 1531; e. Teiler 1463; e. Maximum 1052; e. Permutation 206.  
 Eigenwert 1263, 1267, 1271, 1278, 1288; asymptot. Verteilung der E. 1149.  
 eindeutige Fkt. 690, 729.  
 Eindeutigkeitssatz 1327f., 1357, 1384ff.

- einfache Gruppe 188, 201, 605.  
 einfaches Ideal 1473.  
 einfach transitive Gruppe 605.  
 eingliedrige Gruppe 603.  
 Einheiten 1463.  
 Einheitsselement 173; E. eines Ringes 1469; E.form 1276; E.-ideal 1471; E.wurzeln 311, 312, 1483, 1504, 1529 ff., 1545.  
 Eisensteinsche Reihen 1521; E. Satz 292, 780.  
 elastische Kurve 681; e. Schwingungen einer homog. Membran 1141.  
 Element (eines Kettenbruchs) 444; E. eines algebr. Gebildes 850; E. einer Menge 1025; E. des  $R_{n+1}$  609.  
 elementare Gruppe 198; E.integral 3. Gattung 862; E.kegel 576; E.kovariante 373; E.teiler 86, 102, 104.  
 Elementverein 608.  
 elliptische Fkt. 794 ff., 1521, 1544, 1552, 1557, 1559; Jacobische e. Fkt. 797; Weierstraßsche e. Fkt. 803; e. Fkt.  $r$ ten Grades 796; e. Fkt.  $n$ ter Stufe 805; e. Fkt. 2. und 3. Art 830; Multiplikation der e. Fkt. 832; Teilungsproblem der e. Fkt. 833; e. Fkt., numer. Berechnung 841; e. Fkt., Anwendungen 843; geschichtl. Überblick 843.  
 elliptische Integrale 798, 815; vollständige e. I. 817; kanonische Form der e. I. 816—818; Reduktion der e. I. auf die Normalform 825; Periodizität der e. I. 821; Additionstheoreme der e. I. 822; Reihenentwicklungen der vollständigen e. I. 824; numer. Berechnung der e. I. 840; Übergang von der Weierstraßschen zur Jacobischen Bezeichnung der e. I. 829.  
 elliptische Modulfkt. 310, 328, 329, 915, 991 ff.  
 elliptische Substitution (Transformation) 739, 925; e. partielle Diff.-glchg. 1109, 1133 ff., 1304; e. Körper 851.  
 Emanante 374.  
 endliche Fkt. 1047; e. Gruppe 606.  
 Endlichkeit des Invariantensystems 400.  
 Entfernung 1027.  
 E-Prozeß 1246.  
 Erdmannsche Eckenbedingung 647.  
 Ergänzungsklassen 863; E.satz 1218, 1226; E.sätze zum Reziprozitätsgesetz 1500.  
 erweiterte Gruppe 615; e. infinitesimale Transformation 615.  
 Erweiterung eines Größensystems 3; E. einer zykl. Gruppe 938.  
 erzeugende Elemente 193; e. Figur 758; e. Substitutionen einer Gruppe 933.  
 Euklidischer Algorithmus 258, 449, 1465, 1484, 1510.  
 Eulersche Berührungstranf. 610; E. Fkt.  $\varphi(n)$  1478, 1517 ff.; E. Glchg. 571, 629; E. Interpolationsformel 264; E. Konstante 1207; E. Polynome 1219; E. Summabilität 772; E. Summationsformel 521; E. Zahlen 437, 1219.  
 Eulersches Kriterium 1495, 1498.  
 Euler-Fouriersche Formeln 1326.  
 Euler-Maclaurinsche Summenformel 429, 1205, 1392.  
 Evertantenbildung 376.  
 Everettsche Interpolationsformel 1196.  
 Existenz eines Minimums 651, 676.  
 Existenzbereich 756; E.beweis, Cauchyscher 530.  
 Exponent 1377.  
 Exponentialfkt. 40, 715, 716; E.-reihe 435.  
 Extremale 630, 640, 654, 658, 673; E.feld 633, 642.  
 Extremum 474, 476.
- F.**
- Fabryscher Lückensatz 776.  
 Faktorgruppe 187; F.tafeln 1524.  
 Faktorielle 1193.



- Fakultät 43, 1193, 1539; F.-koeffizienten 1193; F.reihen 1214 ff., als Koeffizienten von linearen Differenzenglchgn. 1234.
- Faltung 383.
- fastperiodische Fkt. 1392 ff.
- fast überall 1063.
- Fatouscher Satz (über die Grenzwerte von beschränkten Fkt.) 769; F. S. über nicht fortsetzb. Reihen 776; F. S. über die Konvergenz in einem regulären Pkt. 778; F. S. über ganzzahlige Reihen 781.
- Fehlerintegral 1242.
- Féjersche Mittel 1340 ff., 1368 ff.
- Feld 176, 290; (von Extremalen) 633, 642, 663; F.fläche 671; F.-integral 634, 665; Riemannsches F. 733.
- Fermatsche Zahlenreihen 1563; F. Satz 1478, 1481, 1489, 1568.
- Ferrari 286.
- Ferro 282.
- feste Singularitäten 547.
- Fibonacci'sche Zahlenreihe 1563.
- Figur, erzeugende 758.
- figurierte Zahlen 52.
- Fischer-Riesz'scher Satz 1370.
- Fixpunkt 739, 920.
- Fläche 506; Fl. konst. Krümmungsmaßes 573; Kummersche Fl. 336, 907; Riemannsches Fl. 729, 851; Fl. 3. Ordn. 336; Fl. 4. Ordn. 337.
- Flächenelement 577; Fl.inhalt 487; Fl.potential 1118.
- Folge 8, 13, 708.
- Form 358; ternäre F. 407 ff.; quaternäre F. 418; bilineare F. 87; quadrat. F. 118, 1502, 1553 ff.; automorphe F. 973; Hermite'sche F. 89; Schwarzsche F. 392.
- Formen von unendlich vielen Veränderlichen 165, 1273; F.büschel 374; F.körper 402; F.modul 393 f.; F.problem 228, 333; F.schar 395.; F.system 227, 399.
- Fortsetzung, analytische 725.
- Fourierkoeffizienten oder -konstanten 1264, 1272, 1326, 1334 f., 1368; F.reihen, Besselsche 1446.
- Fouriersche Integrale 1388; F. Potenzreihen 1330; F. Integraltheorem 1390.
- Fouriersche Reihen 431, 1326, 1536, 1537; restringierte F. R. 1379; formale Operationen bei F. R. 1371 ff.
- Fourierscher Satz betr. Anzahl reeller Wurzeln 344.
- Fredholmsche Determinante 1252; F. Integralglch. 1250.
- Fresnelsches Integral 500.
- Frobeniussche Kovariante 86.
- Fuchsscher Typus 549; F. Theta-reihen 979.
- Führer eines Charakters 1532.
- Fundamentalebene 959; F.diskriminante 1507; F.größen 507; F.glch. (bei linear. Diffglch.) 548; F.kombinante 375; F.perioden 879; F.reihe 22; F.substitution 547; F.system 541, 556, 1101, 1230; F.theorem (Uniformisierungssätze) 1018; F.transformation 812, 838; F.eigenschaften der ellipt. Fkt. 797, 801 f.
- fundamentales Periodenparallelogramm 794.
- Fundamentalsatz der Algebra 260, 268, 349; F. der Integralrechnung 487, 1077, 1084, 1088; F. über quadrat. Reste 319; F. der konform. Abb. 742; Liescher F. über Transf.gruppen 602, 604.
- Funktion, Dirichlets Definition 30, 690, 1046; analyt. darstellb. Fkt. 1058; Fkt. der nullten, ersten, ... Baireschen Klasse 37, 1058; meßbare Fkt. 1062; inverse Fkt. 36; reguläre Fkt. 459, 697; willkür. Fkt. 1330; unentwickelte Fkt. 468; punktiert unentwickelte Fkt. 488; charakteristische Fkt. (eines Moduls) 398; zahlentheoret. Fkt. 1514 ff.
- Funktionen, Abelsche Fkt. 886; adjungierte Fkt. 867; algebraische Fkt. 31, 849; alternierende Fkt. 220; assoziierte Fkt. 762; automorphe Fkt. 888, 915, 960; Bernoullische Fkt. 519, 1219; Besselsche Fkt. 1291, 1420, 1523;



Bohrsche Fkt. 1394; doppelt-periodische Fkt., elliptische Fkt. 794, 867, 1521, 1544, 1552 ff.; eindeutige Fkt. 729; ellipt. Modulftkt. 915, 1521, 1544, 1559, 1562; fastperiodische Fkt. 1392 ff.; Gammaftkt. 500, 696, 727, 749, 1207, 1228, 1241; ganze Fkt. 714, 748; ganze rationale Fkt. 31, 257; Greensche Fkt. 1128; Hankelsche Fkt. 1422, 1523; harmonische Fkt. 705, 1295; homogene Fkt. 31; Kegelfkt. 1417; Kugelfkt. 1398 ff.; lemniskatische Fkt. 829; Lommelsche Fkt. 1442; meromorphe Fkt. 754; Mittag-Lefflersche Fkt. 763; Modulftkt. (s. ellipt. M.); polymorphe Fkt. 1045; Potentialftkt. 705, 1295; rationale Fkt. 31, 258, 723; Ringftkt. 1416; symmetrische Fkt. 220, 265; Sturm-Liouville'sche Fkt. 1289; Thetaftkt. 783 ff., 889 ff., 1350, 1392, 1536, 1542, 1544, 1552 ff.; Zetaftkt. 501, 807 ff., 1207, 1392, 1518 ff., 1554; Zylinderftkt. 1449.

Funktionen eines Körpers 854; Fkt.körper, algebr. 402; Fkt.kongruenzen 1481; Fkt.schar, lineare 1364; Fkt.schar, normale 710.

Funktionaldeterminante 156, 360, 377, 406, 468.

Funktionselement 727; Fkt.zweig 730.

Fußpunkttransformation 608.

## G.

Galoissche Glchg. 255, 296, 994; G. Imaginäre 1487, 1491; G. Resolvente 296; G. Theorie 221 ff. Galoissche Gruppe 298; G. G. der kub. Glchg. 285; G. G. der bi-quadr. Glchg. 288; G. G. der Modularglchg. 214; G. G. der Kreisteilungsglchg. 317. Gammaftkt. 727 ff., 1207, 1228, 1230; unvollständige G. 1241. ganz (mod  $m$ ) 1485.

ganze Fkt. 714, 749; g. rat. Fkt. 31, 257; g. Divisor 857.

ganzzahlige Multiplikation der ellipt. Fkt. 833.

Gattungsbereich 293.

Gaußsche Diffglch. 328; G. ganze komplexe Zahlen 1553; G. Klammern 450; G. Summen 319, 1208, 1392, 1533 ff.; G. Transformation der ellipt. Fkt. 814.

Gaußsche Formeln zur Interpolation 1196; G. F. zur mechan. Quadratur 526, 1209.

Gaußscher Integralsatz 509, 1114.

Gaußsches Lemma 1502, 1538; G. Variationsproblem 1266.

Gebiet 688.

Gebilde, algebraisches 849.

gebrochene rationale Fkt. 258.

Gefällsfunktion 633, 663.

gemischte Gruppe 606.

geometrische Reihe 424.

geordnete Menge 20.

gerade Permutation 206.

Gesamtschwankung 489.

Geschlecht 481, 750, 823, 854, 855, 859, 965.

Geschlechter quadrat. Formen 1558, 1561.

gestatten, eine Transf. 613.

getrennte Intervalle 1030.

Gewicht 266, 358, 368.

gewöhnliche Diffglchgn. 529 ff., 1096 ff.

Gibbssche Erscheinung 1343, 1410.

Girardscher Satz 1552.

Gitterpunkt 1503.

gleichberechtigte Permutationen 208; gl. Untergruppen 930.

Gleichgewichtslage eines Fadens 681, einer Feder 681.

gleichmäßig konvergent 432, 443, 708; gl. stetig 1050.

Gleichung, binomische 320; Galoissche Glchg. 994; Jacobische Glchg. 6. Gr. 330; Keplersche Glchg. 1445.

Gleichungen, kubische 281; biquadratische Glchg. 285; reziproke Glchg. 289; Glchg. 5. Gr. 254,

326, 334, 878; Glchg. 6., 7. u. höh. Grades 334f.; Abelsche Glchg. 305; zyklische Glchg. 307; algebr. auflösb. (metazykl.) Glchg. 320; Kreisteilungsglchg. 313; Glchg. einer Gruppe 193.

Gleichungssysteme, die eine  $r$ -gliedr. Gruppe gestatten 614. gleichzusammengesetzt 605.

Gliederzahl einer Transf.gr. 602.

Goldbachscher Satz 1547f.

goniometrische Reihen 436.

Göpelsche Gruppe 904.

Grad (einer Determinante) 54, (einer ganzen rationalen Fkt.) 259, (einer Invariante oder Kovariante) 358, 367, (einer lin. hom. Gruppe) 246, (einer Fkt.) 855, (der ellipt. Fkt.) 795, (einer Transformation) 899.

Graeffesche Methode 356.

Greenscher Satz 510, 1285, 1297, 1303; Gr. Formeln 1115, 1134f.; Gr. Fkt. 1126ff., 1137, 1184, 1286, 1300, 1307, 1313,

Gregory-Laplacesche Formel 1208; Gr.-Newtonsche Interpolationsformeln 1195.

Grenze 8, 13; obere und untere Gr. 34; natürliche Gr. 734.

Grenzelement 22; Gr.exponent 750; Grenzkreisgruppe 958; Gr.zahl 24; Gr.punkt 933, 1029; Gr.zykel 1099; Gr.-kreistheorem (Koebe-Poincaré) 747, 1099; Gr.wert 32, 41, 424, 473, 688.

Größe, algebr. 293; primitive (imprimitive) Gr. eines Körpers 295.

Größensystem 1; nicht-archimedische Gr. 17.

größter gemeinsamer Teiler (von Gruppen) 180, (von Moduln) 398, (von ganzen Zahlen) 449, (von Fkt.) 105.

Grundbedingungen (G. B.) bei trigon. Reihen 1337, 1344ff., 1361.

Grundform 111, 369, 976; Gr.funktionen, symmetrische 218; Gr.glchg. (einer Matrix) 85; Gr.integral 480, 634, 665; Gr.-lösung 1101, 1138, 1169, 1286, 1315.

Gruppe, s. auch Transformationsgruppe, (historisch) 168; Definition 172; 1468, 1477, 1485f., 1492, 1495, 1530; Abelsche (vertauschbare, kommutative) Gr. 174, 202f., 248; abgeleitete (derivierte) Gr. 189; arithmetische Gr. 245; abstrakte endl. Gr. 180, 194; alternierende Gr. 202, 207; auflösbare (metazyklische) Gr. 199ff.; ähnliche (äquivalente, gleichberechtigte, konjugierte) Gr. 184; Cremonasche Gr. 602; einfache Gr. 188, 201; elementare Gr. 198; endliche Gr. 174; Gr. der regelm. Körper (Polyedergr.) 236ff., 945; Galoissche Gr. (einer Glchg.) 298; Göpelsche Gr. 904; Hamiltonsche Gr. 203; harmonische Gr. 238; Hessesche Gr. 241; homogene Gr. 606, 969; Isomorphismengr. 192; Kleinsche Gr. 242; Kollineations- (projektive) Gr. 175, 233, 606; Kommutatorgr. 189; kontinuierl. Gr. 602; Kongruenzgr. 202; Gr. linearer Transform. 222, 606, 739, 917; metabelsche Gr. 204; Modulargr. 214; orthogonale Gr. 249; perfekte Gr. 189; Permutationengr. 229; projektive Gr. 606; Gr. von Punkttransf. 601; Quaternionengr. 204; Quotientengr. 187; reziproke Gr. 100; spezielle Gr. 199; symmetr. Gr. 207; transformierte Gr. 184; Valentinergr. 242; zerfallende Gr. 181; zerlegbare Gr. 181; zyklische Gr. 174, 933.

Gruppe einer ration. Fkt. 217; Gr. der Bewegungen des R. 606; Glchg. einer Gr. 193; Indexreihe einer Gr. 197; Gr. geometr. Glchg. 337.

Gruppenelemente (ausgezeichnete, isolierte, invariante) 186; Gr.-matrix 230.

## N.

Hadamardscher Satz über primitive Fkt. 753; H. Kompositionssatz 779; H. Lückensatz 775.

Halbdeterminante 64; H.gruppe 191.

Hamiltonsche Gruppe 203.  
 Hamilton-Jacobische Glchg. 669, 670, 672.  
 Hankelsche Fkt. 1422, 1523.  
 Hardy-Ramanujan-Littlewoodsche Methode 1545f., 1562.  
 harmonisch konjugiert 377; h. Fkt. 705, 1295; h. Gruppe 238; h. Kugelfkt. 1408, 1410; h. Fall der  $\wp$ -Fkt. 826, 829.  
 harmonische Kugelfkt. 1408, 1410.  
 Harmonizante 377.  
 Häufungspunkt 27, 687, 1027, 1365.  
 Hauptform 974; H.fkt. (eines Fund.-ber.) 966; H.glchg. 278; H.glchg. 5. Gr. 327, 338; H.gruppe 171; H.ideal 1471; H.klasse 863; H.kongruenzgruppe 987; H.kreisgruppe 957; H.kreistheorem 1018; H.kurve (eines Körpers) 874; H.lösung (einer Differenzenglchg.) 1222; H.reihe (einer Gruppe) 197; H.resolvente (der Ikosaederglchg.) 326; H.-stern 758; H.symbole (bei kovarianten Systemen) 591; H.wert (eines Integrals) 492; H.zweig 731.  
 Hermitesche Determinante 65; H. Formen 128, 226; H. Kern 1266; H. Polynome 1454; H. Reziprozitätssatz 383; H. Satz (über reelle Wurzeln einer Glchg.) 339.  
 Hessesche Determinante (Kovariante) 118, 160, 362ff., 377, 391; H. Gruppe 241.  
 Hilbertscher Raum 1371f.; H. Unabhängigkeitssatz 634, 642.  
 Hilbert-Waringscher Satz 1546.  
 Hilfsgleichungen 303.  
 hinterer Limes 1048.  
 Höldersche Bedingung 1301; H. Mittel, H. Summierbarkeit 430, 771; bei trigon. R. 1340f., 1360ff.; 1375ff.  
 holoeidrisch isomorph 189.  
 holomorph 697.  
 Holomorphismus 192.  
 homogene Berührungstransformation 610; h. Fkt. 31, 466; h.

Gruppe 969; h. Invarianten 367; h. Substitution 117, 119, 968.  
 Homogeneitätsformeln der Jacobischen Fkt. 812. [234.  
 homomorphe Kollineationsgruppen  
 Homomorphismus 191.  
 Huddesche Regel 251, 261.  
 Hülle, abgeschlossene 1028.  
 Hurwitzscher Satz über Nullstellen 717.  
 hyperbolische Diffglg. 1109, 1157, 1304; h. ellipt. Integral 3. Gattung 818; h. Substitution (Transformation) 739, 925.  
 hyperelliptische Fkt., Dreiteilung 244, 336; h. Thetanullwerte 334; h. Körper 851, 859.  
 hypergeometrische Diffglg. 1017; h. Reihe 328, 448, 464.

## I.

Idealbrüche 1472.  
 Ideale in allgem. Ringen 1470f., 1477; in algebr. Zahlkörpern 1502, 1504, 1554, 1561.  
 Idealklassen 1502, 1512.  
 Idealnorm 868.  
 identische Kovariante 392; i. Transf. 601, 602.  
 Identität von Voronoï 1523; I.en zwischen Summen von Quadraten 1553, 1557f., 1562; Jacobische I. 611.  
 Identitätssatz 715.  
 Ikosaeder 171; I.glchg. 240, 326ff.; I.gruppe 237, 242, 944; Irrationalität 255.  
 imaginär 11.  
 implizit 468.  
 imprimitive Größe 295; i. Permutationsgruppe 210.  
 indefinit 475; i. quadratische Form 123.  
 indifferente Größe 4.  
 Index 56, 194, 347, 930; I.reihe 197.  
 Indikatrix 644, 668.  
 Indizes 1179ff.  
 Induktion, vollständige 4.  
 induzierte Substitution 147.

- infinitesimale Größen 456; i. Transf. 581, 585, 593, 603, 611; homogene i. Berührungstranf. 612; erweiterte i. Transf. 615.  
 Inhalt 28, 488, 1033; I.sfkt. 1034.  
 innerer Punkt 687, 1029; i. Weg 771; i. Maß 1039.  
 in sich dicht 22, 27.  
 integrabel 488, 694; i. Gruppe 605; i. System 561.  
 Integrabilitätsbedingungen 488; I.-faktor 620.  
 Integral 478; bestimmtes I. 486, 694; unbestimmtes I. 487, 699; uneigentl. I. 696; mehrfaches I. 506; I. von Riemann 487, 1072; I. von Lebesgue 489, 1077; I. von Denjoy 1089; I. von Perron 1093; I. von Stieltjes 1328; partielles I. 479; I. algebr. Fkt. (Abelsches I.) 481, 875 ff.; vollst. Abelsches I. 878; I. e 1., 2., 3. Gattung 861, 875; ellipt. I. 815; binomisches I. 483; Cauchysches I. 348, 502; Fouriersches I. 1388; Poissonsches I. 703, 1123; darstellendes oder singuläres I. 1352; I. einer gewöhnl. Diff.-glchg. 531, 1097 f.; singul. I. einer algebr. Diffglchg. 1. Ordn. 536; I. einer part. Diffglchg. 565, 567.  
 Integralgleichungen 1250 ff., 1372, 1394; polare I. 1271; orthogonale I. 1269; Volterrasche I. 1269.  
 Integralinvarianten 618.  
 Integralkörper 1320.  
 Integralkosinus 486, 1455.  
 Integralkurven einer gewöhnl. Diff.-glchg. 531, I. einer Mongeschen Glchg. 576.  
 Integrallogarithmus 486, 1242, 1455, 1528.  
 Integralparameter 619.  
 Integralsatz von Cauchy 699; I. von Gauß 509, 1114; I. von Stokes 509; I. von Green 510.  
 Integrand 478.  
 Integration einer unendl. Reihe 478; I. der Fourierschen Reihe 1373; I. der trigon. Reihen 1377; I. einer rationalen Fkt. 480; I. einer transzendenten Fkt. 484; I. unter dem Integralzeichen 496; numerische I. 1200; Vertauschbarkeit der I.folge 507.  
 Integrationsfaktor 532; I.weg 503; I.theorie eines vollst. Systems mit bek. inf. Transf. 622 ff.  
 integrierbar 694; i. in Riemann'schem Sinne 1072; i. im Lebesgueschen Sinne 1077.  
 Integritätsbereich 1469.  
 Integrodifferentialgleichungen 1318.  
 intermediäres Integral 567.  
 Interpolation 433, 514, 1194; I.-formeln 263 f., 433, 1194; I.-polynom 1195; I.reihen 1198, 1210 ff.; I.methode 530.  
 Intervall 27, 1027, 1030.  
 intransitive Permutationsgruppe 209; i. Transf.gruppe 604.  
 Invariante 203, 227, 358, 392, 401, 605, 612, 926; algebr. I. 392; I. der  $\wp$ -Fkt. 788, 804.  
 invariante Prozesse 405; i. Untergruppe 186, 605.  
 Invariantengleichungen 837.  
 Invariantenkörper 402.  
 Invariantensystem, volles (einer lin. homog. Subst.gruppe) 239; v. Differentialinvariantensystem 616.  
 Invariantentheorie 358 ff.; I. der Gruppe der Beweg. 617 f.; I. der algebr. Formen 618.  
 inverse Fkt. 36; i. Substitution 916; i. Transformation 601; i. Verknüpfung 2; i. Element 173.  
 Inversion 43, 929.  
 irrationale Zahlen 6.  
 Irrationalität 300, 321.  
 Irrationalzahl, Quadrat. 452.  
 irreduzibel 178, 260, 291, 540; i. ganze Fkt. 105; i. Substitutionsgruppen 222; i. Kollineationsgruppen 234; i. Differenzenglchgn. 556; i. System 876.  
 Irreduzibilitätssätze 1494.  
 isobar 266, 367.  
 isoliert 27, 1027; i. singuläre Stelle 719.  
 isomorphe Gruppen 189 f.  
 Isomorphismengruppe 192, 199.  
 Isomorphismus 192.

isoperimetrisches Problem 653,  
680; i. P. für Doppelintegrale 683.  
iterierter Kern 1252.

## J.

Jacobische Bedingung 631, 641,  
646, 662, 674; J. Diffglgch. 631,  
641, 660, 1154; J. Determinante  
156, 360, 377, 406; J. Fkt. 64; J.  
Identität 611; J. ellipt. Fkt. 797;  
J. Glgch. 6. Grades 330; J. Glgch.  
für Doppelintegrale 674; J. Poly-  
nome 1456; J. Thetafkt. 783 ff.;  
J. Multiplikator 533; J. Symbol  
64, 319, 1505 ff., 1509, 1536 f.;  
J. Umkehrproblem 886.

Jensenscher Satz 724.

Jordankurve 689.

Jordanscher Satz über auflösb.  
Glgchn. 321; J. Kurvensatz 690.

## K.

Kamkescher Satz 1547.

Kanonisante (Sylvester) 387.

kanonische Darstellung e. Binär-  
form 387; k. D. e. Ternärform  
418.

kanonische Form e. quadrat. Form  
126; k. F. e. Binärform 4. O., 365;  
k. F. der ellipt. Integr. 816; k.  
F. e. Pfaffschen Form 587; k. F.  
e. Periodensystems 881.

kanonische Fkt. 751; k. Zerschnei-  
dung einer Riemannschen Fläche  
854; k. Klasse 863.

Kapteynsche Reihen 1445.

Katalektikante 388.

Kegelfunktionen 1417.

Kepplersche Glgch. 1445.

Kern 1030, 1250, 1352; lösender  
K. 1251; iterierter K. 1252; Her-  
mitescher K. 1266.

Kette, Sturmsche K. 339.

Kettenbruch 444 ff., 1483, 1510,  
1553, 1564; K. determinante 69;  
K. methode zur näherungsw. Auf-  
lösung von Glgchn. 354.

Kettenlinie 681, 1472 f.

Kettenregel 461, 693.

Kettensätze 1472 f.

Klammerausdruck 563.

Klasse (Fkt. nullter, erster ... Kl.)

37, 490, 1059; Kl. konj. Gruppen-  
elemente 185; Kl. einer Form  
404, 873; Kl. (Weierstraß)-Ge-  
schlecht einer alg. Fkt. 823;  
Kl. von Divisoren 862; Kl. Fou-  
rierscher Reihen 1327 f., 1364 ff.,  
1371, 1374; vollständige Kl.  
Fourierscher Reihen 1365 f.; Kl.  
quadr. Formen 1502, 1512, 1558 ff.

Klassenzahl 1014, 1512, 1558 f.;  
Kl. glgch. 310; Kl. körper 311;  
Kl. konvergenz 1365, 1368 ff.

Klassenzahlrelationen 1014.

Kleinsche Gruppe 242; Kl. Theta-  
reihen 979; Kl. Formenproblem  
228, 333; Kl. Normalproblem  
232, 333; Kl. Oszillationstheorem  
1411.

kleinstes gemeinschaftliches Viel-  
faches (zweier Moduln) 398.

Knotenpunkt 1098: Kn. der Kum-  
merschen Fläche 336.

Koebes Verzerrungssatz 740.

kogredient 84, 404; k. Isomorphis-  
mus 192.

Kollinationsgruppe 233 ff., 241,  
243, 247.

Kombinante 374 f.

Kombinationen 42, 45.

Kombinatorik 1540, 1543, 1555.

Komitanten 367, 373, 408.

kommensurable Gruppen 1004.

kommutative Gruppen 174, 202;  
k. Verknüpfung 2, 19.

kommutatives Gesetz 1468.

Kommutator 189.

komplementäre Menge 27, 1026.

komplexe Gruppen 606; k. Multi-  
plikation 832, 838, 901; k. Va-  
riable 690; k. Zahlen 11, 14, 685;  
k. Zahlen mit  $n^2$  Einheiten 94.

Komposition 181.

Kompositionsreihe 197, 303; K.-  
produkt, K. potenz 1319; K. satz,  
Hadamardscher 779.

Kondensationsprinzip 458; K. punkt  
1028.

konforme Abbildung 736 ff., 1315.



- Kongruenz (von Fkt. bez. einer Primzahl) 177; K.gruppe 202, 245; K.untergruppe der Modulgruppe 987; K. nach einem Ideal 1477; K. nach e. ganzen Zahl 1475 ff.; additive K. zw. gebroch. Zahlen 1484; multiplikative K. zw. gebroch. Zahlen 1485; K. zw. Fkt. 1481; K. nach einem Doppelmodul 1487, 1491; K. mit Unbekannten 1482 f., 1512 f.; K.eigenschaften der Zerfallungsanzahlen 1549.
- konjugierte Gruppe 184; k. komplexe Zahl 12; k. Matrix 87; k. Größen 294; k. Reihe 1330, 1375; k. Zahl 12; k. Punkt (auf Extremalen) 632, 662; k. Potential 1118.
- Konkomitante 367.
- Konnex 409.
- Konormale 1166.
- Konstante, Integrationsk. 476, Eulersche K. 1207; Lebesguesche K. 1353, 1357.
- Konstruktion d. regelm. 17- (257-) Ecks 315.
- Kontinuante 70.
- kontinuierliche Gruppe 171, 602.
- Kontinuum 20, 689.
- kontragradient 87, 88, 192, 404.
- Kontravariante 405.
- konvergent 8, 13, 424, 432, 443, 493, 688, 708.
- Konvergenz unendl. Reihen 424 f., 431; K. unendl. Produkte 442, K. unendl. Kettenbrüche 445 f.; K. trigonometr. Reihen 1334 ff., 1347, 1354 ff., K. von Potenzreihen als Folge von Stetigkeit 772; K.abszisse 719; K.bereich einer Potenzreihe 712; K.gerade der Dirichletschen Reihe 719, der Newtonschen Reihe 1211; K.halbebene 718; K.kreis 434; K.radius 434; K.stern 758; K.wert 768; K.erzeugender Faktor 749; Klassenk. 1365, 1368.
- Konvergenzkriterien 425 f., 440 ff., 1208; K.k. bei trigonometr. Reihen 1338.
- Körper 176, 290 ff., 481, 849—859, 1469, 1477, 1491 f.
- korresidual 871.
- Korrespondenzprinzip 1013.
- Korrespondenz, Modular- 1010.
- Kosekantenkoeffizienten 1217.
- Kovariante 86, 360, 365, 368, 373, 392, 405, 408, 590.
- kovariantes System 589, 597.
- Kreisbogendreieck 941.
- Kreisteilungsgleichung 253, 313, 1503, 1529 ff., 1555.
- Kreisteilungskongruenz 1497.
- Kreisteilungskörper 310, 1504.
- Kreisverwandtschaft 738, 919.
- Kriterien f. Lösbar. höherer Kongr. 1494.
- Kriterium, Eulersches 1495, 1498.
- Kroneckersches Symbol 1508 ff.
- Krümmung einer quadrat. Differentialform 599.
- kubische Determinanten 167; k. Formen 383 ff.; 414; k. Glchg. 281 ff., k. Resolvente der biquadrat. Glchg. 286 f.
- Kugelfunktionen 464, 1204, 1397 ff., 1408; harmonische K. 1410; K. höherer Ordn. 1412.
- Kummersche Fläche 243, 336, 907; K. Reihe (für  $\log \Gamma(x)$ ) 1229.
- Kurve, adjungierte K. 867, 870; Jordank. 689; reguläre K. 502; stetige K. 503, 1055; rektifizierb. K. 503, 689.
- Kurven, algebraische 481; unkursale K. 482; K. 3. Ordn., Wendepunkte 247, 325, 413; K. 4. Ordn. Doppeltangenten 249, 337; K. 4. Ord. mit 168 Kollineationen in sich 242, 420, 997.
- Kurvenintegral 502 ff., 695.

## L.

- $L$ -Integral 1077.
- $L$ -Reihen 1527, 1554.
- $L$ -summierbar 1086.
- Länge 1033.
- Lagrange-Bernoullischenäherungsweise Aufl. v. Glchg. 355.
- Lagrangesche Glchg. (eines Variationsproblems) 629;  $L$ . Interpolationsformel 263, 433, 514, 1195;  $L$ . Kettenbruchmethode 354;  $L$ . Multiplikatoren 658;



- L. Problem (der Variationsrechnung) 656, 669; L. Resolventen 1531 ff.; L. Satz 1556.  
 Laguerresche Polynome 1457; L. Satz (über Anzahl reeller Wurzeln einer Glchg.) 345.  
 Lambertsche Reihen 1515, 1521.  
 Lamésche Diffglchg. 550, 831; L. Polynome 1417 ff.  
 Landauscher Satz 350, 767.  
 Landensche Modularglchg. 836; L. Transf. der ellipt. Fkt. 814, 836.  
 Laplacesche Diffglchg. 675, 705, 1113, 1293; L. Differenzenglchg. 559; L. Integral 762; verallgemeinertes L. I. 764; L. Reihen 431; L. Transf. 571, 1237, 1426; L. Zerlegungssatz 144.  
 Launtscher Satz 717.  
 Lebesguesches Integral 490, 1077.  
 Legendresche Bedingung 631, 641, 661, 673; L. Polynome 465, 1204, 1234, 1291, 1398 ff.; L. Relation 789, 817; L. Symbol 318, 1498; L. Theorem über Vertauschbar. zwischen Parameter u. Argument 820; L. Transf. 610, 668, 670, 676.  
 Leitglied 369.  
 Lemniskate, Teilung der L. 315.  
 lemniskatische Fkt. 829, 839.  
 Liesches Normalproblem 623.  
 Limes 8, 24, 1048 ff.  
 Lindelöfscher Überdeckungssatz 1037.  
 lineare Diffglchg. 548 ff., 1100 ff.; l. Differentialform 579, 589, 593; l. Formen von unendl. vielen Veränderl. 1274; l. Fkt. 737; l. Fktschar 1364; l. Glchg. 72, 75; l. Glchg. mit unendl. vielen Veränderl. 164, 1277; l. Kongruenzen 1483 ff.; l. Maß 1039; l. Menge 1026; l. Reihenschar 1364; l. Substitution (Transf.) 82, 404, 915; l. Transf. der Perioden 880; l. Transf. der Thetaftkt. 811, 899; l. metrischer Raum 1365.  
 linear unabhängig 85, 541.  
 Linienelement 576, 608; L.potential 1118; L.komplex 577.  
 Linienintegral 502 ff.  
 L-Integral 1077. [722.  
 Liouvillesche Glchg. 571; L. Satz  
 Lipschitzsche Bedingung 1097; verallgemeinerte L. B. 1265.  
 logarithmische Ableitungen der  $\vartheta$ -Fkt. 792.  
 logarithmische Reihe 436.  
 logarithmisches ellipt. Integr. 3. Gatt. 818; l. Potential 1113, 1295.  
 Logarithmus 40.  
 Lokalisationssätze 1336, 1377 ff.  
 Lommelsche Fkt. 1423, 1442.  
 Lösbarkeit von Kongruenzen 1494.  
 lösender Kern 1251.  
 Lösungsanzahl diophant. Glchg. 1544; L. von Kongruenzen 1482.  
 loxodromische Substitution (Transf.) 739, 923.  
 L-summierbar 1086.  
 Lubbocksche Polynome 1221.  
 Lucassche Reihen 1563 ff.  
 Lückensatz, Hadamardscher L. 775; Fabryscher L. 776.

## M.

- Mächtigkeit 17; M. des Kontinuums 20.  
 Mac Laurinscher Satz 471; M. L. Grenze (für pos. Gleichungswurzeln) 352.  
 Majorante 425; M.methode 530, 708, 1235.  
 Maß 1033, 1038 ff., 1045.  
 Maßbestimmung 1365 f., 1393 f.  
 Maßfunktion 1045.  
 Matrix 59, 79 ff., 87, 89, 230; adjungierte, abgeleitete, begleitende M. 138 f., 154.  
 Matrizenrechnung 79 ff., 1537.  
 Maximalgruppe, invariante 188.  
 Maximum 474, 476, 627, 628, 1052; M. des abs. Betr. einer Determinante 135.  
 Mayersches Feld 665, 671; M. Problem 655, 670.  
 mechanische Quadratur 489, 522, 1200 ff.

Mehler - Dirichletsches Integral 1404.  
 Mehlersche Kegelfkt. 1417.  
 mehrdeutig 690, 728.  
 mehrfache Integrale 506; m. Punkt 865.  
 Menge 17 ff., 687, 1025 ff.; Borelsche M. 1044; Cantorsche M. 1032, 1387; M. erster und zweiter Kategorie 1383.  
 meromorph 721, 754.  
 Meromorphiestern 758.  
 Mersennesche Zahlen 1570.  
 Mertenssche Vermutung 1520.  
 meßbare Gruppen 183; m. Mengen 29, 1040, 1045; m. Fkt. 1062.  
 Meßbarkeitskriterien 1043 f.  
 metabelsche Gruppe 204.  
 metazyklische Gruppe 199 f., 213, 323; m. Gleichg. 321.  
 Methode des arithmet. Mittels (Potentialtheorie) 1126, 1302; M. d. unbestimmten Koeff. 434; M. der sukzessiven Approximationen 530; M. der Partikularlösungen (part. Diffglchn.) 1142; M. der Grundlösungen (part. Diffglchn.) 1138, 1167, 1178; M. d. descente indéfinie 1552, 1556; M. von Hardy, Ramanujan, Littlewood 1545 ff., 1562; M. von Tschebyscheff 1201.  
 Minimalfolge 676; M.fläche 572.  
 Minimum 474, 476, 627, 628, 651, 657, 1052; M.eigenschaft der Partialsumme der Fourierschen Reihe 1368, 1370, 1393.  
 Minor 56.  
 Mittag-Lefflerscher Satz 755; M. Fkt. 763.  
 Mittel, arithmet.-geometr. 42, 840; Cesàrosches M. 430; Höldersches M. 430; Féjersches M. 1340.  
 Mittelwerte zahlentheoret. Fkt. 1514, 1518, 1520, 1522 f.  
 Mittelwertmethoden der numer. Integration 1200 ff.  
 Mittelwertsatz 469, 495, 1083.  
 Möbiussche Fkt.  $\mu(n)$  1490, 1519 f., 1529.  
 Modul 7, 12, 685, 1470, 1473, 1475, (einer Anordnung) 44, (einer linear. Substit.) 358; M. eines

Gebiets 745; M., M.system, Formenm. 394; M. der ellipt. Integr. 799, 801; singuläre M. 839; M.n eines Körpers 860; Borchardtsche M.n 243.  
 Modulargleichung 254, 835 f., 1001, 1005; M.gruppe 201, 214, 244, 355, 948 ff.; verallgemeinerte M.-gruppe 215; M.korrespondenz 1010.  
 Modulform 979, 984, 991, 999.  
 Modulfunktion, ellipt. 310, 328, 915, 979, 987, 993, 1521, 1559, 1562; M.systeme 1470.  
 Moivrescher Satz 12, 436.  
 Monge-Ampèreresche Form der part. Diffglchg. 2. O. 567.  
 Mongesche Gleichg. 576.  
 Monodromiegruppe 547, 851; M.-satz 729.  
 monogen 697.  
 Monomialgruppe 227, 241.  
 monoton 32, 459, 1052.  
 Montelsche Sätze 711.  
 Morerascher Satz 706.  
 Multiplikation (natürl. Zahlen) 4, (reeller Z.) 7, (komplexer Z.) 12, (höherer kompl. Z.) 15, 94; M. von Ordnungstypen 21; M. von Matrizen 80; komplexe M. 832, 833, 838, 900 f.; M. der Fourierschen Reihen 1372 f.  
 Multiplikationstheorem 1227.  
 Multiplikator einer Gruppe 235; M. einer gew. Diffglchg. 1. Ordn. 532; M. einer Pfaffschen Gleichg. 574; M. eines Systems Pfaffscher Gleichg. 583; M. einer Differenzgleichg. 1240; Jacobischer M. 553; Lagrangescher M. 658; M. einer Substitution 921, 925.  
 Multiplikatorfunktion 653; M.gleichg. 331, 836.

## N.

Nachbarschaft 627.  
 Näherungsbruch 445, 450.  
 natürliche Grenze 734, 963; n. Irrationalität 300, 321; n. Zahl 4, 1463; n. Logarithmus 40.  
 Nebengruppe 183; N.näherungsformel (eines Kettenbruchs) 450; N.stern 761.

negativ-regulär, n.-definit 649.  
 Neumannsche Kugel 686; N. Polynome 1440; N. Reihen 1252, 1321, 1443; N. Problem 1298.  
 Newtonsche Formeln (für Potenzsummen von Glchg.-Wurzeln) 266; N. Interpolationsformel 514, 1194; N. Näherungsmethode (Aufg. numer. Glchg.) 353; N. Reihe 1211; N. Potential 1113, 1301; N. Problem 677.  
 Nichtauflösbarkeit algebr. Glchgn. 252, 304.  
 nichtdifferenzierbare Fkt. 458f., 1068.  
 nichtfortsetzbare Fkt. 734; n. Reihen 775.  
 Nichtreste 1496 ff., 1511 ff.  
 nirgends dicht 28, 1028.  
 Niveaulinien einer Substitution 921.  
 Noetherscher Schnittpunktsatz 858.  
 Norm 855, 1553f., 1557.  
 Normaldeterminante 163; N. glchg. 255, 296; N. gebiet 745; N. integral 549; N. körper (Galoisscher Körper) 296; N. kurve eines Körpers 874; N. teiler 186, 188.  
 Normalform einer algebr. Glchg. 278f.; N. des ellipt. Integr. 825; N. einer part. Diffglch. von ell. Typ. 1134, 1304, 1315, von hyperbol. Typ. 1157, von parabol. Typ. 1186.  
 Normalproblem, Kleinsches 232, 235, 333; Liesches N. 623.  
 normale Differenzenglchg. 1238; n. Fkt.schar 710.  
 normiertes Orthogonalsystem 1264, 1274.  
 Null 5; Menge vom Inhalt N. 1035; N. fkt. 1265; N. ideal 1471; N. lösung 1254; N. modul 394; N. stellen 716, 723; N. entwicklung 1212; N. stellen der Besselschen Fkt. 1437; N. teiler 1469.  
 nullte Klasse 1059.  
 numerische Berechnung der ellipt. Integr. u. Fkt. 840 ff.; n. Differentiation 1198; n. Integration 1200.

## O.

obere Derivierte 1066; o. Grenze einer Menge 34, für die posit. Wurzeln einer Glchg. 352.  
 Oberflächenintegral 507.  
 Oberfunktion 1094.  
 Oberkörper 293.  
 offene Menge 1029; o. Intervall 1027.  
 Oktaedergruppe 237, 945.  
 Omegaprozeß 372, 405f.;  $\Omega$ -Fkt. 882.  
 Ordinalzahl 21; transfinite O. 23.  
 Ordinatenmenge 1072.  
 Ordnung eines Divisors 857; O. einer Divisorenklasse 862; O. einer endl. Gruppe 174; O. einer infinitesim. Größe 456; O. einer Invariante (Kovariante) 358; O. einer ganzen Fkt. 751; O. einer Permutation 207; O. einer Transf. 899; O. des Zusammenhangs 853; O. quadrat. Formen 1561.  
 Ordnungstypen 21.  
 orthogonale Fkt. 1254; o. Gruppe 249; o. Linearformen 1274; o. Substitution (Transf.) 130 ff., 392, von unendl. vielen Veränderl. 1275; o. Integralglchg. 1263; o. Polynome 1456.  
 Orthogonalsystem, normiertes 1264, 1269, 1274, 1325.  
 orthosymmetrische Determinante 66; o. Riemannsche Flächen 1018.  
 Osgoodscher Satz 637, 644, 667, 675; O. S. über die Abbildung des Randes 744.  
 Oszillationstheorem 551; O. der Kugelfkt. 1410f.  
 oszillierend 424.

## P.

p-adische Zahlen 1493.  
 parabolische Substitution (Transf.) 739, 924; p. Diffglchg. 1109, 1189, 1304.  
 Parameter (der Thetafkt.) 890.  
 Parsevalscher Satz oder Formel 1370, 1372.

- Partialbruchzerlegung 262, 480, 723.
- Partialbrüche eines Kettenbruchs 444; P.-summen der Potenzreihen 776, der trig. Reihe 1336 ff., 1383.
- partielle Ableitung 465 f.; p. Integration 479, 1085; p. Summation 517.
- partielle Diffglg., Definition 529; p. D. 1. Ordn. 562 ff.; p. D. 2. Ordn. 567 f.; Transf. der p. D. 2. O. 621; Randwertaufgaben der p. D. 1107 ff., 1295 ff.; Eulersche p. D. 571; Liouvillesche p. D. 571; p. D. der Theta fkt. 784, 890.
- partikuläres Integral 531, 1097.
- partitio 1540.
- Pascals arithmetisches Dreieck 46.
- Peano-Jordanscher Inhalt 1034.
- Peano-Kurve 1055.
- Pellsche Zahlenreihen 1563.
- Pentagonalzahlsatz 1543.
- P-Funktion, Riemannsche 549.
- $\wp$ -Funktion, Weierstraßsche 803 ff.; harmon. Fall 826; äqui-anharmon. Fall 826.
- perfectus (numerus) 1569.
- perfekt 22, 27, 1028; nirgends dichte p. Menge 1032; p. Gruppe 605; p. Kern (einer Menge) 1030.
- Periode (der Elemente einer Gruppe) 180; P. einer Substitution 942.
- Perioden der ellipt. Fkt. 786, 801; P. der Integrale eines Körpers 861, 878; P. der Theta fkt. 890; P. der Abelschen Fkt. 895; P.-parallelogramm 794; P. charakteristik 891, 902; P. relationen 789, 817, 879 f.
- periodischer Kettenbruch 448, 452.
- Periodizität der ellipt. Fkt. 797, 801, 807; P. der ellipt. Integr. 821; P.-moduln 861, 878.
- Permanenz der Funktionalglg. 727.
- Permutation 42, 204 ff.
- Permutationsgruppe 202 ff.; primitive P. 247.
- Perpetuante 369.
- Pfaffsche Formen 579, 587; äquivalente Pf. F. 580; Pf. Glg. (Pf. Problem) 573 ff.
- Phragmén'scher Satz 769.
- Phragmén-Lindelöfscher Satz 770.
- $\pi$ , Reihen für . . 438.
- Picardscher Satz 766.
- Picard-Goursatsches Problem 1158.
- Piltzsches Teilerproblem 1523.
- P-Integrale 1094.
- Plana-Abelsche Summenformel 1208.
- Plückersche Liniengeometrie 577; Pl. Formeln 873 f.; Pl. Prozeß (Polarenbildung) 371, 405.
- Poincarésche Differenzenglg. 1233; P. Reihen 979 ff.; einpolige P. R. 981.
- Poissonsche Glg. 1120; P. Summationsformel 1391; P. Summationsverfahren 772, bei trigon. Reihen 1349; P. Integral 703 f., 1123; P. Symbol 609.
- Pol 721, 723.
- polare Integralglg. 1271, 1285.
- Polarenbildung 371, 405.
- Polarform 118.
- Polyascher Satz über ganzzahl. Reihen 781.
- Polyedergruppen 238.
- Polygonalzahlen 49, 423.
- Polymorphe Fkt. 1015.
- Polynome 31, 257; Bernoullische P. 1217, 1331; Eulersche P. 1219; Hermitesche P. 1454; Jacobische P. 1456; Laguerresche P. 1457; Lamésche P. 1417; Legendresche P. 465, 1291, 1398; Lommelsche P. 1423; Lubbocksche P. 1221; Neumannsche P. 1440; Schläffische P. 1422; trigon. P. 1367—1371; Tschebyscheffsche P. 1456.
- Polynomialkoeffizienten 52.
- positiv-definit 649, 1266, 1281; p.-homogen 638; p.-reguläres (quasi-reguläres) Integral 649.
- positiver Typus (eines Kerns) 1266; (einer quadrat. Form) 1280.
- Potential(-fkt.) 705, 1113, 1118, 1295, 1301 f.
- Potenz 19, 39, 174.

Potenzreihe 433, 711, 735, 1329, 1382, 1515 ff., 1521, 1541 ff., 1552, 1557 ff.; Fouriersche P. 1330.  
 Potenzreste 1495; P.summen 422; P.transf. (einer Matrix) 147.  
 prim., relativ pr. 258, 1465, 1472.  
 Primärdeale 1473, 1477.  
 Primdiskriminanten 1507; P.ende 744; Pr.-faktor 1463 ff.; Pr.-form 975; Pr.-fkt. 831, 882, 1489; Pr.-ideal 179, 1473, 1477, 1504; Pr.-teiler 854; Pr.-zahlen 1463 ff., 1524 ff., 1555, 1568; Pr.-zahlsatz 1528; Pr.-zahltafeln 1524 ff.; Pr.-zahlzwillinge 1528.  
 primitive Darstellung 1560; pr. Fkt. 478, 751; pr. Gleichg. 295; pr. Größe 295; pr.  $n$ -te Einheitswurzel 312; pr. Permutationsgruppen 210, 247; pr. trigonometrische Reihen 1386; pr. Wurzeln 1479; pr. Körper 295; pr. Periodenpaar 808; pr. Element 1492.  
 Prinzip, Dirichletsches 675, 742, 1126.  
 prinzipale Transformation 901.  
 Produkt von Determinanten 58; Pr. von Divisorenklassen 863; Pr. von Gruppenelementen 174; Pr. von Idealen 1472; Pr. von Mengen 19; Pr. von Transf. 601; unendl. Pr. 442 ff., 1517, 1526 ff., 1541 ff.; Pr. unendl. Reih. 428; Pr. von Fakultätenreihen 1215.  
 Produktdarstellung der ganzen Fkt. 748; Pr. der Thetafkt. 785; Pr. der Sigma fkt. 787.  
 Produkttransformation von Matrizen 149.  
 projektive Gruppe 233, 606; spezielle pr. Gr. 247.  
 Pseudokonvergenz von Interpolationsformeln 1197, 1200.  
 Punktfkt. 1046; P.system auf einer algebr. Kurve 393.  
 punktiert unstetige Fkt. 1054.  
 Punktmenge 26 ff., 687, 1026.  
 Pyramidalzahlen 49, 423.

## Q.

Quadrate 1550 ff.  
 quadratische Formen 118 ff., 341, 1502, 1553 ff., 1558 ff.; automorphe Transf. d. qu. F. 136; qu. F. mit unendl. vielen Veränderl. 165, 1278; qu. Kongruenzen 1512; qu. Differentialform 592; qu. D. konstanter Krümmung 599; qu. Reste 319, 1497 ff.; qu. Transf. der Thetafkt. 813; qu. Zahlkörper 1502, 1504, 1553, 1561, 1567.  
 Quadratur der Parabel (Archimedes) 488; mechan. Qu. 489, 522, 1200.  
 quasikonform 737.  
 quasireguläres Integral 649.  
 quaternäre Kollineationsgruppe 243.  
 Quaternion 16, 1557; Qu.engruppe 204.  
 quellenmäßig 1144.  
 Querschnitt 853.  
 Quotient 14, 863, 1472.  
 Quotientengruppe 187; Qu.körper 1469; Qu.ring 1469.

## R.

Ramanujans Summen 1529; R. Vermutung 1549.  
 Rand 688; R.punkt 1029; freier R.punkt 743; Abbildung der Ränder von Gebieten 743.  
 Randwertaufgabe 561; R. für gewöhnl. Diffgleichg. 1105, 1286 ff.; R. für partielle Diffgleichg. 1107 ff., 1121 f., 1305 ff.; R. der Potentialtheorie 1298 ff.  
 Rang einer Matrix 62; R. einer Abelschen Gruppe 213; R. einer ganzen Fkt. 750; R. eines Abelschen Integrals (einer Riemannschen Fl.) 823, 854.  
 rationale Fkt. 31, 257 ff., 723; Kriterium für r. Fkt. 782; Integration einer r. F. 480; r. Invarianten 392; r. Transf. der Thetafkt. 810.



- Rationalitätsbereich 105, 290, 1469;  
 R.gruppe einer linearen Diff.-  
 glchg. 544.  
 Raum, linearer metrischer 1365.  
 räumliche harmon. Kugelfkt. 1408.  
 Reduktion quadrat. Formen 1553,  
 1561; R. der ellipt. Integrale  
 auf die Normalform 825f.  
 Reduktionsproblem, Pfaffsches 586.  
 reduzibel 291, 540, 1030; r. ganze  
 Fkt. 105; r. Substitutionsgrup-  
 pen 222.  
 reduzierte Newtonsche Reihe 1213.  
 Regula falsi 353.  
 reguläre Fkt. 459, 697; r. Integral  
 649; r. Punkt 697, 1337, 1344; r.  
 Weg 771; r. Siebzeckneck 315; r.  
 Elemente eines Rings 1469.  
 Regularitätsgebiet 697, 1113.  
 Reihen, endliche, arithm., geom.  
 R. 421; unendl. R. 424, 708;  
 Potenzr. 711; mehrfache R. 439,  
 441; nicht fortsetzb. R. 775; R.  
 mit endl. viel. verschied. Koeff.  
 780; Fakultätenr. 1214ff.; R.  
 mit rat. Koeff. 780f.; binom.,  
 Exponentialr., logarithm., gonio-  
 metr., zyklometr. R. 434—436;  
 hypergeom. R. 328; konjugierte  
 R. 1330ff., 1375; rekurrente R.  
 1232, 1562ff.; Fouriersche (trigo-  
 metr. R.) 431, 1325ff., 1536f.;  
 Dirichletsche R. 718, 1515f.,  
 1518ff., 1525ff.; Eisensteinsche  
 R. 1521; Kapteynsche R. 1445;  
 Lambertsche R. 1515, 1521;  
 L-Reihen 1527, 1554; Laplace-  
 sche R. 431; Neumannsche R.  
 1252, 1443; Poincarésche R. 979;  
 Schlömilchsche R. 1447.  
 Reihenentwicklungen elementarer  
 Fkt. 435—438; R. der  $\varphi$ -Fkt.  
 804ff.; der ellipt. Integr. 819;  
 der Jacobischen ellipt. Fkt. 797;  
 der Thetafkt. 784; R. des Mo-  
 duls der ellipt. F. 801.  
 Reihensatz, Cauchyscher R. 713.  
 rektifizierbare Kurve 689.  
 rekurrente Reihen 355, 1232, 1562ff.  
 relativ dicht 1029; r. meßbar 1044;  
 r. prim 258; r. pr. Ideale 1472;  
 r. pr. Zahlen 1465; r. Minimum  
 651.  
 Repräsentant einer Restklasse 1476;  
 R. bei Transf. der ellipt. Fkt.  
 1007.  
 Residuensatz 702, 861, 1537; R.-  
 kalkül 702.  
 Residuum 701f., 717, 721f., 855,  
 861.  
 Resolvente, Galoissche 253, 296,  
 299, 994; R. der Ikosaederglchg.  
 326; R. der Modularglchg. 1006;  
 Lagrangesche R. einer zykl.  
 Glchg. 307, 1531f.; R. des Lie-  
 schen Normalproblems 624; R.  
 einer Integralglchg. 1251; R.  
 einer quadrat. Form 1279.  
 Rest 871; quadrat. R. 319, 1497;  
 R.klasse 1476, 1477; R.klassen-  
 ring 1477; R.klassenkörper 1477;  
 R.menge 1025; R.system 182f.,  
 1476.  
 Restglied 470 f., 1204; R.ab-  
 schätzungen 1515, 1518, 1523,  
 1528.  
 restringierte Fourierreihen 1379.  
 Resultante 268ff., 359; Cayleysche  
 Form der R. 375.  
 reziprok 173, 404; r. Glchg. 289;  
 r. Radian 608, 738, 929; r.  
 Transf. 601.  
 Reziprokalkurve 874.  
 Reziprokante 392f.  
 Reziprozitätsformeln 1375, 1390.  
 Reziprozitätsgesetz der quadr. Reste  
 1496, 1499ff., 1535, 1538; hö-  
 here R.e 1496.  
 Reziprozitätssatz, Hermitescher 383.  
 Riccatische Diffglchg. 534, 1104.  
 Riccalkül 468, 598.  
 Riemannsche Fläche 729, 851;  
 orthosymmetr. R. Fl. 1018; R.  
 Fkt. 1159; R. Hilfsatz 1377f.;  
 R. Satz über hebbare Unstetig-  
 keiten 720; R. Fundamentalsatz  
 der konf. Abb. 742; R. Summa-  
 tionsverfahren 1351; R. Symbole  
 596; R. P-Fkt. 549; R. Theta  
 908, 911; R. Vermutung 1520,  
 1528, 1548; R. Zetafkt. 1207,  
 1219, 1392, 1518ff., 1554; R.  
 Feld 733; R. Integral 1071ff.  
 Riemann-Lebesguesches Lemma  
 1334; R.-Rochscher Satz 856,  
 862.



Ring 1468.  
 Ringfunktionen 1416.  
 $R$ -Integral 1072.  
 Rollescher Satz 338, 469.  
 Rotationsfläche, kleinste 679.  
 Rotationskörper größter Anziehung 681.  
 Rouchéscher Satz 724.  
 Rückkehrpunkt 873.  
 Rückkehrschnittstheorem 1018.  
 Rungescher Satz über die Entw. nach rat. Fkt. 757.

## S.

Säkulargleichung 65, 126.  
 Sattelpunkt 1099.  
 Schar (von Formen) 111, 395, (von Transformationen) 601.  
 Schicht (Potential einer einfachen) 1296.  
 Schläflische Polynome 1422.  
 schlicht 730; schl.artig 746.  
 Schlitzgebiet 745.  
 Schlömilchsche Reihe 1447.  
 Schnabelspitze 867, 873.  
 Schnitt 6.  
 Schnittpunktsatz, Noetherscher 858.  
 Schottkyscher Satz 767.  
 schwaches Maximum (Minimum) 628.  
 Schwankung 34, 39, 488, 1056.  
 Schwarzsche Form 392; S. Ungleichheit 1083; Schw. Lemma 740; S. Spiegelungsprinzip 728, 743.  
 Schwesterform 391.  
 Schwingungen einer elast. Platte (Diffglchg.) 1147.  
 Sekantenkoeffizienten 1219.  
 sektorielle harmonische Fkt. 1410.  
 Selbstberührungspunkt 866.  
 semidefinite quadrat. Form 123; s. Form  $k^{\text{ten}}$  Gr. 475; s. Integral 649.  
 semikonvergente Reihen 428, 1104.  
 Seminvarianten 369.  
 Separation der Glchg.-wurzeln 352.  
 Sequenzen von Potenzresten bzw. Nichtresten 1497; S. von quadr. Resten bzw. Nichtresten 1497.

Sieb des Eratosthenes 1524.  
 Siebzehe neck, regelmäßiges 315.  
 Sigmafunktionen 786 ff.; dreigliedrige S.formel 791; S.quotienten 809.  
 Signatur (einer quadr. Form) 123.  
 Simponsche Regel 523, 1202.  
 Simultanform 371, 381.  
 singuläre Integrale 536, 540, 565, 1098, 1352; s. Stelle 719 ff., 734; s. Linien 734; s. Modul 839; s. Parameterwert 1252.  
 Singularität 719, 732, 865.  
 Spannenintegral 1227.  
 spezielle Gruppen 199.  
 Spiegelung (am Kreise) 738, 927, (an analyt. Kurven) 744.  
 Spiegelungsprinzip 728, 743.  
 Spiralfächen 572.  
 Spitze 866, 873.  
 Sprung 1337, 1340, 1343.  
 Spur (einer linearen Subst.) 223; (einer ganzen rat. Fkt.) 855.  
 Stammbereich 293.  
 Stammdiskriminante 1507.  
 starkes Maximum (Minimum) 628.  
 Steffensensche Interpolationsformel 1196.  
 Steigung 1189.  
 Stern 757.  
 Stelle algebr. Charakters 732; St. der Bestimmtheit (Unbestimmtheit) 588; St. des Körpers 850.  
 stereographische Projektion 686.  
 stetige Kurve 1055.  
 Stetigkeit 35 f., 648, 691, 770, 1050, 1273; St.satz, Abelscher 434.  
 Stieltjessches Theorem (orthog. Substit.) 131; St. Integral 1328; St. Grenze 1411.  
 Stirlingsche Formel 41, 522; St. Interpolationsformel 516, 1196; St. Reihe 1211; St. Zahlen 1193.  
 Stokescher Satz 509.  
 Stolzschers Satz 713; St. Weg 771.  
 streckentreu 736.  
 Streckung 738.  
 Strudel 1098.  
 Stufe 395.

Sturmsche Kette 339; St. Fkt. 344; St. Satz 340.  
 Sturm-Liouvillesche Fkt. 1289.  
 Substitutionen (s. a. Transf.) lineare homog. S. 82, 204; identische S. 916; orthogonale S. 130 f., 968; unimodulare S. 109, 920 ff.; inverse S. 916; S. 1. und 2. Art 920.  
 Substitutionsdeterminante 83; S.-gruppen 222 ff.; S.-gruppen einer lin. Diffglg. 547.  
 Subtraktion 4, 5, 7.  
 sukzessive Approximation 354, 1308.  
 summabel s. summierbar.  
 Summabilität, Abelsche, Eulersche, Poissonsche 772; für trigonometr. R. 1349; S. polygon 762.  
 Summation 1221; Nörlundsches S. verfahren 1222 ff.; S. verfahren bei trigon. Reihen: Cesàro-Féjer 1340, 1361, 1378 ff., Poisson 1349, Riemann, de la Vallée Poussin 1351, Weierstraß 1350; partielle S. 517.  
 Summationsformel s. Summenformel.  
 Summe 517; S. zweier Mengen 1026; S. einer unendl. Reihe 424, 428; Gaußsche S. 319; S. von Quadraten 1550 ff.  
 Summenformel, Euler-Maclaurinsche S. 429, 1205, 1392; Poissonsche S. 1391; S. gleichung 1242; S. konstante 517.  
 summierbar nach Cesàro, Hölder 430 f., 490, 773; s. nach Lebesgue 1086.  
 summierbare Fkt. (meßbare Fkt.) 1062.  
 Sylowscher Satz 195.  
 Sylvesterscher Satz (betr. Anzahl imaginärer Wurzelpaare einer Glg.) 344.  
 Symbol, Jacobisches S. 64, 319, 1505 ff., 1509 f., 1535 f.; Kroneckersches S. 1508 f.; Legendresches S. 318, 1535 f.  
 symbolische Methoden 1192 f.  
 symmetrische Fkt. 207, 218 f., 265; s. bilineare Form 91; s. Gruppe

207; s. Kern 1263; s. Kettenbruch 450.  
 synkretisch 697.  
 systematischer Bruch 8.  
 Systeme linearer Kongruenzen 1486.  
 syzygetische Formenbüschel 416; s. Halbperioden 903.  
 Syzygie 369, 401.

## T.

Tafeln der ellipt. Fkt. und Integr. 800, 841 ff.; zahlentheoretische T. 1480, 1512, 1518, 1524, 1542, 1555.  
 Tangentenregel 1202; T. koeffizienten 1219.  
 Tartaglia 282.  
 Taylorscher Satz 470, 472, 1195.  
 Teilbarkeit (von Formenmoduln) 398; T. von Idealen 1471; T. von Polynomen (mod.  $p$ ) 1489; T. von Zahlen 1463.  
 Teiler einer Gruppe 180; T. von Idealen 1471; T. von Zahlen 1463; T. einer ganzen rat. Fkt. 258; T. eines Zahlkörpers 295; eigentl. T. 186; größter gem. T. 258, 1464 ff., 1471.  
 Teileranzahl 1520 ff.  
 Teilerfeld 1538.  
 teilerfremd 258, 1465, 1472.  
 Teilerkettensatz 1472.  
 Teilerpotenzsummen 1520 ff.  
 Teilersummen 1520 ff.  
 Teilmenge 17.  
 Teilnenner (eines Kettenbruchs) 444.  
 Teilung der ellipt. Fkt. 833; T. der Theta fkt. 900.  
 Teilwerte der Sigma fkt. 1000.  
 Teilzähler (eines Kettenbruchs) 444.  
 ternäre Formen 407—418; t. Iko-saedergruppe 242; t. Kollineationsgruppen 241.  
 tesserale harmonische Fkt. 1410.  
 Tetraedergleichung 240; T. gruppe 237, 945; T. zahl 423.  
 Thetacharakteristik 902.  
 Thetafunktionen 783 ff., 889 ff., 1350, 1352, 1538, 1542, 1557 ff.; Diff. glg. 784, 890 ff.; Th. mit gebr. Charakteristik 837; syzygetische,

azygetische Th. 903; hyperellipt. Th. 909; Th.  $n$ -ter Ordn. 832; Transf. der Th. 810 ff., 898; Th. zweier Veränderl. 887; Multiplikation u. Teilung der Th. 900. Thetanullwerte 784 f.; hyperellipt. Th. 334; Diffrelationen der Th. 793.  
 Thetareihen 441, 1542; Fuchssche, Kleinsche Th. 799.  
 Thetarelationen (Additionstheorem usw.) 791, 906 ff.  
 toroidal functions 1416.  
 totale Diffgleichn. 573 ff.  
 totales Differential 466.  
 totalisierende Operation 1089.  
 totalstetig und totalunstetig 37, 1054, 1088.  
 Trägheitsgesetz der quadrat. Formen 121, 343.  
 transfinit 18  
 Transformation (s. auch Substitution) birationale (Cremona-)Tr. 602, 858; identische Tr. 601; infinitesim. Tr. 603; erweiterte inf. Tr. 615; lineare Tr. 404, 915; 1. Tr. der Perioden 880; orthogonale Tr. 392; ellipt., hyperbol., parabol., loxodrom. Tr. 739, 925; Tr. durch reziproke Radien 738, 929; Tr. von Gleichn. 276 f.; Tr. einer quadrat. (bilinearen) Form in sich 136 f.; Tr. einer Diffgleichg. 619 f.; Tr. der Theta-fkt. 810 ff., 898; prinzipale Tr. der  $\vartheta$ -Fkt. 901; Ampèresche Tr. 610; Laplacesche Tr. 571; Legendresche Tr. 610.  
 Transformationsgrad 899.  
 Transformationsgruppe 171, 601 ff.; Invariante einer Tr. 612; Tr. einer linearen Diffgleichg. 544.  
 transitive Permutationsgruppen 207; mehrfach tr. P. 211; tr. Transformationsgruppen 604 f.  
 Translation 738; Tr.flächen 572; Tr reziprokante 393.  
 transponierte Matrix 87; tr. bilineare Form 88.  
 Transposition 44, 206.

Transversalen (eines Extremalenfeldes) 634, 642, 684.  
 Transversalflächen 665.  
 transzendente Singularität 732.  
 Trapezformel 523, 1202; Tr.verbesserung 1205.  
 trigonometrische Fkt. 715; tr. Reihe 1325 ff.; primitive tr. R. 1386; tr. Integral 1388.  
 Trisektion des Winkels 325.  
 Tschebyscheffsche Methode zur numer. Integration 1201, 1203; Tsch. Polynome 1456.  
 Tschirnhausentransformation 277, 294.  
 typische (eintypige) symmetrische Fkt. 218.  
 Typus (von Transf.-gruppen) 606.

## U.

überall dicht 22, 28, 1028.  
 Überdeckungssätze 1036, 1043.  
 Überkonvergenz 777  
 Überlagerungsfläche 747, 1028.  
 Überschiebung 240, 381, 391.  
 überschießende Zahlen 1571.  
 Übertragungsprinzip von Clebsch (für ternäre Formen) 410.  
 Umformungssätze für mehrf. Reihen 441.  
 Umgebung 33, 687, 850, 1027.  
 Umkehrbarkeit der Differentiationsordnung 465.  
 Umkehrformen, zahlentheoretische 1519 f.; Umkehrfkt. 693.  
 Umkehrproblem 798, 844, 885 f., 913.  
 Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes 772; U. des Fermatschen Satzes 1568; U. eines bestimmten Integrals 1259.  
 unabhängige infinit. Transf. 603.  
 Unabhängigkeitssatz, Hilbertscher 634, 642, 665.  
 unbedingt konvergent 424, 442, 446.  
 unbeschränkt differenzierbar 463.  
 unbestimmte Formen, Grenzwert 473; Methode der u. Koeffizienten 434; u. Integral 478 ff., 699.

uneigentliche bestimmte Integrale 491, 497; u. Menge 1025; u. Permutation 206.  
 unendlich klein 456; u. ferner Punkt 686, 721, 731.  
 unendliche Gruppen 175; u. kontinuierliche Gr. 607; u. Produkte 442; u. Reihe s. Reihen.  
 unentwickelte Fkt. 468.  
 ungerade Permutation 206.  
 Ungleichung, Besselsche U. 1270, 1368, 1393; Schwarzsche U. 1083.  
 uniformisierende Variable 1018; u. Parameter, lokaler 737.  
 Uniformisierung 737, 746, 886.  
 Uniformisierungsprinzip 746; U.-sätze 1018.  
 Unikursalkurve 482.  
 unimodulare Substitution 109, 920.  
 unstetig, punktweis u., total u. 37.  
 Unstetigkeitsgrad 37; U.stelle 37.  
 Unterdeterminante 56f.  
 Unterfunktion 1093.  
 Untergruppe 180—188, 605, 928f.; ausgezeichnete U. 186, 930; invariante U. 605; U. der Ikosaedergr. 241; Sylowsche U. 195.  
 unterhalb stetig 648.  
 Unterkörper 295.  
 Untermenge 1025.  
 unvollständige Gammafkt. 1241; u. Zahlen 1571.

## V.

Valentinersche Gruppe 242, 334.  
 Valenz 966.  
 Variable, uniformisierende 1018.  
 Variation der Konstanten 545; erste, zweite,  $n$ -te V. 628.  
 Variationen 46.  
 Variationsrechnung 626ff.  
 Verbindungsmenge 19.  
 Verdichtungspunkt 27, 1028.  
 Verein von Linienelementen 608.  
 vereinigte Lage 609.  
 Vereinigungsmenge 18, 1026.  
 Vergleichsreihen 425.  
 Vergrößerungsverhältnis, lineares, flächenhaftes 737.  
 Verknüpfung 1.  
 Vermutung von Mertens 1520; V. von Ramanujan 1549; V. von Riemann 1520, 1528, 1548.

vertauschbar 1319; v. Fkt. 1319, 1321; v. Gruppenelemente 174; v. Transf. 601; v. (Abelsche) Gruppen 174.  
 Vertauschbarkeit der Integrationsfolge 507; V. von Matrices 81; V. von Parameter und Argument 820, 877; V. von Systemen 181.  
 Verteilung der Potenzreste und -nichtreste 1496; V. der Primzahlen 1527; V. der quadr. Reste und Nichtreste 1511.  
 Verwandlungsformeln der Thetafkt. 786.  
 Verzerrungssatz von Koebe 740.  
 Verzweigungsdivisor 857, 870, 872; V.punkt (V.stelle) 731, 851f.; V.schnitt 731.  
 Vielfaches einer Matrix 89, 107; kleinstes gemeinschaftl. V. zweier Gruppen 181; kl. g. V. zweier g. r. Fkt. 259; kl. gem. V. von Idealen 1472; kl. gem. V. von Zahlen 1466.  
 Vierergruppe 238.  
 Vier-Indizes-Symbole 596.  
 Vitalischer Satz 709.  
 Vivantischer Satz 779.  
 volle lineare Gruppe 213.  
 volles System von Invarianten der Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergruppe 239f.; v. S. von Differentialinvarianten 616.  
 vollkommen ellipt. Diffglgch. 1316.  
 vollkommene Zahlen 1569.  
 vollständig integrierbares System Pfaffscher Glgchn. 583; v. i. höhere Differentialformen 594.  
 vollständige Klasse oder Raum 1365; v. Induktion 4.  
 vollständiges Abelsches Integral 876; vollst. ellipt. Integr. 824ff.; v. Integral einer part. Diffglgch. 1. Ordn. 565; v. normiertes Orthogonalsystem 1269, 1274; v.  $r$ -gliedr. System part. Diffglchn. 1. Ord. 563; gestattet bekannte inf. Transf. 623.  
 vollstetig 1273.  
 Volterrasche Gleichung 1258.  
 vorderer Limes 1048.  
 Voronoï's Identität 1523.

## W.

wachsend 474.  
 Wahrscheinlichkeit 1518.  
 Wahrscheinlichkeitsintegral 500.  
 Waringsche Formeln (für Potenzsummen von Gleichungswurzeln) 219f., 266; W.-Lagrangesche Interpolationsformel 1195; W. Satz über reelle Gleichungswurzeln 338; W. Problem 1546.  
 Wärmeleitung, Diffglgch. der W. 1141, 1175.  
 Wechselsumme 1227.  
 Weg (innerer, regulärer, Stolzscher) 771.  
 Weierstraß' Bedingung (der Variationsrechn.) 635f., 674; W.' nicht differenzierb. Fkt. 459; W.punkte 856; W.' Sigmakkt. 786f.; W.'  $\phi$ -Fkt. 803; W.' Zeta-fkt. 807; W.' Satz über wesentl. sing. Stellen 721.  
 Wendepunkte der Kurven 3. Ordn. 247, 325, 413.  
 wesentlicher Teiler 868.  
 wesentlich singuläre Stelle 721.  
 willkürliche Fkt. 1326, 1330.  
 Wilsonscher Satz 1489.  
 Windungspunkt 731, 736, 852.  
 winkeltreu 736.  
 Wirbel 1099.  
 wohlgeordnete Menge 23.  
 Wronskische Determinante 154, 541, 1102.  
 Wurzelarstellung einer auflösb. Glgch. 325.  
 Wurzelfunktion 871.  
 Wurzeln eines Gleichungssystems 272; obere Grenze für positive W. 352; mehrfache W. einer Gl. 261; Anzahl der reellen W. 337.

## Z.

Zahl, natürl. 4; rationale Z. 6; irrationale Z. 6; figurierte Z. 52; komplexe Z. 11 ff., 685; algebr. Z. 293; ganze algebr. Z. 248.  
 Zahlen, Bernoullische 422, 436,

520, 1217; Eulersche Z. 437, 1219; höhere komplexe Z. 14, 93; Z.paar 11; Z.reihen, rekurrente 1562 ff.  
 zahlentheoretische Fkt., allgemeine 1514 ff.; z. F.  $\varphi(n)$  1478, 1517 ff.; z. F.  $\mu(n)$  1490, 1519 f.  
 Zahlklasse 25.  
 Zahlkörper 105; quadrat. Z. 1502, 1504, 1553, 1561, 1567.  
 Zeichenregel (Descartes, Harriot) 345.  
 Zentraldifferenzen 1206.  
 Zentrale einer Gruppe 187.  
 Zentralklasse 1367, 1371.  
 Zerfällungen 1540.  
 zerlegbare Formen 1561.  
 Zerlegung in irreduzible  $p$ -adische Polynome 1493; Z. in Primideale 1475; Z. in Primzahlen 1463 ff.  
 Zerlegungssatz, Laplacescher 144.  
 Zetafunktion, Riemannsche 501, 1207, 1219, 1392, 1518 ff., 1554; Weierstraßsche Z. 807 ff.  
 zirkuläre Permutation 205; z. ellipt. Integral 3. Gattung 818.  
 Zolotareffs Deutung des Legendreschen Symbols 1504.  
 zonale harmonische Fkt. 1410.  
 zugeordnete Fkt. der Kugelfkt. 1407.  
 zulassen, eine Transf. 691.  
 zusammengesetzte Gruppe 188, 605.  
 Zusammenhang 689, 853; Z. der Sigma- mit der Thetafkt. 789; Z. einer  $r$ -gliedr. Gruppe 604.  
 Zusammensetzung binärer Substit. 916.  
 zweifacher Punkt 866.  
 zweiseitige Klassen 1502.  
 zweite Bairesche Klasse 1060.  
 Zwischenform 405.  
 Zwischenintegral 567.  
 zyklische Fkt. 306; z. Glgch. 307; z. Gruppe 174; z. Gr. linearer Subst. 236, 933; z. Permutation 205; z. Untergruppe 180.  
 zyklometrische Reihen 438.  
 Zylinderfkt. 1449 ff.

Der erste Teilband umfaßt S. 1—528, der zweite Teilband S. 529—1023, der dritte Teilband S. 1025—1574.



**Pascals Repertorium der höheren Mathematik.** 2., völlig umgearb. Aufl. der deutschen Ausgabe. Unt. Mitw. zahlr. Mathematiker hrsg. von Dr. *E. Salkowski*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Berlin, u. Dr. *H. E. Timerding*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Braunschweig.

*Außer dem vorliegenden Band sind erschienen:*

**I. Band: Analysis.** Hrsg. von *E. Salkowski*.

1. Teilband: Algebra, Differential- und Integralrechnung. [XV u. 527 S.] 8. 1910 Geb. *RM* 18.—. 2. Teilband: Differentialgleichungen, Funktionentheorie. Mit 26 Fig. i. T. [XII u. S. 529—1023.] 8. 1927. Geb. *RM* 18.—

**II. Band: Geometrie.** Hrsg. von *H. E. Timerding*.

1. Teilband: Grundlagen und ebene Geometrie. Mit 54 Fig. [XVIII u. 534 S.] 8. 1910. Geb. *RM* 18.—. 2. Teilband: Raumgeometrie. Mit 12 Fig. i. T. [XII u. 628 S.] 8. 1922. Geh. *RM* 17.—, geb. *RM* 20.—

**Vorlesungen über reelle Funktionen.** Von Dr. *C. Caratheodory*, Prof. a. d. Univ. München. 2. Aufl. Mit 47 Fig. i. T. [X u. 718 S.] gr. 8. 1927. Geh. *RM* 27.—, geb. *RM* 29.—

„Es ist ein Werk aus einem Guß, das vieles Neue und Eigenartige enthält. Viele vom Verfasser eingeführte Begriffe und Ergebnisse werden zweifellos zum dauernden Besitz der Wissenschaft werden. Es ist ein wertvolles Geschenk, das uns Carathéodory mit diesem tiefdurchdachten Werk beschert hat.“

(Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.)

**Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen.**

Nach den Referaten von *L. Zorretti*, *P. Montel* und *M. Fréchet*. Von Dr. *A. Rosenthal*, Prof. a. d. Univ. Heidelberg. [350 S.] gr. 8. 1924. (Sonderabdruck aus der Encyclopädie der mathem. Wissenschaften.) Geh. *RM* 17.—

**Das Lebesguesche Integral.** Eine Einführung in die neuere Theorie der reellen Funktionen. Von Dr. *E. Kamke*, Prof. a. d. Univ. Tübingen. Mit 9 Fig. i. T. [IV u. 151 S.] 8. 1925. (Samml. math.-phys. Lehrbücher Bd. 23.) Kart. *RM* 7.—

**Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre.**

Gehalten in Kiel auf Einladung der Kant-Gesellschaft, Ortsgruppe Kiel. Von Dr. *A. Fraenkel*, Prof. a. d. Univ. Marburg a. d. L. [X u. 182 S.] 8. 1927. (Wiss. u. Hyp. Bd. XXXI.) Geb. *RM* 8.—

Einem Überblick über die wichtigsten Methoden und Ergebnisse der Mengenlehre folgt zunächst eine Betrachtung der gegen die Cantorsche Begründung erhobenen Einwendungen, wobei eine einheitliche Darstellung sowohl der Ideen Poincarés wie auch derjenigen des modernen Intuitionismus (namentlich Brouwers) angestrebt ist. Dann wird die axiomatische Begründung nach Zermelo unter Berücksichtigung der neuesten Fortbildungen gegeben. Dabei ist besonderer Wert auf eine nicht nur verständliche, sondern auch undogmatische Darstellung gelegt, die die naturgemäße Notwendigkeit der Forderungen und ihre Tragweite, sowie namentlich die noch offenen Probleme und die Beziehungen zur Philosophie hervortreten läßt. Den Abschluß bilden allgemeine Fragen der Axiomatik, u. a. die der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms.

**Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen.** Von Geh.

Reg.-Rat Dr. *A. Schoenflies*, Prof. a. d. Univ. Frankfurt a. M.

**I. Hälfte: Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen.** Umarbeitung des im VIII. Bande der Jahresberichte der Dtsch. Math.-Verein. erstatteten Berichts gemeinsam mit Dr. *H. Hahn*, Prof. a. d. Univ. Wien, hrsg. von *A. Schoenflies*. Mit 8 Fig. [XI u. 388 S.] gr. 8. 1913. Geb. *RM* 16.—, geb. *RM* 18.60

**II. Hälfte: Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.** Bericht, erstattet der Dtsch. Math.-Verein. Mit 26 Fig. [X u. 331 S.] gr. 8. 1908. Geh. *RM* 12.—

**Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin**



**Dimensionstheorie.** Von Dr. *K. Menger*, Prof. a. d. Univ. Wien. [IV u. 319 S.] gr. 8. 1928. Geh. *RM* 22.—, geb. *RM* 24.—

Die von Menger und Urysohn begründete Dimensions- und Kurventheorie findet in dem Werk eine systematische Darstellung. In einem einführenden Kapitel werden die wichtigsten elementaren Sätze der Punktmengenlehre entwickelt, so daß die Lektüre des Buches keine speziellen Vorkenntnisse voraussetzt. Nach einer Darstellung der Geschichte des alten Dimensionsproblems, dessen besondere Wichtigkeit immer wieder von hervorragenden Mathematikern und Philosophen betont wurde, werden die Hauptergebnisse der neuen Theorie nach den Methoden von Menger und von Hurewicz bewiesen. Eingehende Schilderung finden die Ausblicke, welche die neue Theorie auf die gesamte Lehre vom Raum eröffnet.

**Zahlentheorie** Von Dr. *P. Bachmann*, weil. Prof. in Weimar.

I. Teil: Die Elemente der Zahlentheorie. [XII u. 264 S.] gr. 8. Neudruck 1925. Geh. *RM* 9.40, geb. *RM* 11.40

II. Teil: Die analytische Zahlentheorie. [XVI u. 494 S.] gr. 8. Neudruck 1921. Geh. *RM* 17.60, geb. *RM* 20.—

III. Teil: Die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. [XII u. 300 S.] gr. 8. Neudruck 1927. Geh. *RM* 10.60, geb. *RM* 12.60

IV. Teil: Die Arithmetik der quadratischen Formen. I. Abt. 2. Aufl. [XIV u. 668 S.] gr. 8. Neudruck 1925. Geh. *RM* 23.60, geb. *RM* 26.60. II. Abt. Hrsg. von Geh. Hofrat Dr. *R. Haußner*, Prof. a. d. Univ. Jena. Mit einem Titelbild u. 20 Textfig. [XXII u. 537 S.] gr. 8. 1923. Geh. *RM* 19.—, geb. *MR* 21.—

V. Teil: Allgemeine Arithmetik der Zahlkörper. [XXII u. 548 S.] gr. 8. Neudruck 1926. Geh. *RM* 19.60, geb. *RM* 22.—

**Diophantische Approximationen.** Eine Einführung in die Zahlentheorie.

Von Dr. *H. Minkowski*, weil. Prof. a. d. Univ. Göttingen. 2. Aufl. Mit 82 Fig. i. T. [VIII u. 236 S.] gr. 8. 1927. (Math. Vorlesungen a. d. Univ. Göttingen.) Geb. *RM* 10.—

**Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale.** Von Dr. *E. Landau*, Prof. a. d.

Univ. Göttingen. 2. Aufl. Mit 14 Fig. [VII u. 147 S.] gr. 8. 1927. Geh. *RM* 6.40

**Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen.** Von Dr. *E. Hilb*, Prof. a. d. Univ. Würzburg, u. Dr. *M. Riesz*, Doz. a. d. Univ. Stockholm. [S. 1185—1228.] gr. 8. 1924. (Sonderausgabe aus der Enzyklopädie der math. Wissensch.) Geh. *RM* 2.20

**Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen.** Von Geh. Rat Dr. *J. Thomae*, weil. Prof. a. d. Univ. Jena. Mit 10 Fig. [VI u. 182 S.] gr. 8. 1908. Geb. *RM* 8.—

**Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen.**

Von Dr. *L. Schlesinger*, Prof. a. d. Univ. Gießen.

I. Band. [XX u. 487 S.] gr. 8. 1895. Geh. *RM* 16.—, geb. *RM* 18.60

II. Band. I. Teil. Mit Fig. i. T. [XVIII u. 532 S.] gr. 8. 1897. Geh. *RM* 18.—

II. Band. II. Teil. Mit Fig. i. T. [XIV u. 446 S.] gr. 8. 1898. Geh. *RM* 15.—

**Partial differential equations of mathematical physics.** By † *A. G.*

*Webster*, A. B. (Harv.), Ph. D. (Berol.), Professor of Physics, Director of the Physical Laboratory, Clark University, Worcester, Mass. Ed. by *S. J. Plimpton*, Ph. D. (Yale.), Assistant Prof. of Physics, Polytechnic Institute, Worcester, Mass. [VIII u. 440 S.] gr. 8. 1927. (Teubn. Lehrb. d. math. Wissensch. XLII.) Geh. *RM* 23.—, geb. *RM* 25.—

**Partielle Differentialgleichungen.** Deutsche Ausgabe von *Webster*. Partial Differential Equations. Hrsg. von Dr. *G. Szegő*, Prof. a. d. Univ. Königsberg/Pr. (Teubn. Lehrb. d. math. Wissensch. XLIII.) [In Vorb. 1929.]

**Verlag von B.G.Teubner in Leipzig und Berlin**

**Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.** Von Dr. *L. Lichtenstein*, Prof. a. d. Univ. Leipzig. [IV u. 57 S.] gr. 8. 1924. (Sonderausg. a. d. Encykl. d. math. Wissensch.) Geh. *RM* 3,20

**Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.** Von Geh. Reg.-Rat Dr. *D. Hilbert*, Prof. a. d. Univ. Göttingen. 2. Aufl. [XXVI u. 282 S.] 4. 1924. (Fortschr. d. math. Wissensch. 3.) *RM* 10.—, geb. *RM* 12.—

**Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen.** Von Dr. *G. Wiarda*, Prof. a. d. Techn. Hochschule i. Dresden. (Sammlung math.-phys. Lehrb. Bd. 25.) [In Vorb. 1929]

**Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen.** Von Dr. *H. Hahn*, Prof. a. d. Univ. Wien. I. Teil. [51 S.] gr. 8. 1911. Geh. *RM* 2.—

**Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten.** Von Dr. *O. Toeplitz*, Prof. a. d. Univ. Kiel, und Dr. *E. Hellinger*, Prof. a. d. Univ. Frankfurt a. M. (Sonderausg. a. d. Encykl. d. math. Wiss.) [III u. 281 S.] gr. 8. 1928. Geb. *RM* 16.—

**Vorlesungen über Algebra.** Unter Benutzung der dritten Auflage des gleichnamigen Werkes von † Dr. *G. Bauer*. In 4., verm. Aufl. dargest. von Dr. *L. Bieberbach*, Prof. a. d. Univ. Berlin. Mit 16 Fig. i. T. u. auf 1 Taf. [X u. 334 S.] gr. 8. 1928. Geb. *RM* 20.—

Das Buch hält auch in der vierten Auflage an dem Ziel der früheren fest, eine für die Zwecke der Lehramtskandidaten bestimmte Einführung in die Algebra zu liefern, und will daher nicht die Algebra in einer ‚splendid isolation‘ von den übrigen Gebieten der Mathematik, sondern gerade in Fühlung mit denselben aufbauen. Im Mittelpunkt steht wieder die Theorie der algebraischen Gleichungen. Der Bearbeiter der vierten Auflage hat sein Bestreben dahin gerichtet, nach Stoff und Form der Darstellung dem heutigen Stand der Wissenschaft gerecht zu werden. Neu hinzugefügte Abschnitte betreffen u. a. die graphische Auflösung von Gleichungen, die mannigfachen Sätze über die Lage der Gleichungswurzeln und die Galoissche Gleichungstheorie.

**Höhere Algebra.** Autorisierte deutsche Ausgabe von *L. E. Dickson* „Modern algebraic theories“. Hrsg. von *E. Bodewig*, Köln a. Rh. Mit 3 Fig. [VII u. 242 S.] 8. 1929. Geb. *RM* 14.—

Die Übersetzung des Dickson'schen Buches wird gerade in Deutschland eine oft empfundene Lücke in der Lehrbuchliteratur ausfüllen; denn bisher fehlte besonders dem Studenten ein Buch, das eine wirklich klare und einfache, durch zahlreiche anregende Beispiele und Aufgaben erläuterte Darstellung wichtiger Theorien der Algebra, wie z. B. der Gruppentheorie, der Galoisschen Theorie, der Invariantentheorie und der Theorie der quadratischen Formen in den singulären Fällen bietet. Das didaktisch glänzend angelegte Buch wird daher besonders Lehrern und Studenten der Mathematik willkommen sein.

**Praktische Infinitesimalrechnung.** Von *F. F. P. Bisacre*, M. A. (Cambridge), Chartered Civil Engineer, Glasgow. Berechtigte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung von Dr. *E. Trefftz*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Dresden, herausg. von Dr. phil. *E. König*, Elberfeld. Mit 104 Abb. u. 5 Bildnistaf. [XI u. 364 S.] 8. 1929. Geb. *RM* 18.—

Das Buch gibt eine besonders anschauliche Einführung in die Infinitesimalrechnung und behandelt Koordinaten, Funktionen, Grenzwerte, Differentiation, Integration einfacher Funktionen, einfachste Differentialgleichungen. Es wendet sich in erster Linie an solche Studierende, „die sich die Fähigkeit erwerben wollen, die Infinitesimalrechnung praktisch zu handhaben“. Dementsprechend enthält es in besonders ausführlicher Darstellung eine reiche Auswahl von Anwendungen aus der Mechanik, der Elektrizitätslehre, der physikalischen Chemie und der Thermodynamik.

**Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin**

Pascal, Repertorium I, 3. 2. Aufl.

# Sammlung

## mathematisch - physikalischer Lehrbücher

Hrsg. von Dr. E. Trefftz, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Dresden

- Zahlenrechnen.** Von *L. Schrutka*. (Bd. 20.) Kart. *RM* 4.40
- Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Von *J. L. Coolidge*, Deutsch von *Fr. M. Urban*. (Bd. 24.) Geb. *RM* 10.—
- Die Determinanten.** Von *E. Netto*. 2., verb. Aufl. von *L. Bieberbach*. (Bd. 9.) Kart. *RM* 4.40
- Theorie der elliptischen Funktionen.** Von *M. Krause*, unt. Mitw. von *E. Naetsch*. Mit 25 Fig. (Bd. 13.) Kart. *RM* 5.40
- Die Theorie der Besselschen Funktionen.** Von *P. Schafheülin*. Mit 1 Figurentaf. (Bd. 4.) Kart. *RM* 4.—
- Das Lebesguesche Integral.** Eine Einführung in die neuere Theorie der reellen Funktionen. Von *E. Kamke*. Mit 9 Fig. i. T. (Bd. 23.) Kart. *RM* 7.—
- Integralgleichungen.** Von *G. Wiarda*. (Bd. 25.) [In Vorb. 1929]
- Konforme Abbildung.** Von *L. Lewent*, Hrsg. von *E. Fahnke*. Mit Beitrag von *W. Blaschke*. Mit 40 Abb. (Bd. 14.) Kart. *RM* 3.80
- Funktionentafeln mit Formeln u. Kurven.** Von *E. Fahnke* u. *F. Emde*. Mit 53 Textfig. (Bd. 5.) Geb. *RM* 8.—
- Graphische Methoden.** Von *C. Runge*. 3. Aufl. Mit 94 Fig. i. T. (Bd. 18.) Geb. *RM* 5.40
- Theorie der Kräftepläne.** Von *H. E. Timerding*. Mit 46 Fig. (Bd. 7.) Kart. *RM* 3.—
- Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik.** Von *W. von Ignatowsky*. I. Teil: Die Vektoranalysis. 3. umgeänd. Aufl. Mit 27 Textfig. II. Teil: Anwendung der Vektoranalysis in der theoret. Physik. 3., neubearb. Aufl. Mit 14 Textfig. (Bd. 6, 1 u. 2.) Kart. je *RM* 5.60
- Die ebene Vektorrechnung und ihre Anwendungen in d. Wechselstromtechnik.** Von *H. Kafka*. Teil I: Grundlagen. Mit 62 Fig. i. T. Kart. *RM* 7.—. Teil II: Besondere Anwendung in der Wechselstromtechnik. (Bd. 22, 1 u. 2.) [In Vorb. 1929]
- Das Rechnen mit symmetrischen Komponenten.** Ein Lehrbuch für Elektrotechniker. Von *G. Oberdorfer*. (Bd. 26.) [U. d. Pr. 1929]
- Einführung in die Theorie des Magnetismus.** Von *R. Gans*. Mit 40 Fig. (Bd. 1.) Kart. *RM* 3.20
- Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus.** Von *Cl. Schaefer*. Mit Bildn. J. C. Maxwells u. 33 Textfig. 3. Aufl. (Bd. 3.) Geb. *RM* 6.60
- Grundzüge der mathematisch-physikalischen Akustik.** Von *A. Kalähne*. I. Teil. Kart. *RM* 4.—. II. Teil. Mit 57 Fig. i. T. (Bd. 11, 1 u. 2.) Kart. *RM* 6.75.
- Einführung in die kinetische Theorie der Gase.** Von *A. Byk*. I. Teil: Die idealen Gase. Mit 14 Fig. (Bd. 10.) Kart. *RM* 3.—
- Dispersion und Absorption des Lichts in ruhenden isotropen Körpern.** Theorie und ihre Folgerungen. Von *A. Goldhammer*. Mit 28 Fig. (Bd. 16.) Kart. *RM* 4.40
- Die Theorie der Wechselströme.** Von *E. Orlich*. Mit 37 Fig. (Bd. 12.) Kart. *RM* 3.—
- Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln.** Von *K. W. Wagner*. Mit 23 Fig. (Bd. 2.) Kart. *RM* 3.20
- Die mathematischen Instrumente.** Von *A. Galle*. Mit 86 Abb. (Bd. 15.) Kart. *RM* 5.60
- Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse.** Von *P. Schwahn*. Mit 20 Fig. (Bd. 8.) Kart. *RM* 3.80
- Elemente d. technischen Hydromechanik.** Von *R. v. Mises*. I. Teil. Mit 72 Fig. i. T. (Bd. 17, 1 u. 2.) Kart. *RM* 6.—. [II. In Vorb. 1929]
- Graphische Hydraulik.** Von *A. Schoklitsch*. Mit 45 Fig. i. T. u. auf 2 Taf. (Bd. 21.) Kart. *RM* 2.60

*Weitere Bände in Vorbereitung*

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin



## Date Due

[illegible]



03

pt. 3

10 P27R 1910 VOL 1 PT 03  
PASCAL E REPERTORIUM DER HOEHEREN MAT

INSERT BOOK  
MASTER CARD  
FACE UP IN  
FRONT SLOT  
OF S.R. PUNCH

MASTER CARD



UNIVERSITY OF ARIZONA  
LIBRARY

DO NOT REMOVE THIS  
FROM BOOK  
A FEE OF \$1.00  
IS CHARGED FOR  
OR MULTICATION

124682

GLOBE 901144-0

GE. STECHERT & CO.  
(ALFRED HAFNER)  
NEW YORK



